Theory Study on Contemporary Formal Logic and Its Application on Artificial Intelligence

当代形式逻辑及其在人工智能中的应用理论研究

龚启荣 等 著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

当代形式逻辑及其在人工智能中的应用理论研究/龚启荣等著．—北京：电子工业出版社，2011.1
ISBN 978-7-121-12407-5

Ⅰ．①当…　Ⅱ．①龚…　Ⅲ．①形式逻辑-研究　②形式逻辑-应用-人工智能-研究
Ⅳ．①B812　②TP18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 228525 号

策划编辑：董亚峰
责任编辑：张　京
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：720×1000　1/16　印张：30　字数：598 千字
印　　次：2011 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：58.00 元

本书主要撰稿人

龚启荣

撰稿组成员

杨黔福　曾庆华　褚智萍　高东昇

蒋学锋　吴春红　叶　森　张延伍

所谓人工智能，就是对宇宙的显示实施机器表示，加到原有的知识表示系统中去行使机器推理，得出前所未有的新的知识的运行过程。人工智能之所以为智能，其根本就是能从已有知识去得出新的知识。

充分条件作为重要的联结关系，向来都是逻辑学家所关注的焦点。这是因为，任何推理式的前提和结论之间一定存在普遍有效的（即逻辑的）充分条件关系；对事实上可得出新知的推理来说，在其前提中一定含有充分条件关系。当代形式逻辑所揭举的两个独立性，是逻辑充分条件关系的精髓，是作为从已知进入新知的工具的逻辑科学的两块基石。

人工智能的基础装置是基于当代形式逻辑的内涵智能机，其硬件的核心元件是能模拟客观的充分条件关系的“必然门”。“必然门”是机器推理能从已知获取新知的核心元件。

如果说，在农业和工业时期，社会财富和国家实力的来源是土地、厂房、第二代或第三代工具和劳动力，那么，在工业后的信息、智能时期，社会财富和国家实力的主要来源将是智能科学及其指导下获得的智能装备。当前的局势可说是“大泽龙方蛰，五洲鹿正肥”。正在叩击第五个工具时代——智能工具时代门环的国际人工智能界还彷徨于“认知模拟”、“人机合一”迷途的历史状况，给中华民族在新世纪赢得在这个领域中的世界科技领先地位，形成超越国际先进水平的经济、军事实力，提供了奋力拼搏的绝好机遇。记取由于武器（杀人的工具）的一代之差（第二代冷武器对第三代热武器），英法联军直捣京师、火烧圆明园的历史教训，排除干扰，当机立断，对内涵智能机迅速投入力量付诸工程实施。我们竭诚祈愿首先由中国人研制出第一台内涵智能机。为实现此目标，我们愿与有志于此的中国人齐心合力，共同奋斗。

龚启荣
2009 年 9 月 9 日

So-called artificial intelligence is to implement machine representation for the display of the universe, add it to the original knowledge representation system to execute machine inference, and obtain the operation process of unprecedented new knowledge. Artificial intelligence is intelligent basically because it can obtain new knowledge from existing knowledge.

As an important connective relationship, sufficient condition has always been concerned by logicians, because there must be a universally valid (logical) sufficient condition relation existing between the premise and conclusion of any inference formula; for the inference that can induce new knowledge in fact, the premise must contain sufficient condition relation. Two independences revealed by modern formal logic are the essences of sufficient condition relation and two footstones of science of logic as the tool to enter new knowledge from existing knowledge.

The basic apparatus of artificial intelligence is connotation intelligence machine based on modern formal logic and the core element of its hardware is "necessity door" that can simulate objective sufficient condition relation. Necessity door is the core element of machine inference that can obtain new knowledge from existing knowledge.

If the sources of social wealth and national power are land, plants, second-generation and third-generation tools, and labor forces in agriculture and industry periods, in information and intelligence periods after industry period, the main sources of social wealth and national power will be intelligence science and intelligence equipment under the guidance of the science. The present situation can be described as "dragon is just dormant at Daze while deer is fat in five continents". Just at the moment when rapping at the door of the fifth tool age, i.e. intelligence tool age, international artificial intelligence circle hovers in the lost historic state of "recognition simulation" and "man-machine unity" and provides an absolutely good opportunity for Chinese nation to win a leading position in world technology in the new century and form advanced economic and military strengths ahead of the international advanced level. Learn from the lessons of history that thousands of British and French forces stormed Beijing and burnt Yuanmingyuan Garden for one-generation gap in weapons (between the second generation cold weapons and the third generation hot weapons), suppress inferences and make a prompt decision to invest in researching and developing connotation intelligence machines rapidly. We sincerely hope that Chinese can develop the first connotation intelligence machine. In order to achieve this purpose, we would like to work together with Chinese aspiring to achieve the purpose.

Gong Qirong
September 9, 2009

序

奉献给读者的这部著作是国家“211”工程重点建设大学——贵州大学逻辑学教授龚启荣主持的教育部立项项目“当代形式逻辑及其在人工智能中的应用理论研究”(项目批准号:07JA720006)的最终成果。项目研究小组按申报计划,突破了难点,解决了难题,出色地完成了研究任务,高质量地达到了预期研究目标。

“众人拾柴火焰高”,团队的力量是强大的。项目组研究人员的年龄结构、职称结构等较合理。可以说,这部著作是项目组的老师们20来年集体“拾柴”、刻苦努力所获得的逻辑科学的研究结晶。无论是理论研究还是应用理论研究,著作都达到了国际先进水平。

从理论上看,这部著作有一系列亮点。

著作有自觉的逻辑客体说思想。这是同逻辑思维说(认为逻辑研究人的思维)、逻辑符号说(认为逻辑研究符号)并列的世界三大学派之一。逻辑科学,从它诞生之日起在事实上研究的就始终是客观世界的逻辑结构和逻辑规律。逻辑科学,从来没有研究过也没有能力研究人的思维的形式结构和思维的规律。这部著作遵循逻辑客体说的辩证唯物论理论,踏踏实实地、一丝不苟地研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律。著作之所以取得许多实质性成果,与这个思想有着密切的关系。

两个形式系统 ***Cm*** 系统和 ***Cn*** 系统是逻辑的而不是数学的形式化公理系统。著作在讨论这两个形式系统的基础上,进一步深入地研究并证明了两个系统的一系列特色。在阐述作为逻辑词(2元的联结词)的“必然”、“可能”、“偶然”、“风马牛”逻辑性质的基础上,又进一步提出并证明了42个更精彩的、崭新的形式定理,计近百个推理,并以7个逻辑方阵通俗易懂的方式展现了两个系统的无限风光、无限前景。

研究项目最突出的应用——对国家、对民族最有意义最有价值的应用理论,就是在人工智能上的应用理论。本项目在人工智能中的应用理论完全不同于以美国为代表的国际人工智能理论。著作提出并回答了一系列属于人工智能的逻辑理论的重大问题;指出了人工智能的根本使命;完成了古典逻辑和形形色色非古典逻辑以及传统形式逻辑不能作为人工智能的逻辑理论基础的论证;充分证明了,当代形式逻辑向人类提供了从已有知识获取新知识的推理工具,因而是人

工智能最合适的逻辑工具。著作清晰地刻画了必然门的逻辑性质,为研制必然门从而进一步设计、制造内涵智能机提供了重要逻辑理论基础,其研究深度可以说几乎达到了呼之欲出的程度。著作严格证明并严肃地指出,在刚过去的半个世纪内,国际人工智能界的两个方针(“认知模拟”、“人机合一”)是方向性、路线性的失误。这种局面为我国在新世纪迎来超越国际先进水平提供了绝好机遇。该项研究对我国在经济、军事实力上发生质的变革,取得国际先进地位具有重要意义,其应用前景是不可估量的。

(一)

在《数学大辞典》(人民出版社)第7册第709页上有如下一段陈述:

“证:1,3,5,7,…,$(2n-1)$之和为n^2。

(1) 今命$n=1$,$1=1^2$,等式成立。

(2) 今假定对于n之某值k,成立$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$。等式两边加$2k+1$,得出$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$。即易$k$为$k+1$时,等式仍能成立。由之可知,若对于$n$之某正整数值$k$,此式成立,则对于正整数值$k+1$等式亦成立。

据(1)、(2),故知此时对于n之任意正整数值等式恒能成立。”

以$\boldsymbol{A}(1)$、$\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$、$\boldsymbol{A}(n)$分别表示$1=1^2$、$1+3+5+7+\cdots+2k-1=k^2$、$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$(其中,$k$为某个正整数)、$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+\cdots+(2n-1)=n^2$(其中,$n$为任意正整数)。在上述引文中出现了“假定$\boldsymbol{A}(k)$,得出$\boldsymbol{A}(k+1)$”,“若$\boldsymbol{A}(k)$,则$\boldsymbol{A}(k+1)$”,“据(1)$\boldsymbol{A}(1)$、(2)若$\boldsymbol{A}(k)$则$\boldsymbol{A}(k+1)$,故知$\boldsymbol{A}(n)$”。这里出现了“假定……,得出……”、“若……,则……”、“据……,故知……”。显然,这些都表示前、后件之间具有充分条件或必然联系(此二者同义)。我们将依据事实(只有如此,讨论才是正当的),实事求是(依据事实得出正确结论)地来探究其逻辑含义(即逻辑学意义上的客观指谓)。

十分明显,从外延上看,具有$\boldsymbol{A}(n)$形的式有无限多个,且其长(式中符号的个数)也趋于无限。因此,生命和精力全都有限的人类不可能通过外延逐一验算的方式来确定$\boldsymbol{A}(n)$的成立。然而,从内涵(为任意式所共有且只为此类式所仅有的性质,故而又称“共仅属性”)上说,却可以有限地陈述和把握:

第i项为$2i-1$($i=1,2,3,\cdots,x$),共有x项,其和为x^2(其中,x的变域为正整数)。 1)

于是,任一式的内涵表达式为:

$$\boldsymbol{A}(x)\text{——}\sum_{i=1}^{x}(2i-1)=x^2$$

其中，$\sum_{i=1}^{x}(2i-1)$ 表示$(2i-1)i$ 从 1 到 x 的连加。 2)

而任一式的后继式为：

$$\boldsymbol{A}(x+1)\text{——}\sum_{i=1}^{x+1}(2i-1)=(x+1)^2 \qquad 3)$$

为求简明，以 $\boldsymbol{a}(x)$、$\boldsymbol{a}(h(x))$ 分别表示 $\sum_{i=1}^{x}(2i-1)$、$\sum_{i=1}^{x+1}(2i-1)$，其中，$h(x)$ 表示 $x+1$，h 为“后继函数号”。显然：

$$\boldsymbol{a}(h(x))=\boldsymbol{a}(x)+2x+1\cdots\cdots(\alpha) \qquad 4)$$

α 为前趋 $\boldsymbol{a}(x)$ 与后继 $\boldsymbol{a}(h(x))$ 之间的重要联系，称为 $\boldsymbol{A}(x)$ 的“内涵本质联系”。据内涵本质联系 α，$x^2+2x+1=(x+1)^2$，可得：

$$\boldsymbol{a}(h(x))=\underset{\substack{?\|\\ x^2}}{\boldsymbol{a}(x)}+2x+1\overset{?}{=}(x+1)^2\cdots\cdots(\beta) \qquad 5)$$

β 称为“内涵根基”，简称“根基”。

提请注意下述重要事实：从第 1)步到第 3)步，只是写出 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 的内涵式，在事实上自始至终并未确定(当然，不可亦无须“假定”)其是否成立，因此，到第 5)步得出根基 β 时，在其中的 $\underset{\substack{?\|\\ x^2}}{\boldsymbol{a}(x)}$ 竖等式左方和最后等式的上方各出现一个问号“?”，意指上述二等式是否成立至此并未确定，在事实上可以成立，也可以不成立(这个事实非常之重要)；然而，就在这种情况下，含有两个问号“?”的根基 β 却揭举了下述事实①：

① 事实上不会发生 $\boldsymbol{A}(x)$ 成立而 $\boldsymbol{A}(h(x))$ 不成立这样的事情； 6)

很明显，还有下述事实②和③：

② 任何实施了第 1)~6)步的人都确定了上述事实①的存在；

③ 确定者在确定上述事实①存在时，无须也不可能依据 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 本身是否成立。

①、②、③可合并、简化为：“可独立于 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 是否成立确定不会是 $\boldsymbol{A}(x)$ 成立而 $\boldsymbol{A}(h(x))$ 不成立。”一个式是否成立，即指相应的客观事件的有无。因此，可进一步表述为：“可独立于事件 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}(x)$ 而无 $\boldsymbol{A}(h(x))$。”以“$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(h(x))$”表示上述复合事件，其中，$\rightharpoonup$ 为充分条件号，此事件称为“充分条件事件”。引文中的“假定……，得出……”、“若……，则……”的逻辑语义即为充分条件事件“$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(h(x))$”。其中的“可独立于前、后件的有无确定”称为“第一独立性”，简称“一独”。于是，上述逻

辑语义还可进一步紧缩为:“具有一独的不会是有前而无后。”这其中的“具有一独”非常之重要。正由于“具有一独”,人类尽管确定不了无限多对 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 本身的有无,却可依据内涵本质联系 α 和根基 β 确定不会是有 $\boldsymbol{A}(x)$ 而无 $\boldsymbol{A}(h(x))$,即其间的充分条件关系(或必然联系)。

以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示事件。一般来说,“$\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$”即指“具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$”。这里的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可以是或开(其中有个体变元的自由出现,从而是个体-有、无函数)或闭(无个体变元的自由出现,从而具有确定的有无值)的事件。当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为开事件(即以个体域为定义域,以有、无值为值域的个体-有、无函数)时,只能讨论其闭例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$的有无。此时,$\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 指的是“可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的任何闭例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}'$而无 $\boldsymbol{B}'$。”从已举的例子 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$来看,内涵根基 β 就提供了对任何闭例 $\boldsymbol{A}(e)$、$\boldsymbol{A}(h(e))$来说,必满足“具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}(e)$而无 $\boldsymbol{A}(h(e))$”。当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为闭事件时,其任何闭例就是其自身。我们约定,不管 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身是开是闭,当讨论其有、无时,永远讨论其任何闭例的有、无。

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为不可逐一列举(有限或无限)域上的事件,人类无法外延地确定 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的有无(请注意是不可逐一列举的有限或无限多个闭例的有无)。然而,人类却可以通过在有限步内实施的提取不可逐一列举域(外延)的共仅属性(内涵)并依据内涵本质联系和根基从而确定域上的事件间的第一独立性。上述可在有限步内实施的方法就称为“内涵科学分析法”,并简称为“内析法”。

若 $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$、$\boldsymbol{B}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(在其中自由出现的个体变元 $x_i(i=1-n)$ 可以不只出现 1 次)为开事件,然而,$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$却是闭事件,在前、后件中共同出现的个体变元 $x_i(i=1-n)$全都是约束的,充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有唯一确定的有无值。这是由于,确定其为有的内析法中的内涵本质联系和根基内涵(而不是外延列举)地确保 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的任意一对对闭例 $\boldsymbol{A}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$、$\boldsymbol{B}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$之间必满足一独。请善意的朋友们(我们这些话只说给善意的朋友们听)注意下述重要事实:当内析法确定任意对闭例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$之间满足一独时,是对任意对闭例来说依据内涵根基一揽子内涵地统一解决的,并不要求外延地一对对去验证。这是由于,依凭外延列举检验,纵然是三个五个、十个百个、千个万个、兆个亿个、仍旧渺如恒河一沙,沧海一粟,望洋兴叹,无济于事,那就索性一个也不去列举,只能也必须全仗内涵根基统一彻底地解决。这一点非常重要。在这里,根本不存在像正统数理逻辑一阶谓词演算 $\boldsymbol{F}$ 中的全称量词 $\forall x$(对于 x 的不可逐一列举变域中的每一个个体来说成立)所要求的那种对任何人来说都无法实施的外延地逐一列举并逐一检验。可见,尽管在以往的理论中确实出现过像全称量词 $\forall x$ 这样的想法、说法、写法。然而,在客观世界的客观事件的客观逻辑结构中却并无与之对应的要素,这就像在客观世界的客观化合物的客观的分子结构中不存在“燃

素”一样。逻辑学中的“外延量词说”就像是化学中的“燃素说”。在客观世界的依据逻辑结构从已有事件必然过渡到新事件的逻辑运演机制中从未出现过与“量词说”相对应的逻辑要素，这就像在客观世界的依据化学结构从已有物质生成新物质的化学反应中从未出现过与“燃素说”相对应的化学元素一样。

引文中的“据(1)、(2)，故知……”指谓下述事件：

$$\{\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))]\}\rightharpoondown\boldsymbol{A}(x) \qquad (\gamma)$$

客观事件 γ 是关于正整数的客观规律，称为“数学归纳律”，其在数学证明中的运用，称为“数学归纳法”。很明显，γ 中出现的左、右两个$\rightharpoondown$(充分条件)关系皆具有一独(当然，其各自的前、后件不同)。不仅如此，这两个$\rightharpoondown$还具有“第二独立性”(简称“二独”)：$\boldsymbol{A}(x)$为有可独立于$\boldsymbol{A}(h(x))$的有无确定；$\boldsymbol{A}(1)$为有与$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))$为有可独立于$\boldsymbol{A}(x)$的有无确定。前者明如观火，对后者在此略做说明：在确定$\boldsymbol{A}(1)$为有时，$\boldsymbol{A}(x)$的有无事实上并未确定；而在确定$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))$为有时，鉴于内析法中的内涵根基提供了一独(可独立于$\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$的有无确定不会是有$\boldsymbol{A}(x)$而无$\boldsymbol{A}(h(x))$)，其中的一半就转化为$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))$对$\boldsymbol{A}(x)$的二独(可独立于$\boldsymbol{A}(x)$的有无确定$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))$为有)。若$\boldsymbol{A}$对$\boldsymbol{B}$具有“二独”，则称$\boldsymbol{B}$为对$\boldsymbol{A}$来说的新事件。“一独”、“二独”合称“两个独立性”，简称“两独”。鉴于数学归纳律中$\rightharpoondown$关系具有“两独”，就从已有事件($\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))]$)必然过渡到新事件($\boldsymbol{A}(x)$)(提请注意，尽管新事件在已有事件中出现，然而在确定已有事件为有时，新事件的有无并未确定；事情甚至是，在确定 γ 为有时，作为后件的新事件$\boldsymbol{A}(x)$的有无也并未确定)。综合起来说：在确定 γ 为有和 γ 的前件为有时，作为新事件的 γ 的后件$\boldsymbol{A}(x)$的有无并未确定，之所以如此，就是由于 γ 中的$\rightharpoondown$关系的“两独”。

数学归纳律 γ 是数学规律，不是普遍有效的逻辑规律。有逻辑规律“充分条件肯定律”$\models\boldsymbol{B}\wedge(\boldsymbol{B}\rightharpoondown\boldsymbol{C})\rightharpoondown\boldsymbol{C}$，“$\models$”号中的二短横表示“两独”。这是个客观推理律。当前件已确定为有时，表示成$\Vdash\boldsymbol{B}\wedge(\boldsymbol{B}\rightharpoondown\boldsymbol{C})\rightharpoondown\boldsymbol{C}$，是个客观证明律。当$\boldsymbol{B}\rightharpoondown\boldsymbol{C}$为 γ 时，即为当右合取支充分条件前件为数学归纳律时的特殊情况，其完整的表示应为：

$$\Vdash\{\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))]\}\wedge\{\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{A}(h(x))]\rightharpoondown\boldsymbol{A}(x)\}\rightharpoondown\boldsymbol{A}(x)$$

为了简练，其语言表述往往将右合取支数学归纳律 γ 略去不提(因为在实际操作时已事先确定为有)，简化地说成“据(1)、(2)，故知……”(也就是引文中的说法)。客观证明律就是客观世界具有两独的前件已确定为有的从已有事件必然过渡到新事件的逻辑运演机制，人认识后便成为从已知(对已有事件的认识)进入(对必然过渡的认识)新知(对新事件的认识)的思想证明，而出现在其中的$\rightharpoondown$关系所具有的“两独”则提供了以有限把握无限、从已知进入新知的根基和依据。

贯彻弗雷格原理的正统数理逻辑将实际上具有“两独”的充分条件关系异

化成具有“两依”（说明见后）的实质蕴涵，为了与之配套，又对不可逐一列举域引入不可能实施的要求逐一列举的外延的“量词”，从而将数学归纳律异化为：

$$\{\boldsymbol{A}(1)\wedge\forall x[\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(x))]\}\rightarrow\forall x\boldsymbol{A}(x)\cdots\cdots(\text{甲})$$

自从有人类以来，迄今从来不曾有一个人在普通逻辑思考中事实上依据甲去得出结果，那是由于任何企图通过甲去得出结果的人必须要做下述事情：

(1) 确定 $\boldsymbol{A}(1)$ 成立；

(2) 外延地逐一确定 $\boldsymbol{A}(x)$ 的每一个闭例成立；

(3) 将一对对两个都成立的 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 的闭例配对，验算每一个 $\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(x))$ 的闭例成立，从而确定 $\forall x[\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(x))]$ 成立；

(4) 验算 $\boldsymbol{A}(1)\wedge\forall x\{\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(x))\}$ 成立；

(5) 由之去得出结果 $\forall x\boldsymbol{A}(x)$ 成立。

问题不在于要做 5 件事情（倘有必要，再多做几件也不要紧）；问题在于：在上述必须要做的 5 件事情中，其中第 2 件事情就是直接外延地确定 $\forall x\boldsymbol{A}(x)$ 成立！既然如此，何必还要再多做其余 4 件事情呢？这说明想用甲的人马上发现，那甲是根本无须用的。事情不仅仅是“事 5 功 1”，事情的要害还在于：逐一确定 $\boldsymbol{A}(x)$ 的每一个闭例成立对生命和能力都有限的人类来说是根本不可能实施的！这说明甲不能用。甲既无须用又不能用的根源在于出现在甲中的→的“两个依赖性”（简称“两依”，正好与⇀的“两独”相反）：确定任一个 $\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(x))$ 的闭例 $\boldsymbol{A}(e)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(e))$ 的成立需依赖其前后件 $\boldsymbol{A}(e)$、$\boldsymbol{A}(h(x))$ 是否成立（这是由必须由主目值确定函数值这个函数的根本性质决定的，这称为→的“第一依赖性”，简称“一依”）；而确定 $\boldsymbol{A}(1)\wedge\forall x\{\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{A}(h(x))\}$ 成立又需依赖确定 $\forall x\boldsymbol{A}(x)$ 是否成立（这称为→的“重言性”，又可称为→的第二依赖性，简称“二依”，“一依”、“二依”合称“两个依赖性”，简称“两依”）。

正统数理逻辑一阶谓词演算 $\boldsymbol{F}$ 以真值函数和施加于个体变元的量词为研究对象，而 $\boldsymbol{F}$ 中具有“两依”（从而不能据以得出新知）的真值函数实质蕴涵→与普通逻辑思考中事实上具有“两独”（从而能据以得出新知）的充分条件关系（即必然关系，是刻画清楚后的充分条件关系，用符号⇀表示）判若霄壤，形同冰炭，南辕北辙，水火不容；再加以 $\boldsymbol{F}$ 中对不可逐一列举域竟然要求外延地逐一列举检验的量词 $\forall x$ 又与普通逻辑思考中的以有限把握无限的内涵科学分析法分道扬镳，大相径庭。由之可见，被称做逻辑科学的现代发展（从而被叫做“现代逻辑”）的正统数理逻辑是离散数学，而不是真正的逻辑。误将离散数学当做逻辑科学的现代发展，这会断送源远流长的真正的逻辑科学正常发展的前程。

（二）

在普通逻辑思考中出现关于“必然”、“可能”的推理，那可说是司空见惯、习

以为常的。正统数理逻辑的两个演算（命题演算 **P**、狭谓词演算 **F**）不研究“必然”、“可能”（不认为“实质蕴涵”是“必然联系”的“逻辑抽象”，这倒还有些自知之明）。因此涌现出不少非正统的各种各样的模态逻辑来补充正统的不足，自称研究“必然”、“可能”，然而，却将其处理成一元“模态词”（只施加于一个命题），且依旧跳脱不出像正统的 **F** 那样引入外延列举“量词”的窠臼，从而被“量词”约束的个体变元号不能以任意项符（尤其是常项符）代入。这种理论特征由于不符合事实从而远离普通逻辑思考实际，不能从理论上分析、说明在普通逻辑思考中会经常出现的一系列关于“必然”、“可能”的推理。在名词演算 ***Cn*** 系统中，$\boldsymbol{A}\rightharpoondown\boldsymbol{B}$ 中的$\rightharpoondown$（若……，则……）既可解释为 2 元的充分条件关系，同时又可解释为 2 元的“必然联系”（因为这二者事实上同义）。而不可逐一列举域上的事件间的内涵本质联系和内涵根基又能内涵地、一揽子地（绝非外延逐一列举地）确定 $\boldsymbol{A}\rightharpoondown\boldsymbol{B}$ 为有就是其任意闭例 $\boldsymbol{A}'\rightharpoondown\boldsymbol{B}'$ 为有，故而事件的客观的逻辑结构中并无与以往的逻辑学理论中外延列举“量词”相对应的逻辑要素，因此，唯事实是重的 ***Cn*** 系统不采用外延列举“量词”，由$\rightharpoondown$关系对在其前后件 **A**、**B** 中共同自由出现的个体变元实施约束，且在 **A**、**B** 中共同出现（从而被$\rightharpoondown$约束）的个体变元可用任意项（包括个体常项）置换。这些特征决定了 ***Cn*** 不仅与正统的 **F** 殊异，而且与任何引入外延列举量词的非正统数理逻辑（如模态逻辑、相干逻辑等）殊异。尽管如此，然而 ***Cn*** 却始终追踪事实，从而切合普通逻辑思考实际。在本书中详细展开的基于 ***Cn*** 并加以发展的章节就充分显示了上述事实。

鉴于在自然语言（又称民族语言）中俯拾皆是、随处可见的同义（多种语言结构指谓相同客观逻辑结构）、歧义（一种语言结构指谓多种客观逻辑结构）现象（统称为“多对多”这个事实），从而在逻辑科学中像在化学中那样，采用符号排列结构与客观逻辑结构严格一一对应的符号语言（又称人工语言），这就仿佛在化学中采用符号排列结构与物质的分子中元素排列的客观化学结构严格一一对应的化学符号（因为，在自然语言的语言结构中根本看不出为其指谓的物质的客观化学结构）一样。

以实数为论域 U，将 U 一分为三：正实数 $P(p)$、0、负实数 $Q(q)$，括号中注明其共仅属性代号 p、q（即 1 元关系号）。显然，有如下页表格所述的事件和读法（以“$<$”表示 2 元关系“小于”）。

从上述事实（我们的讨论只依据事实，而不顾历史上的“权威”曾经说过什么；我们的困难在这里，然而我们的希望也在这里）可以看出：

（1）作为孤立的一个事件，$<(x,0)$ 可以为有，也可以为无（视 x 在实数域中的取值而定），然而，无所谓“必然”、“必然不”（即“不可能”）、“可能”与否；可见，作为联结关系，“模态关系”事实上不是 1 元的。

符号表达式	同义的自然语言读法
$p(x)\rightharpoonup\neg<(x,0)$　　(a)	x 是正实数,必然,x 不小于 0。(a_1)
	x 是正实数,必然不,x 小于 0。(a_2)
	正实数必然不小于 0。(a_3)
	正实数不可能小于 0。(a_4)
$q(x)\rightharpoonup<(x,0)$　　(b)	x 是负实数,必然,x 小于 0。(b_1)
	负实数必然小于 0。(b_2)
$\neg[U(x)\rightharpoonup\neg<(x,0)]$ (c)	并非:x 是实数,必然,x 不小于 0。(c_1)
	x 是实数,不必然,x 不小于 0。(c_2)
	x 是实数,不必然不,x 小于 0。(c_3)
	x 是实数,可能,x 小于 0。(c_4)
	实数可能小于 0。(c_5)

(2) 同一事件 $<(x,0)$ 作为后件,对于不同的前件 $p(x)$、$q(x)$、$U(x)$ 来说,其间的不同的模态关系分别为“必然”、“必然不”(即“不可能”)、“可能”;这就是说,“模态关系”事实上确实是 2 元的,当一个本身无所谓“模态”的事件作为后件时,对于不同的前件可以具有不同的“模态关系”。

(3) 尽管复合事件(a)、(b)、(c)在自然语言表述中可分别简化为(自然语言崇尚简约)简单句(a_4)、(b_2)、(c_5),然而,这只是自然语言的语言结构并不与为其指谓的事件的客观逻辑结构严格对应的语用现象(正由于此,当代形式逻辑语用学要“撇开语言抓客体”);历史上出现过的种种“模态逻辑”将“模态词”处理成 1 元的,可能是受上述语用现象的迷惑(其根源可能是认为逻辑就是研究语言而不顾及客体的)。

在 ***Cn*** 中,不仅$\rightharpoonup$(若……,则……)可同时解释为“充分条件”和“必然联系”,从而“必然联系”是 2 元的,而且,$\rightharpoonup$不依靠外延列举“量词”即可约束同时在其前后件中自由出现的个体变元,不仅如此,那被$\rightharpoonup$约束的个体变元可用任意项(包括常项)置换(我们的困难在这里,然而,我们的希望也正好就在这里)。依据 ***Cn*** 的“限制规则”,从(a)、(b)、(c)可分别得出其例(a')、(b')、(c')(表格见下页)。

从自然语言的表述形态来看,“实数可能小于 0”(c_5)与“3 可能小于 0”(e'_0)具有相同的语言结构“s 可能 p”(传统形式逻辑往往称之为“思维形式”),而“实数”是“一般”,“3”是“个别”,于是就想当然地想从(c_5)去“得出”(e'_0)。从以上分析中可以看出:

实数可能小于 0　(c_5)指谓$\neg[U(x)\neg<(x,0)]$ (c)(为有);

3 可能小于 0　　(e'_0)指谓$\neg[p(3)\rightharpoonup\neg<(3,0)]$ (e')(为无)。

符号表达式	同义的自然语言读法
$p(3) \rightharpoonup \neg <(3,0)$ (a')	3 是正实数,必然,3 不小于 0。 (a_1')
	3 是正实数,必然不,3 小于 0。 (a_2')
	3 必然不小于 0。 (a_3')
	3 不可能小于 0。 (a_4') (“3 是正实数”可简约为“3”)
$q(3) \rightharpoonup <(3,0)$ (b')	3 是负实数,必然,3 小于 0。 (b_1')
	要是 3 竟然是负实数,那 3 就该必然小于 0 了。 (b_2') (自然语言通常是隐去明显的事实以求简约化,然而,有时也会为了说明事理而繁复化;在此语境中,鉴于在(a_3')中“3 是正实数”可简约为“3”,从而,“3 是负实数”不可简约为“3”,因此,“3 必然小于 0”(d_0')与(b_1')、(b_2')不同义,(d_0')指谓 $p(3) \rightharpoonup <(3,0)$ (d'),其在自然语言中的完整读法是“3 是正实数,必然,3 小于 0” (d_1'),(d_0')与(d_1')同义,二者所指谓的同一事件(d')为无;请注意,(d')并非(a)的例,从(a)可得出(a'),得不出(d'),此二者的后件是互相矛盾的。
$\neg[U(3) \rightharpoonup \neg <(3,0)]$ (c')	并非:3 是实数,必然,3 不小于 0。 (c_1')
	3 是实数,不必然,3 不小于 0。 (c_2')
	3 是实数,不必然不,3 小于 0。 (c_3')
	3 是实数,可能,3 小于 0。 (c_4')
	倘若 3 只是作为实数(而不考虑其为正实数),那么 3 就该可能小于 0 了。 (c_5') (鉴于在(a_4')中“3 是正实数”可简约为“3”,从而在此语境中“3 是实数”不可简约为“3”,因此,“3 可能小于 0”(e_0')与(c_1')-(c_5')不同义,(e_0')指谓 $\neg[p(3) \rightharpoonup \neg <(3,0)]$ (e')—3 是正实数,可能,3 小于 0(e_1'),(e_0')与(e_1')同义,二者所指谓的同一事件为无;请注意,(e')(前件为 $p(3)$)并非(c)(前件为 $U(x)$)的例,从(c)出发可得出(c'),得不出(e'))。

显然,(e')不是(c)的例,从为有的(c)是得不出为无的(e')的。这种把语言结构混同被其指谓的客观逻辑结构,漠视语言结构的歧义现象(相同的语言结构指谓不同的客观逻辑结构),是传统形式逻辑的弊端之一。

林邦瑾

2010 年 10 月 1 日

事实上,逻辑学从其诞生之日起从来就没有研究过人类的思维!

让人迷惑不解的是,亚里士多德自己认为人的思维是在心脏里进行的,可是后来几乎所有逻辑学论著却硬要说亚里士多德逻辑研究的是思维的逻辑形式(结构)和逻辑规律!我们为此思考了几十年,始终无法理解其中之奥妙。

美国科学院院士、当代最具影响的以研究语言哲学问题著称的分析哲学家约翰·塞尔(John Searle)在其讲演稿《心、脑与科学》(上海译文出版社2006年版)中忠实于客观事实地说:“关于人脑的功能我们所知甚少,而基于这种无知上的某些理论的矜夸造作又是如此之多。”他引用了美国神经生理学家戴维·休伯(David Hubel)在1978年说的一段话:“我们关于脑的知识处于一种极其初级程度。尽管对一些领域我们已经提出了某种功能的概念,然而其他方面,就掌握的程度而言,我们的认识几乎相当于尚未知道心脏有泵血功能时对心脏的认识水平。”迄今,人类对自己大脑思维的形式结构和规律几乎一无所知!这是胜于雄辩的铁的事实。

逻辑科学——从先贤韩非子、墨子、亚里士多德开始,始终在事实上研究的是客观世界的逻辑结构和客观世界的逻辑规律!只不过,以前的研究是自发的而不是自觉的。

龚启荣

2008年6月30日

In fact, logic has never studied human thinking since it appeared!

It's puzzling that, Aristotle considered that human thinking worked in people's heart, but later nearly all logic works said that what Aristotle studied was the logical form (structure) and logical law of thinking. We have been thinking about this problem for several decades, but still cannot understanding the essence inside.

John Searle, an academician of American Academy of Science and the most influential analytic philosopher famous for studying linguistic philosophical issues, said in his speech Heart, Brain and Science (Shanghai Translation Publishing House, 2006) according to objective facts: "we know little about how human brains work, but some theories contain so many exaggerated words based on the ignorance." He quoted a speech given by American neurophysiologist David Hubel in 1978: "Our knowledge on brain stays at the initial stage. Although we have put forward a functional concept for some fields, in other aspects, our understanding level equals to the understanding level on heart when we know nothing about the pumping function of heart." So far, human beings nearly know nothing about the form, structure and law of human thinking. This is a dry fact that speaks louder than words.

From Han Feizi, Mo zi and Aristotle, logic has always been studying the logical structure of objective world and logical law of objective world in fact. Nevertheless, the studies before are not self-conscious, but spontaneous.

Gong Qirong
June 30, 2008

目　　录

第1篇　导　　论

第3篇　当代形式逻辑 *Cm* 系统

Table of Content

Part 1 Introduction

Part 2 Logical Thinking

第1篇　导　　论

第1章　前　　言

1.1　逻辑科学在现代科学中的地位

形式逻辑，在恩格斯写《反杜林论》(1877年)和《费尔巴哈与德国古典哲学的终结》(1886年)时还被包含在哲学领域中："这样从全部以前的哲学中，还保存独立意义的只有关于思维及其规律的科学——形式逻辑和辩证法。"(《反杜林论》，第24页)尽管有一本《形式逻辑》宣称形式逻辑后来已经从哲学的怀抱中分离出来了，然而，时至今日，在所有的图书馆中形式逻辑书的目录卡片仍旧放在贴有"哲学"标签的抽屉里，而开设形式逻辑课的学校仍旧大都把教员编在哲学系中，研究形式逻辑的机构也仍旧大都隶属于哲学研究所。这种现状至少说明了形式逻辑这门古老学科发展的迟缓。虽然已经有了形式逻辑早就成长到足以离开哲学的怀抱而独立生存的舆论，但是实际上它与哲学的联系还是要比其他学科紧密得多。要是暂且不考虑数理逻辑，那么，传统的形式逻辑的现状确实是十分简陋贫乏的。但是，尽管如此，形式逻辑不是哲学的一部分已经是常识了，虽然在图书馆的书架上仍把形式逻辑与哲学书排放在一起，在研究院或学校中仍把从事形式逻辑的研究或教学的人员编制在哲学的研究或教学机构中。

形式逻辑是一门不同于哲学的专门学科，这种看法可以说是由来已久、获得普遍公认的了。然而，说形式逻辑不是社会科学(或人文科学)而是数学的一部分，这还是近二、三十年来才有的观点。我们摘引两段文字来介绍一下持有这种观点的人的一种看法："所以，天、地、生、化四门基础科学，从现代科学技术体系的观点讲，都可以归结到物理和数学。根本的基础科学，就是研究物质运动基本规律的物理，加上数学工具。数学不只是演算，也包括逻辑的推理过程。靠六门基础学科的现代工程技术，也靠物理和数学这两门基础作为支柱。所以物理和数学也可以称为现代科学技术体系的基础。在此之上是天文学、地学、生物学和化学这些基础学科及各种分支学科如力学等；再上面是工程技术学科如工程结构、电力技术、电子技术、农业技术等。这就是现代科学技术的体系构成。"

"前面曾说到现代科学技术，说到底，是靠两门学问，一是物理，二是数学。

数学告诉我们如何计算数值,如何演算方程式,如何搞一般的推理。今天我们必须说在这三个数学的功能方面我们有了一种高效能的机器,来帮助我们工作,这就是电子计算机,特别是电子数值计算机。”(人民日报 1977 年 12 月 4 日第二版,钱学森.《现代科学技术》)

以上述引文为根据,可得出现代科学技术体系的结构层次示意图(一),如图 1.1 所示。

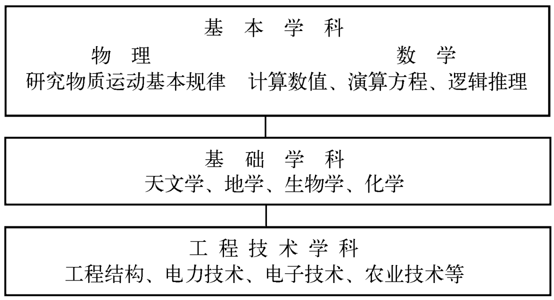


图 1.1 现代科学技术体系的结构层次示意图(一)

图 1.1 所示的示意图中出现的词语除“基本学科”外都是在上述引文中出现过的。我们称引文中的“基础学科的支柱”为“基本学科”,所谓“基本”指的是“基础的支柱”。

我们知道,除了近来有人认为逻辑是数学的一部分之外,还曾经有人认为数学是逻辑的一部分。自从德国的数学家、哲学家莱布尼茨(G. W. Leibniz,1647—1716)在 17 世纪中叶提出用数学方法处理逻辑问题——系统地采用通用的符号语言进行逻辑演算的设想以后,两个世纪以后,英国的数学家、逻辑学家布尔(G. Boole,1815—1864)才第一次构造出一种可以解释为重言的命题逻辑的抽象代数系统——后来称为“布尔代数”或“逻辑代数”。继此之后,德国数学家、数理逻辑家弗雷格(G. Frege,1848—1925)提出了弗雷格原理:“复合命题的真值完全取决于它的支命题的真值,是它的支命题的真值的一个函数”(这就远离了普通逻辑思考实际,和传统逻辑分道扬镳,因为,在传统的假言推理式、选言推理式中出现的假言命题、尽举的选言命题的真值并不完全取决于其支命题的真值),并以弗雷格原理为指导思想构造了第一个命题演算的公理系统,还草创了谓词演算。弗雷格毕生从事建立算术的形式化公理系统,努力在逻辑中推导出全部算术。英国哲学家、数理逻辑家罗素(B. Russell,1872—1970)建立了完整的、自足的两个演算的形式化公理系统——命题演算和狭谓词演算的形式系统,并进一步深化和发展了弗雷格的逻辑主义理想:把所有的数学概念都归结为算术概念,而算术概念则用逻辑概念来定义,从而由他完善地构造的逻辑演算公理系统推导出算术,进而推导出全部数学。《数学原理》(1910—1913,共出三卷,与怀

特海合著)就是为上述目的写作的,然而却不曾实现,在从数理逻辑公理推导算术的尝试过程中就不得不引用两条非逻辑公理(选择公理和无穷公理),而原本打算推导出几何的第四卷则未能完成。尽管《数学原理》不曾实现把数学划归为数理逻辑这种不可能实现的目标,然而,却因此强化了正统的数理逻辑的数学化倾向,使得它完全背离了传统的形式逻辑的把推理格式当做从已知获取新知的工具这种主导思想,专门从事于研究真值函数和个体-真值函数的构造和性质,终于发展成一门特殊的离散数学。

从上述对数理逻辑发展过程的鸟瞰式的回顾中可以看出,在用数学方法处理数学里的推理论证的尝试中产生了数理逻辑的萌芽;在建立起严格的、自足的两个演算以后,企图把全部数学纳入羽翼初丰的数理逻辑的顽强而又无望的努力过程中,不曾从数理逻辑出发构造出全部数学,而数理逻辑自身却终于在事实上成为数学的一个特殊的分支——鉴于研究元数学问题从而给数学的各个分支提供共同基础的基础数学。

事实上发展成为一门离散数学的正统的数理逻辑确实是数学的一部分。然而,鉴于最终发展成为数学的一个分支的正统数理逻辑在产生之日起就舍弃了普通逻辑思考中使用的推理格式的从已知获取新知这个最根本的逻辑性质,从而就和植根于普通逻辑思考的传统形式逻辑分道扬镳。正由于此,以普通逻辑思考中的推理格式(从根本上说不同于真值函数、个体-真值函数)为主要研究对象的传统形式逻辑并不会随数理逻辑一起成为数学的一部分。在普通逻辑思考的推理格式中出现的最重要的逻辑关系是不能用真值函数或个体-真值函数关系刻画的充分条件关系,不是数学的研究对象。在充分条件关系的前、后件中出现的真值函数、个体-真值函数关系只不过是起辅助作用的次要因素。独立地看,真值函数、个体-真值函数关系是函数关系,是数学的研究对象。然而,由于最重要的逻辑关系充分条件关系并非函数关系,不是数学的研究对象,而是逻辑的研究对象,因此,在充分条件关系的前、后件中作为辅助的次要因素出现的真值函数、个体-值值函数关系,在这种情况下也可以当做是起辅助作用的次要的逻辑关系,于是,也可以成为逻辑科学的附带的研究对象。也就是说,本身是函数关系然而又会在并非函数关系的充分条件关系的前、后件中出现的真值函数、个体-真值函数关系是数学(由于是函数关系)和逻辑(由于在逻辑关系的前、后件中出现)的共同研究对象。尽管如此,鉴于只从逻辑出发不可能构造出全部数学,而主要的逻辑关系充分条件关系又不可能纳入数学,因此,数学和逻辑互相包含不了对方,互相不是对方的一部分,而事实上只能是作为并列的两门学科。

综上所述,作为现代科学技术体系的“基础学科的支柱”的“基本学科”应为三门:物理(研究物质运动基本规律)、数学(计算数值、演算方程)和逻辑(向人

们提供作为从已知获取新知的工具的推理格式）。逻辑科学在现代科学技术体系中的地位是：和物理、数学鼎足而三的支撑现代科学大厦的“基础学科的支柱”——“基本学科”。于是得到现代科学技术体系的结构层次示意图（二），如图 1.2 所示。

基 本 学 科		
物 理	数 学	逻 辑
研究物质运动基本规律	计算数值、演算方程	逻辑推理

基 础 学 科
天文学、地学、生物学、化学

工 程 技 术 学 科
工程结构、电力技术、电子技术、农业技术等

图 1.2　现代科学技术体系的结构层次示意图（二）

1.2　传统形式逻辑与正统数理逻辑

传统的形式逻辑（简称传统逻辑）从古希腊的亚里士多德（Aristotle，公元前 384—公元前 322）至今，已有两千三百多年的历史。充分条件关系（简称条件关系）作为逻辑关系是传统逻辑的最重要的研究对象，并在事实上构成了传统逻辑体系的理论核心 —— 每一个传统的推理格式的前件事实上都是后件的逻辑的充分条件。众所周知，条件关系不是真值函数关系。故而，条件命题（亦称假言命题）的真假不取决于其前、后件的真假，而取决于这之间是否存在条件关系。因此，条件命题的真值与其前、后件的真值之间的关系并不是函数关系。事情甚至是，条件命题的真假必须在无须依据其前、后件的真假的情况下确定，而作为真值函数的纯真值复合命题（如蕴涵命题）的真假却完全取决于支命题的真假。所以，传统逻辑中的条件命题里的联结词“如果，那么”（或者“若，则”）不是数理逻辑中的纯真值联结词实质蕴涵（简称为蕴涵）。正由于此，传统逻辑始终在事实上把建立在条件关系上的推理格式当做人类认识世界的从已知获取新知的工具。这种关于研究推理格式的深刻正确的主导思想，在传统逻辑中随处可见。下面我们从金岳霖等同志著的《逻辑通俗读本》中引用几条在传统逻辑的范围内具有广泛代表性的论述。

“推理是从一个或几个已知的判断得出一个新判断的思维过程。”

“推理的功用就在于帮助我们从已经有的知识推出新的知识来。”

“论证还有一种错误，叫做循环论证。”

传统逻辑不仅为了让推理在事实上能出新知而在理论上坚持论证不许循

环,而且还在实际上把这个深刻正确的理论观点贯彻到命题逻辑和名词逻辑的推理格式中去。事实上,传统逻辑揭举的大多数推理格式都可以用来做不循环从而能出新知的论证。然而,数理逻辑的纯真值联结词却只抽取了出现在推理式中的命题与命题之间的真值函数关系,舍弃了此外的真正的逻辑关系,从而和传统逻辑要求推理的结论对前提来说必须是新知的这种主导思想相抵触。最早系统地向我国介绍数理逻辑的金岳霖同志在 70 年前就已经注意到了这一点。

"'推论'二字在传统逻辑似有由已知到未知的意义,在现代的符号或数理逻辑中,'推论'无此意义。"

"在数理逻辑中由'赵云姓赵,赵云姓赵'这一命题可以推论到'赵云姓赵',可是这种推论没有以上的意义。"

(金岳霖. 逻辑. 北京:商务印书馆,1937:162 - 163.)

可见,从主导思想上说,传统逻辑和数理逻辑殊异。因此,尽管数理逻辑在产生和成长的过程中广泛地运用传统的形式逻辑,然而,两个演算并非传统的形式逻辑的发展,当然也不是什么现代的形式逻辑。

虽然人们都清楚条件关系并非真值函数,可是,条件关系的逻辑含义究竟是什么,直到如今还不曾彻底弄清(譬如说,不容易说清楚 $\boldsymbol{B}$ 究竟是不是"如果 $\boldsymbol{A}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 并且 $\boldsymbol{B}$"的充分条件)。这就是说,对于传统逻辑来说至关紧要的逻辑关系条件关系,迄今还没有一个公认的确切的定义,也没有一项可行的鉴别方法。于是,这种原本应由逻辑科学研究的条件关系的逻辑含义就理所当然地被视做逻辑外的"具体内容",从而被拒于正统的数理逻辑的门外;而纯真值的实质蕴涵则乘虚而入,企图名正言顺地取而代之。

时至今日,一方面坚持传统逻辑的深刻正确的主导思想;另一方面又借鉴数理逻辑的严格精密的演算技巧,充分条件关系的逻辑含义是完全可以刻画清楚的。然而,当我们回顾时,300 年前,或者 140 年前,草创数理逻辑的数学家们只有舍弃包含在条件关系中的在当时不可能弄清楚的逻辑含义这个沉重的负担,数理逻辑才能在按照弗雷格原理构造的纯真值复合命题(即真值函数)这种轻装下起飞。这种历史现象不仅是可以理解的,而且是值得赞颂的。正由于此,轻装起飞的数理逻辑就像展翅的鲲鹏,扶摇直上。倘若当初的数学家们迂腐地背负着条件关系的谁也说不清楚的逻辑含义起程,那么,数理逻辑就不可能获得如今已经取得的长足进展,而那么未说清楚的条件关系的逻辑含义也许就会永远说不清楚。这就是说,为了能够最终去确切地揭举条件关系的逻辑含义并让传统形式逻辑获得充分的发展,人们不得不先去构造彻底抛弃这个逻辑含义因而成为数学的一个分支的数理逻辑。这种欲擒故纵的曲折过程也许可以算做是人类知识发展的辩证法。

虽然数学家们在缔造数理逻辑时心存通过用数学方法处理数学中的逻辑问

题来发展逻辑科学的愿望,虽然数理逻辑在整个发展过程中始终都借助于传统形式逻辑,在研究数理逻辑的元逻辑问题时以传统形式逻辑为元逻辑的重要组成部分,而数理逻辑的辉煌成果又将回过头来为传统形式逻辑的充分发展提供强有力的数学方法,但是,这两门都称为“××逻辑”的学科由于性质的不同仍然具有原则性的区别:正统数理逻辑事实上是离散的基础数学或基础的离散数学,可是,传统形式逻辑却始终事实上是不同于数学的名副其实的逻辑科学。我们这里说的是事实,尽管有人不愿意承认这个事实。

1.3 研究当代形式逻辑的目标

作为真正的逻辑科学的传统逻辑源远流长,具有始终深深地植根于和自然语言形影不离的普通逻辑思维实际、在理论上坚持论证不许循环等深刻正确的主导思想,向人类认识提供效能卓著的从已知获取新知的工具。尽管如此,从运用清晰的符号体系和严密的推演技巧上说,传统逻辑却又显得陈旧简陋,加上若干世纪特别是近半个世纪来各种历史迷雾的干扰和污染,导致目前国内外流行的上千种传统逻辑读本皆存在使其积重难返的种种弊端。正统数理逻辑又称符号逻辑、现代逻辑、逻辑斯谛,是数学家们缔造的采用形式语言的用数学方法处理数学中的逻辑问题因而舍弃了其中的非数学因素的学科,是数学的一部分;而传统形式逻辑则是以结合自然语言的作为从已知进入新知的工具的推理格式为主要研究对象。鉴于数学家们构造数理逻辑的目的是解决数学基础问题,并且,为了其中全面、彻底地贯彻数学方法,因而,舍弃了推理中出现的命题间的关系中的非数学的逻辑含义,而将其处理成真值函数、个体-真值函数关系,这就完全背离了传统形式逻辑要求推理的结论对前提来说必须是新知的这种主导思想。正由于此,在一部分研究数理逻辑的人和一部分研究形式逻辑的人之间存在着下述有时甚至是非常动感情的对立:前者由于传统形式逻辑的陈旧简陋而将其当做新兴的数理逻辑的微不足道的局部;而后者则由于数理逻辑无视在作为从已知进入未知的工具的推理格式中起决定作用的非数学的逻辑含义而将其当做与普通的逻辑思考格格不入的异端。植根于普通逻辑思考的传统形式逻辑从演算技巧上看是陈旧简陋的,然而,它始终如一地贯彻不允许循环论证,并为此在事实上全面地坚持推理的结论对前提来说是新知,这种概括了在普通逻辑思维实际中运用的推理格式的最根本逻辑特征的主导思想是深刻而又正确的;采用高度发展的数学方法、以命题演算和狭谓词演算为基础的正统数理逻辑的演算技巧是严格精密的,可是,它舍去了在作为从已知进入新知的工具的推理格式中起决定作用的非数学的逻辑精髓,把命题逻辑、名词逻辑推理格式处理成本质上是同语反复的恒真的真值函数(重言式)、恒真的个体-真值函数,

因而远离了普通逻辑思维实际。二者各有所长,也各有所短。这就有必要让二者有机地结合(而不是机械地混合、牵强地凑合、生硬地捏合)起来,互相取长补短。

本著作的研究立足于辩证唯物论,继承我国先贤韩非研究客观世界逻辑结构和逻辑规律的思路,坚持传统逻辑真正的逻辑科学方向,摒弃传统逻辑的各种积弊,尽力廓清笼罩在它身上朦胧的历史迷雾,在不背离其主导思想从而不会发展成为数学的一部分的先决条件下,借鉴现代数学精确的演算方法,去探讨具有当代科学水准的当代形式逻辑。著作在研究构造两个堪称真正逻辑科学的当代形式化公理系统、揭举并证明两个无穷多条客观世界的逻辑定律的基础上,近十年来又揭举了崭新的逻辑联结关系——由充分条件关系(即2元的"必然"关系)定义的2元的"可能"、"偶然"、"风马牛"关系(见19章"关于 ***Cn*** 系统的讨论(三)——***Cn*** 的无限风光:更精彩的形式定理")——从而得出并严格证明了中外逻辑史上从未发现过的7个逻辑方阵计百来个崭新逻辑推理。这一系列崭新成果构成了人工智能的基础理论。

为了增强我国的经济、军事实力,本著作第二个目标是:研究当代形式逻辑在人工智能中的应用理论。其应用前景是不可估量的。

(1) 国际人工智能界"认知模拟"、"人机合一"的方针绝对不可实施。

人工智能,无论是作为一门科学理论还是一种物质装备,都起源于20世纪中叶的美国,仅有50多年的历史。前十几年发展迅速,后来逐渐陷入困境。起初,踌躇满志的美国专家们曾兴高采烈地宣称:"在20年之内,人能做到的事,机器将能完全做到。"(西蒙. 人与管理自动化形式. 1966年纽约版,第96页.)过了20多年,按照西蒙"认知模拟"(用机器来模拟人的思维功能)的途径实现他的预言的前景却显得十分渺茫,有不少人甚至开始表示绝望。因此,1987年在美国召开的第七届国际人工智能讨论会闭幕式上,会议主席在总结报告中声称:"人工智能已经死了!"其症结何在?一句话,用机器来模拟人脑的思维功能——这个根本性、原则性、方向性的理论失误,使人工智能陷入难以自拔的困境。因为,按照这种"认知模拟"的指导理论,势必迫使人工智能探索者面对两个在可预见的将来无法获解的莫测高深的谜:人脑思维功能的微观机制是什么?又如何用机器来模拟?从20世纪80年代开始,国际上不少清醒的人工智能专家开始意识到数字计算机在早先认定的"认知模拟"中不可克服的局限性,把视线转向以将人脑细胞活动信息直接加到数字计算机控制线路中去为目标的脑科学研究。这个研究方向的最终目标是实现"人机合一"(将人的大脑与计算机连接)。2000年11月15日,美国杜克大学 Miguel Nicolelis 博士宣称:在北卡罗来纳州的杜克大学实验室,成功地用猴子的脑部信号来控制机器人手活动。国际人工智能专家把视线从"认知模拟"转向作为其继承者的"人机合一"

后,这个承前启后的研究方向确实获得了一些成就。这又一次鼓舞了国际人工智能专家们,再度踌躇满志、兴高采烈地重谈39年前美国人西蒙的旧高调。英国的凯文·瓦维克教授在他的《机器的征途》中又一次宣称:“到2050年,机器将取代人类,成为这个世界的主宰,而人类将丧失最终的智力优势。”提请注意:对失去了上肢后的猴脑是否还依旧能控制机械手做出摆动、握物等原本与健全猴臂同步的动作、电子芯片能否植入人脑等尚未获解的难题,我们暂且不论,姑且认为这些都能圆满解决。然而须知,中枢神经对机体的控制、反射,这种功能几乎为任何动物所具有的,这与至少须是理智的人类才具有的智能有着根本区别:人脑能控制肢体运动,这仅仅是人类作为动物的本能,决非作为智慧动物的人类的智能。英国人凯文·瓦维克的这一次预言是否会重蹈39年前西蒙的覆辙?我们的回答是肯定的。可以预测:等到2050年,即使真的有了“人机合一”机器,不用说绝不会超过人的全部智能,连人的全部本能(如控制肢体运动)也超过不了。

(2)到目前为止,当代形式逻辑是人工智能最合适的理论基础。半个世纪来获得迅速发展的外延电子数字计算机的最根本的特征是:以模拟真值函数的与、或、非门作为硬件基础元件,故而,从静态看,任一状态都是一个由“0”、“1”组成的有限序列;从动态看,每一次运算仅仅是通过二值的加法运算从一个“0”、“1”的有限序列变换到另一个“0”、“1”的有限序列。外延电子数字计算机在元件的理化状态、运算速度等方面的进展都丝毫改变不了取决于作为基础元件的与、或、非门的上述根本特征,因此,不可能具有从已知得出新知这种作为人类智能基本机制的功能。未来的真正的人工智能的基础装置的核心元件是从根本上区别于与、或、非门,输入与输出之间不是任何函数关系的“必然门”,而与、或、非门仅仅是起大量存储、快速检索信息这种辅助作用的次要组成元件。当代形式逻辑已清楚地刻画必然门的逻辑性质,为研制必然门从而进一步设计、制造内涵智能机提供了重要逻辑理论基础。汲取英法联军火烧圆明园的历史教训,排除干扰,当机立断,对第五代工具——内涵智能机迅速投入力量,付诸工程实施,以使我国在经济、军事实力上发生质的变革,取得国际领先地位。我们希望第一台内涵智能机首先在中国大地上研制成功,在激烈的生死攸关的国际竞争中夺取胜利。

1.4 当代形式逻辑的研究领域、哲学思想和理论观点

每一门学科的内容都有三个方面:① 所研究领域内的基本的事实与规律;② 一定的哲学思想;③ 以基本的事实与规律为依据,以一定的哲学思想为指导,系统地提炼出来的理论观点。当代形式逻辑所研究的领域是:现实世界的对象域上的个体、集、1元或多元函数、1元或多元关系、关系间的真值函数关系、关系间的充分条件关系和上述客观关系的客观规律,以及它们在意识中的反

映——概念(或词)、命题和推理。这中间,当代形式逻辑以关系间的充分条件关系为研究的核心,其余的一切都围绕这个核心,为透彻地研究这个核心服务。由于在关系间的充分条件关系的前、后件中会出现1元或多元关系、真值函数关系,而在这两者中会出现个体、1元或多元函数,因此,为了研究充分条件关系,当代形式逻辑也就必须附带研究会在其前、后件中出现的个体、1元或多元函数,以及1元或多元关系、真值函数关系(这些构成数理逻辑的主要研究对象),作为一种次要的辅助。当代形式逻辑的哲学思想为辩证唯物论。当代形式逻辑的最重要的理论观点是:推理式是现实世界的个体间、类间、个体与类间的一元或多元关系间的充分条件关系的规律在意识中的反映,是人类在认识世界过程中从已知获取新知的初等工具。

由于存在于现实世界的事件 ***A***(黑斜体表示事件,黑正体表示命题)与 ***B*** 之间的充分条件关系具有下述特征:不管 ***A***、***B*** 本身的有无,有 ***A*** 必有 ***B***,无 ***B*** 必无 ***A***,因此,在人们认识了这种充分条件关系后,就获得了一种独立于以 ***A***、***B*** 为原型的命题 **A**、**B** 本身的真假的方法去确定 **A** 真、**B** 必真,**B** 假 **A** 必假。这种可独立于命题 **A**、**B** 本身的真假确定(即具有第一独立性)的命题 **A**、**B** 的真假间的必然联系在当代形式逻辑中称为充分条件关系。在人们独立于 **A**、**B** 的真假确定了命题 **A**、**B** 间有充分条件关系后,只要人们确定了 **A** 真,就可以由之去确定本来未确定的 **B** 为真;只要人们确定了 **B** 假,就可以由之去确定本来未确定的 **A** 为假(这就是第二独立性)。

命题 **A**、**B** 的充分条件关系是其原型现实世界的事件 ***A***、***B*** 间的条件关系在意识中的反映,在本质上区别于真值函数关系,因而从根本上说是非数学的。这是事情的一个方面,然而,事情还有另一方面。在本质上是非数学的充分条件关系及其规律可以采用数学方法进行处理,这就像在本质上是非电的物理量(如距离、温度等)可以采用电的方法来量测一样。不过,当我们在采用数学方法来处理非数学的充分条件关系时,不能为了追求数学上的"纯"而舍弃充分条件关系中的非数学的本质——能独立于前、后件的真假确定因而给从已知获取新知提供了依据。这也正像在采用电的方法来量测非电的物理量(如距离、温度等)时不能为了追求电学上的"纯"而舍弃距离、温度等非电物理量的非电的本质一样。"非电量的电量测"这门学科妥善地解决了在保持非电物理量的非电的本质的条件下采用电的方法对其进行量测。当代形式逻辑则试图探索在保持逻辑推导的非数学的本质的条件下采用数学的方法对其进行分析。

当代形式逻辑采用数学方法研究作为从已知获取新知的初等工具的演绎推理格式;而推理是由命题组成的,命题是由概念(或词)组成的,因此,当代形式逻辑也探讨在推理中出现的命题和概念(或词)。

1.5 逻辑科学的定义

时至今日,关于逻辑竟有一百多种不同的定义。众所周知,逻辑的定义对逻辑的研究对象做出了规定。迄今,关于逻辑的研究对象尽管众说纷纭,然而,归根结底,归结起来不外三大家:思维说(认为逻辑研究思维)、符号说(认为逻辑研究泛指自然语言、人工语言的符号)、客体说(认为逻辑自诞生以来事实上研究的是客观世界)。

至今,在国内的传统形式逻辑界,思维说几乎占有排斥一切的主导地位。在国内流行的传统形式逻辑读物中,尽管对形式逻辑的解说各有千秋,然而,有一点却是共同的:形式逻辑的主要研究对象是思维形式(或称形态、结构等)及其规律。如果说,逻辑的思维说是源远流长、古已有之的,那么,逻辑的符号说则是在现代兴起的时髦流派,其代表人物可推美国哲学家皮尔士(C. S. Peirce)和卡尔纳普(R. Carnap)。在皮尔士看来,"逻辑是一种关于记号的理论","研究关于记号、特别是符号的必然的一般规律的科学"。而卡尔纳普则断言:"逻辑只是按着一定规则来运算的符号系统,在任何地方都不涉及这些符号的意义,而只涉及这些符号的种类,以及这些符号所遵循的形式演算。""逻辑的研究既不涉及作为心理活动的思想,也不涉及思想的内容,只涉及语句。"在逻辑的符号说的坚决而又起劲的鼓吹者卡尔纳普看来,当涉及表述思考的自然语言或人工语言的语句时,"只涉及语句",而并"不涉及作为心理活动的思想",可见,在人类头脑中进行的思想与其语言载体截然不同。如今,摩登的符号说风靡欧美、日本等地,对我国时兴的自然语言逻辑学派也产生了深远的影响。尽管逻辑的符号说学派的是非功过尚有待于历史的评说,可是,有一点在现在就应强调指出:彻底地分清了在人类头脑中进行的思维和作为思维的一种常用的物质载体的符号(泛指自然语言、人工语言)的根本区别,从而坚决地认定逻辑在事实上不曾研究过思维本身,则是这个现代的逻辑流派对逻辑科学当代发展做出的重大贡献。逻辑的符号说所面临的想回避也回避不了的尖锐问题是:人类依据什么去构建"这些符号的种类"及"这些符号所遵循的形式演算"? 而"符号的必然的一般规律"仅仅是为人类所构建的符号本身所固有的还是另有符号之外的客观依据?

只有逻辑的客体说才能直面上述尖锐问题,并对其做出确切回答。

除了希腊、印度之外,我国是世界三大逻辑发源地之一。远在百家争鸣的春秋战国时期,我国就产生了研究关于包含客观的多元关系(比德国的弗雷格的多元谓词逻辑早两千多年)的客观世界的逻辑结构和逻辑规律的光辉灿烂的古代中国逻辑。在群星闪耀的众多先秦中国逻辑学家中,最耀眼的几颗巨星当数韩非、墨翟、荀况、公孙龙等。《韩非子·难一》里的寓于生动故事中的对不自相

矛盾律等的客观世界逻辑规律的揭举可谓家喻户晓、老幼皆知:“夫不可陷之盾,与无不陷之矛,不可同世而立。”——事实上满足“不可陷”的盾和满足“无不陷”的矛这样的两件事物,在客观世界里不可能同时并存。这彪炳古今的辉煌的唯物主义的逻辑思想照亮中国乃至世界的逻辑科学的发展途径。

当代形式逻辑继承、发展我国先秦逻辑学家的唯物主义逻辑思想,更高地、更坚定地举起了作为当代的逻辑客体说的指导思想——辩证唯物主义大旗,明确宣称:当代形式逻辑的语义学的研究对象是以客观事件间的客观条件关系(即刻画清楚后的充分条件关系)为核心的客观世界的逻辑结构和逻辑规律。在人类(因此包含为人类所特有的思想)诞生前和消失后,无始无终而又无边无涯地客观地存在着、变化着、发展着的宇宙有按照客观的逻辑规律从原有事件必然过渡到新事件的运演能力,人类的逻辑思考只不过是对宇宙的这种客观的运演能力的以脑神经元搭接的方式实现的正确摹写,而用来留久传远的相应的自然语言或人工语言只不过是表述在人类头脑中进行的思想的常用物质(声音或笔画)载体。如此而已。可见,在这里,存在着互有紧密联系然而又有根本区别的三者:客观的宇宙的客观的逻辑结构和逻辑规律(客体)、在人类头脑中进行的逻辑思考(思想,对客体的摹写)、自然语言或人工语言(表达思想的常用物质载体)。正由于此,当代形式逻辑除了作为体系主干的语义学之外,尚有作为旨在用来透彻无误而又完备无缺地进行语义研究的人工语言工具的语构学——研究刻画客观的逻辑结构和逻辑规律的人工语言的机械排列结构和变形规则;以及沟通逻辑理论和应用实际的语用学——研究以指谓同一为准则的自然语言与人工语言的互相翻译,以便全面而又确切地揭举为人们所喜闻乐见的客观的逻辑结构和规律的自然语言表述形态。因此,在坚持辩证唯物论的当代形式逻辑看来,逻辑科学的定义是:采用可按指谓同一的准则与自然语言互相翻译的(语用学)人工语言的机械排列和变形的方式(语构学)研究以客观事件间的客观的条件关系为核心的客观世界的逻辑结构和逻辑规律(语义学),从而向人类提供研究宇宙的从已有事件向新事件必然过渡的普遍适用的从已知进入新知的工具。

这样,在一百多株关于逻辑的定义之林中,又增添了一株洋溢着逻辑的客体说的葱郁色彩的新树。究竟谁能长成参天的巨株?请看无情然而又有规律地演进着的历史!“真理是时间的儿子,不是权威的儿子”(伽利略)。

逻辑思潮层出不穷,逻辑探索继往开来。沿着逻辑发展史的长河极目远眺,在逻辑的王国里正可说是:“大泽龙方蛰,中原鹿正肥。”终究鹿死谁手?尚请拭目以待。

第 2 章　当代形式逻辑语义学基础

2.1　客观世界的集
——兼对所谓“罗素悖论”的剖析

2.1.1　对象、个体与集

对象就是可以对之思考的一切。实物是对象，性质、关系也是对象；物质是对象，意识也是对象。意识只不过是人脑这个高度发展了的实物的属性，一经产生，便可以对之思考。然而，尽管如此，正在进行的思考却不可能以自身为思考对象。这个事实称为思考的不自返律。当然，某个思考一经完成，另起的思考便可以以之为对象。

在思考时不对其进行分解的单个对象称为个体。譬如，当人们在做各种不同的思考而分别以银河系、地球、大兴安岭森林、一棵树、一个细胞、一个分子、一个原子、一个电子等为不对其进行分解的单个对象时，银河系、地球、大兴安岭森林、一棵树、一个细胞、一个分子、一个原子、一个电子等就分别是个体。通常以斜体小写拉丁字母 e、右上角加撇 e' 或右下角加下标 e_i（i 为自然数）表示个体。人们在讨论问题时，不可能从嘴里说出一个个体月亮，也不可能在纸面上放上一个个体国家，而只能使用表示个体月亮或国家的符号。在当代形式逻辑语义学的范围内，使用符号只不过是手段，讨论为符号所指称的个体才是目的。宇宙在结构层次上没有最小的不可再分的起点，然而，人们对宇宙结构层次的认识却必须有也只能有一个起点。个体就是当代形式逻辑语义学研究宇宙的结构层次的起点。

集就是由有限或无限个个体组成的组合、总和或整体。譬如，由一间屋子里的家具组成的集、由星球组成的集，而一部机器则是由全部零件组成的集。以斜体大写拉丁字母 P、Q、R、S，加撇或下标表示集。集有时也称为集合。组成一个集的个体就称为该集的元或元素。以 $e \in P$（读做“e 属于 P”）表示 e 是 P 的元；以 $e' \in P$（读做“e'不属于 P”）表示 e'不是 P 的元。集由其全部元唯一地确定——这称为集的外延原则。

关于集的语言表达，除了采用列举法和一般元法外，为了阐述方便，还采用在“集”字之后将表示某集的那个语词写在圆括号之内。例如，集（人）就表示人

这个集合。

2.1.2 集的共仅属性

为集 P 的任意元所共有的属性称为集 P 的共有属性;只为集 P 的元所仅有的属性称为集 P 的仅有属性。集 P 的共仅属性 p 就是既是集 P 共有的又是集 P 仅有的属性。集的共仅属性就是把任意具有它的个体连接起来,而又把此外不具有它的一切个体排除出去从而构成一个集的那种属性。集 P、Q、R、S 的共仅属性,分别以斜体小写拉丁字母 p、q、r、s,加撇或下标表示。进行新陈代谢是集(人)的共有属性,会说汉语是集(人)的仅有属性。集(人)的共仅属性可以举出很多,譬如,动物的属性与下述各属性组加在一起就分别都是:①能制造工具的(富兰克林);②具有第二信号系统的(巴甫洛夫);③上下各四截齿,左右各一犬牙,其身直立的(李尼亚);④两手、胎生的(古维尔);⑤过社会生活的(亚里士多德);⑥天地之性最贵者也(许慎);⑦不仅改变自然所给予的形式,而且在自然所给予的形式之间实现了自己的目的(马克思)。若不同的属性 p_1、p_2、…、p_k 都是集 P 的共仅属性,则称这 k 个共仅属性关于 P 互相对当,并简称为相当。互相对当的不同的共仅属性具有不同的逻辑功能,真正的逻辑科学必须加以区分。不能认为,当在一个命题中出现的表述共仅属性 p_1 的名词换以表述与之相当的不同的共仅属性 p_2 的另一个名词后,命题的意义和真假不会改变。譬如,“富兰克林知道人是能制造工具的动物”为真,然而,“富兰克林知道人是具有第二信号系统的动物”却为假,因为他事实上并不知道。不区别互相对当的不同共仅属性的纯外延的正统数理逻辑不是真正的逻辑科学。集 P 及其共仅属性 p 都是客观的,不以人的认识和意志为转移。人可以认识集 P 及其共仅属性 p,但不能向壁虚构。人们可以设想或说出关于某种性质的思想,但此种性质未必存在;当此种性质实际上并不存在时,有关的思想只不过是无所指谓的空想,绝不是什么共仅属性。康托尔的集合论“概括原则”指出,对于任意给出的一项性质 p,必定存在一个以 p 为共仅属性的集 P。这显然不能成立,因为,意识决定不了存在。

2.1.3 集的性质

任意的集皆具有下述性质。

(1) 元的单一性。一个个体就是一个个体,因此,任一属于集的个体只能在集中出现一次;一个个体在一个集的一个地方出现后不能再在同一个集的其他地方出现。

(2) 元的无序性。集的元可以在集中以任何顺序排列起来,两个组合相同然而元的排列不同的集被当做同一个集。一个班的学生构成一个集,无论他们坐在教室里还是排列在操场上,尽管排列顺序不同,然而仍然是同一个集。

（3）个体与集的相对性。个体与集是相对而言的。个体本身也可以是由其他低一层次的个体为元组成的集；集也可以成为组成其他高一层的集的个体。个体相对于由其组成的集来说才是个体；集相对于组成它的个体来讲才是集。

（4）集的排己性。又称为集的不自属性。任一集都不以自身为元，即任意的集都不属于自己。客观世界不存在 $P \in P$，客观世界只存在 $P \notin P$。

（5）属于关系的不矛盾性。同一个体 e 不可能既属于又不属于同一个集 P。就是说，$e \in P$ 和 $e \notin P$ 不能并存。这又可称为属于关系的不矛盾律，是客观世界的一种规律。

（6）属于关系的排中性。同一个体 e 不可能既非属于又非不属于同一个集 P。就是说，$e \in P$ 和 $e \notin P$ 不可能皆无。亦即，$e \in P$ 和 $e \notin P$ 至少有一存在。这是客观世界的一种规律，可称做属于关系的排中律。

（5）、（6）合起来可称为属于关系的选一性。就是说，同一个体 e 和同一集 P 的属于关系一定是且只能是下述二者之一：$e \in P$、$e \notin P$。可称为属于关系的选一律。

2.1.4　集的分类

集按其元是否存在可分为实集和空集；实集按其元的数量为无限或有限又可分为无限集与有限集；有限集又可进一步按其元的数量是多于一个或只有一个而分为多元集和单元集。无限集与多元集可以合称为普遍集，单元集又称为单独集。集的分类如图 2.1 所示。

1. 实集

有元的集称为实集。例如，由中国名山组成的集就是实集；由象棋大师组成的集也是实集。

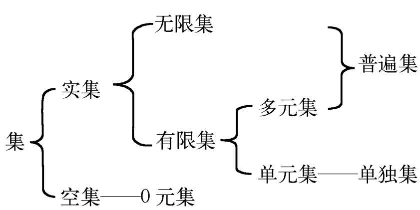


图 2.1　集的分类

实集分为无限集和有限集。

由无限多个个体组成的集称为无限集。例如，宇宙中的星球组成的集、自然数组成的集，都是无限集。宇宙中的星球这个集，人们虽然用电子天文望远镜可以观察到组成它的数以亿万计的个体，但茫茫的宇宙无尽无涯，人们是无法穷尽

地观察完它的个体的；自然数这个集，从人类开始使用组成它的个体以来，至今没有穷尽，而且永远也不会穷尽，所以它们都是无限集。

由有限多个个体组成的集称为有限集。例如，中国的直辖市这个集，它只有北京、天津、上海、重庆这四个有限的个体，因而它是一个有限集；城市这个集，虽然世界上的城市数以千计，但毕竟是有限的，所以它也是一个有限集。

有限集又分为多元集和单元集。

由多于一个元组成的集称为多元集。上面举的两个例子都是多元集。

只由一个元组成的集称为单元集。例如，地球的自然卫星这个集，它只有一个元，即月球，所以它是一个单元集。

以集的元是否可逐一列举（或是否可逐一考察）作为划分的标准，又可将有限集二分为可逐一列举的有限集和不可逐一列举的有限集两类。例如前述中国的直辖市这个集就是前者；而由地球上的人构成的集就是一个不可逐一列举的有限集——对这个集的元，不仅不可逐一考察，甚至无法准确清点人的个数。例如，人口普查，一个县的人口数都难于查清楚。

2. 空集

在集的乘法、反演运算中会出现无元的空集。也就是说，空集是由集的乘法、反演等逻辑运算产生的无元之集。用 Φ 表示空集。

在实集的领域里，集的加法运算是通行无阻的——任意实集的并必定是实集。但是，在实集的领域中，集的乘法、反演运算却不是通行无阻的——实集的交或补可以不是实集，而是空集。为了让所有这些集的运算通行无阻，就必须扩大其领域，引入空集。在由实集和空集组成的领域中，集的上述三种基本运算就通行无阻——任意实集的并、交、补必定是实集或空集。可见，一无所有的空集是为了使集的某些基本的逻辑运算通行无阻的逻辑外插。

在出现空集以前，我们探讨的全都是实集。空集出现后，我们有时也探讨空集。空集和实集尽管都叫集，然而从本体论的意义上说，却有本质的区别：空集的元是不存在的，实集的元是存在的。严格来说，先有元，然后才有集。因此，无元的空集原本是不应叫做集的。然而历史上已经这样叫惯了，为了尊重历史，尊重人们的语言习惯，我们也只好暂且这么叫。不过，这里“集”这个语词是在引申的意义上使用的。

2.1.5　集与集之间的关系

1. 子集

若 P 为空集，或 P 的任意元均为 Q 的元，则称 P 为 Q 的子集。以 $P\subseteq Q$ 表

示 P 是 Q 的子集。当 P 中有元不是 Q 的元时,P 就不是 Q 的子集。以 $P \overline{\subset} Q$ 表示 P 不是 Q 的子集。例如,集(贵州人民武装干部)是集(人民武装干部)的子集,集(军人)是集(人)的子集;集(贵州逻辑学家)不是集(贵州老年人)的子集,集(逻辑研究生)不是集(妇女)的子集。

我们说,“P 包含于 Q”、“Q 包含 P”与“P 是 Q 的子集”三者同义。例如,“集(贵阳人)包含于集(贵州人)”、“集(贵州人)包含集(贵阳人)”与“集(贵阳人)是集(贵州人)的子集”这三句话的意思完全一样。

显然,任一集 P 是其自身的子集,即 $P \subset P$。当 P 和 Q 互为对方的子集时,P 和 Q 就是同一个集。即当 $P \subset Q$,且 $Q \subset P$ 时,$P = Q$。

空集为任意集的子集。即 $\Phi \subset P$。

2. 真子集

若 P 是 Q 的子集(即 $P \subset Q$),而 Q 不是 P 的子集(即 $Q \subseteq P$),则称 P 为 Q 的真子集。子集有时也称为部分,真子集有时也称为真部分。以 $P \subset Q$ 且 $Q \subseteq P$ 来表示 P 是 Q 的真子集。例如,集(军装)是集(服装)的真子集;集(德国人)是集(欧洲人)的真子集。

我们说,“P 真包含于 Q”、“Q 真包含 P”与“P 是 Q 的真子集”这三者同义。例如,“集:(人民武装干部)真包含于集(干部)”、“集(干部)真包含集(人民武装干部)”与“集(人民武装干部)是集(干部)的真子集”这三句话的意思完全一样。

一个集有多少子集,只要知道它的元有多少就能确定。0 元集(即空集)有且仅有 $2^0 = 1$ 个子集,就是 Φ 自身。单元集共有 $2^1 = 2$ 个子集,如,{梵净山}共有 Φ 和{梵净山}两个子集。2 元集共有 $2^2 = 4$ 个子集,如,{黄果树瀑布,龙宫}的子集有:Φ、{黄果树瀑布}、{龙宫}、{黄果树瀑布,龙宫}。3 元集共有 $2^3 = 8$ 个子集,如,{云南,贵州,四川}的子集有以下 8 个:Φ、{云南}、{贵州}、{四川}、{云南,贵州}、{云南,四川}、{贵州,四川}、{云南,贵州,四川};4 元集共有 $2^4 = 16$ 个子集。一般来说,n 元集共有 2^n 个子集。

请注意:$\subset$ 和 $\in$ 有原则性的区别。$\subset$ 为集与集之间的从属关系,而 $\in$ 则是个体与集之间的从属关系。例如,只能说,{黄果树瀑布,龙宫} $\subset$ {黄果树瀑布,龙宫,梵净山},不能说{黄果树瀑布,龙宫} $\in$ {黄果树瀑布,龙宫,梵净山};只能说,个体黄果树瀑布 $\in$ {黄果树瀑布,龙宫},而不能说{黄果树瀑布} $\in$ {黄果树瀑布,龙宫}。

传统形式逻辑中“概念的划分”相当于把一个集分成 k 个真子集 $P_1, P_2, \cdots, P_k$,使得 $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k = P$,并且 $P_i \cap P_j = \Phi (i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k)$。例如,把文学作品这个集分成小说、诗歌、散文、戏剧这几个真子集,使得这几个真子集

的并集恰好等于文学作品这个集,而且任意两个子集的交集都等于空集。这样,我们就能说,小说、诗歌、散文、戏剧这几个真子集是对文学作品这个集的一种划分。

传统形式逻辑要用好几页表述“概念的划分”,而这里只用了几行字,并且更加准确。更为重要的是,概念是不能划分的,人们对它划分的是由客观事物组成的集。

3. 幂集

若 R 以 Q 的任意子集为元组成,则称 R 为 Q 的幂集。通常以 $R=P(Q)$ 表示 R 为 Q 的幂集。设 $Q=\{1,2,3\}$,则 $R=P(Q)=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。若用一般元刻画法,$Q$ 的幂集可表示为:

$$P(Q)=\{x \mid x\subset Q\}$$

当 Q 为 n 元集时,$P(Q)$ 为 2^n 元集。正由于此,称 $P(Q)$ 为 Q 的幂集。幂集的元的个数按幂指数增长,其速度非常惊人。当 Q 为 20 元集时,幂集 $P(Q)$ 即为 1 048 576 元集。通俗地说,集 Q 的元的个数称为 Q 的基数。显然,$2^n>n$,亦即,Q(n 元)的幂集 $P(Q)$(2^n元)的基数大于 Q 的基数。这个对于有限集必定成立的定理,对于无限集也成立。这就是康托尔定理。

请注意,我们在这里需要顺便讨论的重要问题如下所述。

4. 对所谓“罗素集合论悖论”的剖析

所谓“罗素集合论悖论”,又称“集合论悖论”或“罗素悖论”。

1902 年,罗素在巴黎召开的国际逻辑会议上公布了他“发现”的集合论悖论,顷刻之间,使数学界大为震惊!据说,从此,数学便处于所谓的“第三次危机之中”。

罗素(Berttand Russell),英国大名鼎鼎的数学家、哲学家、逻辑学家。他“发现”集合论里出现了悖论,出现了 $\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}$ 这样的奇怪东西,其影响之大,竟然“使数学处于第三次危机之中”!

为了便于更多的读者阅读,关于罗素悖论,我们尽量通俗地阐述和讨论。

罗素想出的集合,他用 R 表示。他给这个集合 R 定义为:

$$R=\mathrm{df}\ \{x \mid \neg(x\in x)\}$$

通俗地说,这个 R 就是:一切不自属之集之集。

“自属”就是指:自己属于自己,或者说自己是自己的元素,即 $R\in R$。

“不自属”就是指:自己不属于自己,或者说自己不是自己的元素,即 $\neg(R\in R)$。

罗素想出这个集合 R 之后,他问:$R\in R$ 吗?

罗素回答道：① 如果 $R \in R$，那么就能推出 $\neg(R \in R)$；② 如果 $\neg(R \in R)$，那么就能推出 $R \in R$。

请看，这里出现了一对矛盾命题互相推出的现象，即：

$$R \in R \rightleftharpoons \neg(R \in R)$$

如果用 **A** 表示 $R \in R$，则 $\neg$**A** 就表示 $\neg(R \in R)$，于是就得：

$$\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \mathbf{A}$$

这就是罗素想出来的集合论悖论。集合论是数学大厦的基础，基础出问题了，大厦就很难不倾塌！这就使数学出现了所谓的“第三次危机”。当时，很多大数学家把自己的研究工作停了下来，不敢再继续研究。迄今为止，数学家、逻辑学家、哲学家们还真的以为数学仍处于第三次危机之中呢！

我们看看，当代形式逻辑学是怎样审视“罗素悖论”的。

罗素想出的集合 R 是：一切不自属之集之集。

我们在 2.1 节“客观世界的集”的“2.1.3　集的性质”中讲了集的第 4 条性质“集的排己性”，指出，“任一集都不以自身为元，即任意的集都不属于自己。客观世界不存在 $P \in P$，客观世界只存在 $P \bar{\in} P$。”亦即，世界上所有集合都是不自属的。从古至今，有点科学常识的人都知道，任何集合都是不自属的。于是，“一切不自属之集之集”中的限制词“不自属之”就是多余的。因此，“一切不自属之集之集”就等于“一切集之集”，换句话说，罗素想出的集合 R 就是世界上最大的集合，是世界上所有集合构成的集合。即，罗素的集合 $\{x \mid \neg(x \in x)\}$ 应表述为 $\{x \mid x$ 是集合$)\}$。

下面我们来审视审视，看看世界上有没有罗素想出的这个世界上最大的集合 R？

我们的先贤告诉我们“以其人之道，还治其人之身”（宋·朱熹《中庸集注》第十三章）。我们在这里是用集合论的理论破罗素集合论悖论。我们用关于幂集的理论——集合论中的康托尔定理：一集 Q 的元的个数称为 Q 的基数。显然，$2^n > n$，亦即，Q（n 元）的幂集 $P(Q)$（2^n 元）的基数大于 Q 的基数。这个对于有限集必定成立的定理，对于无限集也成立。这就是说，根据康托尔定理，世界上找不到最大的集合，找不到一切集之集。罗素所谓的“一切不自属之集之集 R”（即 $\{x \mid \neg(x \in x)\}$）是不存在的！既然 R 不存在，还谈得上什么 $R \in R$、$\neg(R \in R)$?！因此，客观世界不可能出现罗素的所谓矛盾互推的现象。这是铁的理论、铁的事实！

用马克思主义哲学唯物论考察，罗素关于“最大的集合 R”的思想，与唯物主义理论，与客观世界的实际是相悖的。中学生基于素朴的唯物论理论都知道：天外有天、山外有山、云外有云、银河系之外还有其他星系。辩证唯物论哲学家们不厌其

烦地证明了“宇宙是无限的”,我国古代圣人也都知道“其小无内,其大无外”(出自道家诸子之列《八筹》)。可见,宇宙间找不到罗素虚构出的最大的集合 R。

R 不存在。按我们关于命题真假的唯物论定义,$R \in R$ 、$\neg(R \in R)$ 都是没有真假属性的。也就是说,$R \in R$ 、$\neg(R \in R)$ 不表达命题。既然不表达命题,也就谈不上推出或推不出了。更通俗地说,R 都不存在,讨论 $R \in R$ 、$\neg(R \in R)$ 是没有意义的!!! 就像讨论美国皇帝胖、美国皇帝不胖一样,因为没有美国皇帝。

我们的结论是:宇宙中没有什么“悖论”。不存在什么“第三次数学危机”。数学家们、哲学家们、逻辑学家们,用不着诚惶诚恐,大胆地搞你们的研究吧!所谓悖论,是聪明过了头的“智者”向人类理智开的一本正经、严肃、认真的玩笑!

2.2 *n* 目组、*n* 目组集和 *n* 元关系 ——兼谈数理逻辑顶多只能算 *k* 分之一的逻辑

讨论所涉及的不空的个体的领域称为论域。譬如,数学研究现实世界的数量关系和空间形式,而生物学则以生物为探讨的对象领域。对于所进行的讨论来说,论域是最广泛的集,讨论只在这个范围内进行。以斜体大写拉丁字母 U、加撇或下标表示论域。关于对象的讨论,不仅需要有作为分析的起点的不对它进行分解的个体,还需要有作为概括的终点的始终不可逾越的论域。

若 e_1、e_2、…、e_i、…、e_n 是论域 U 中的 n(n 为自然数)个未必互异的个体,则由其组成的具有一定顺序的排列(简称序列)称为 U 上的一个有序 n 目组,并简称为 n 目组。以 $(e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_n)$ 表示论域 U 上的 n 目组。若 U 为 4 元集 $\{a,b,c,d\}$,则 U 上的 0 目组共有 1 个,即 $()$;1 目组共有 4 个,即 (a)、(b)、(c)、(d);2 目组共有 16 个,即 (a,a)、(a,b)、(a,c)、(a,d)、(b,a)、(b,b)、(b,c)、(b,d)、(c,a)、(c,b)、(c,c)、(c,d)、(d,a)、(d,b)、(d,c)、(d,d);3 目组共有 64 个,如 (a,a,a)、(a,a,b)、…、(a,b,c)、(a,b,d)、…、(d,d,c)、(d,d,d);4 目组共有 256 个;5 目组共有 1024 个;……;n 目组共有 4^n 个。一般来说,m 元论域上的 n 目组共有 m^n 个。

由且仅由 U 上的任意 n 目组(n 为确定的自然数)为元组成的集 U^n,称为论域 U 上的 n 目组集。设若 U 为 4 元集 $\{a,b,c,d\}$,则 U^0 为 1 元集,即 $\{()\}$;U^1 为 4 元集,即 $\{(a),(b),(c),(d)\}$;U^2 为 16 元集,其元即为前述 U 上的 16 个 2 目组;U^3 为 64 元集;U^4 为 256 元集;U^5 为 1024 元集;……;U^n 为 4^n 元集。一般来说,m 元论域 U 上的 n 目组集 U^n 为 m^n 元集。

若集 P 的任意元均为集 Q 的元,则称 P 为 Q 的子集,以 $P\subset Q$(读做“P 含于 Q”)表示。若 $P\subset Q$ 且 $Q \overline{\subset} P$,则称 P 为 Q 的真子集。若 $P\subset U^n$(集 P 为 n 目组集 U^n 的一个子集),且 p 为 P 的共仅属性,则称 p 为 U 上的一个 n 元关系。例如,论

域 U 为前述 4 元集，q_1“相等”($Q_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$)、$q_2$“……在……前”($Q_2=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$)就分别是 U 上的两个不同的 2 元关系；r_1“……左邻……右邻……”($R_1=\{(b,a,c),(c,b,d)\}$)就是 U 上的一个 3 元关系。又例如，“黄种人”、“教员”、“足球爱好者”，就是论域“人”上的三个不同的 1 元关系。而“侵略”则是论域“国家”上的一个 2 元关系，它是 U^2 的下述这个确定的子集的共仅属性：{…，(美国，中国)，(日本，中国)，(德国，苏联)，(英国，阿根廷)，…}。“……通过……杀害……”则是论域“人”上的一个 3 元关系，它是论域上 3 目组集的下述这个确定的子集的共仅属性：{…，(赵高，胡亥，李斯)，(秦桧，赵构，岳飞)，(魏忠贤，朱由校，周顺昌)，…}。

通常，习惯于把 1($n=1$)元关系称为“性质”，2 元或 2 元以上的多($n>1$)元关系才称为“关系”。其实，性质和关系只不过是同一事物的两个不同的侧面：“关系”是多($n>1$)目组的性质，也是一种性质；而“性质”则是 1($n=1$)目组的关系(即 1 元关系)，也是一种关系。传统形式逻辑中的“概念的内涵”相当于这里的 1 元关系 p，“概念的外延”相当于这里的与 p 相对应的 U^1 的确定的子集 P；而作为传统的命题系列的出发点的性质命题(或称直言命题、简单命题)则是基于 1 元关系命题的复合命题。虽然在一些后来出版的形式逻辑书中增添了关于关系命题的内容，可是，仍然不研究多元关系和真正的普遍有效的关系推理，新增的关系命题前无渊源后无归宿，两头落空。因此，尽管从主导思想上说，传统形式逻辑是真正的名副其实的逻辑科学，然而，鉴于从研究范围来看至少是“挂 1 漏 $n-1$”，至多只能算 n 分之一的逻辑。

以内涵为主同时顾及外延的当代形式逻辑与纯外延的正统数理逻辑不同，n 元关系指的不是 U^n 的一个子集 P，而是它的共仅属性 p。因此，对应于 U^n 的同一个子集 P，可以有 k 个尽管互相对当却依旧两两不同的 n 元关系 p_1、p_2、…、p_k。纯外延的正统数理逻辑(其实是被误称为“逻辑”的离散数学)却不从内涵的角度来区分这 k 个互不相同的 n 元关系，从量上说至少是“挂 1 漏 $k-1$”。因此，纯外延的正统数理逻辑顶多只能算 k 分之 1 的逻辑。

2.3 n 元函数关系

2.3.1 映射

若集 P 中的任一元 e_i 必定有且只有集 Q 的一个元 e_i' 与之对应，则称从集 P 到集 Q 有一个映射 f，并以“$f: P \to Q$”表示。集 P 中的元 e_i 称为原像，与原像 e_i 相对应的集 Q 中的元 e_i' 称为映像。以 $e_i'=f(e_i)$ 表示：e_i' 为原像 e_i 通过映射 f 得出的映像。例如，集 P 为由“人”组成之集，集 Q 为由“日期”组成之集，从 P 到 Q 之间就

有一个称为“生日”的映射 f :任意一个人都必定有而且只有一个确定的称为“生日”的日期与之对应。但是反过来,一个日期却未必是某人的生日,也未必只是一个人的生日。这就是说,当从 P 到 Q 有一个映射 f 时,从 Q 到 P 未必也有一个与之对应的映射 f'。我们称由原像 e_i 和映像 e_i' 组成的有序偶(e_i, e_i')(或$(e_i, f(e_i))$)为从 P 到 Q 的映射 f 的一个映射偶。例如,有序偶(孙中山,1866 年 11 月 16 日)就是从集(人)到集(日期)的映射(生日)的一个映射偶,其中,“孙中山”是原像,“1866 年 11 月 16 日”则是原像“孙中山”通过映射“生日”得出的映像。

根据原像和映像的不同对应关系,映射有异射、满射、双射及复合映射。

若不同的原像均对应不同的映像,即当 $e_i \neq e_j$ 时,就有 $e_i' \neq e_j'$,则称映射 f 为异射。

若集 Q 的任一元 e_i' 皆是作为原像的集 P 中的元 e_i 的映像,则称映射 f 为满射。

满射未必是异射,异射也未必是满射。

若 $f: P \to Q$ 既是异射又是满射,则称之为双射。从集 P 到集 Q 的双射也称为一一映射或一一对应。

若从集 P 到集 Q 有一个映射 f_1,且从集 Q 到集 R 有一个映射 f_2,则从集 P 到集 R 必定有一个由 f_1 和 f_2 决定的映射 f_3,这叫映射的传递性。f_3 称为 f_1 和 f_2 的复合映射,记为:

$$f_3 = f_2 \circ f_1 : P \to R$$

请注意,上述复合映射定义中“f_1 和 f_2 的复合”一语,以及记号“$f_3 = f_2 \circ f_1$”中的 f_1、f_2 的前后次序是不能颠倒的,即映射的复合无交换性。

2.3.2　n 元函数关系

从集 P 上的 n 目组集 P^n 到集 Q 的一个映射称为从 P 到 Q 的一个 n 元函数关系,可简称为 n 元函数或函数关系,并可进一步简称为函数。集 P 称为定义域,集 Q 称为值域。用斜体小写拉丁字母 f、g、h,加撇或下标表示 n 元函数。任一 n 元函数 f 对应着一个由以定义域 P 上的 n 目组$(e_1, \cdots, e_n)$为原像、以值域 Q 中的个体 e' 为映像的映射偶$((e_1, \cdots, e_n), e')$组成之集 R,这里,原像$(e_1, \cdots, e_n)$也称为主目值,映像 e' 也称为函数值,而 $R = \{z \mid z = ((x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n), y), x_i \in P, y \in Q, y = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)\}$ 则称为 n 元函数 f 的映射偶集。n 元函数关系 f 是其映射偶集的共仅属性。若两个 n 元函数 f_1、f_2 的映射偶集分别为 R_1、R_2,则 $f_1 = f_2$ 当且仅当 $R_1 = R_2$。当定义域 P、值域 Q 分别为 m、l 元集时,从 P 到 Q 的互不相等的不同的 n 元函数共有 l^{m^n} 个。当定义域和值域为同一个集时,称这个集为论域 U,称这个 n 元函数为 U 上的 n 元函数。当 U 为 m 元集时,U 上的互不相等的不同的 n 元函数共有 m^{m^n} 个(实际上人们只对其中的很小一部分

感兴趣)。

通常,以 $y = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ 表示:值域 Q 的子域上的个体变元 y 是当变 n 目组(或主目)为$(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$时的函数 f 的变值,其中,$x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ 为定义域 P 上的个体变元;以 $e' = f(e_1, \cdots, e_n)$ 表示:值域 Q 中的个体 e' 是当主目值为$(e_1, \cdots, e_n)$时的函数 f 的值,其中,$e_1, \cdots, e_n$ 为定义域 P 中的个体。

客观世界的个体变元在客观的不空的个体域中变,或者说,以客观的不空的个体域为变域。也可以同义地改说成:客观的个体变元泛指客观的论域中的任意个体。以斜体小写拉丁字母 x、y、z,加撇或下标表示个体变元。上述字母称为个体变元号,其本身并非个体变元,而是被用来对客观的个体变元进行讨论的辅助手段。对于此前所采用的符号,含义类似。

2.4 客观世界的项

项(term)是一种为当代形式逻辑语义学所研究的客观世界的重要对象。

2.4.1 个体变元

论域 U 上的 1 元函数是从论域 U 到论域 U 的一个映射。论域 U 中可能有很多乃至无限多个个体。我们用 $f(e_i) = e_j$ 来表示对应于论域 U 上的 1 目组(e_i),1 元函数的值是 e_j 这个事实。但这只是其中的某一个确定的事实。譬如,在论域 $U = \{x \mid x \text{ 是人}\}$ 上有一个 1 元函数"……的父亲",用 f 表示这个 1 元函数,用 e_2 表示曹操,用 e_1 表示曹植,于是有下面这个确定的事实:

$$f(e_1) = e_2$$

可是,除此之外,还有许许多多类似的事实:

$$f(\cdots) = \times\times\times$$

括弧中空位上的"…"就表示论域里的任意一个人。这"任意一个人"和作为个体常项的某个确定的人(如曹植)不同,它可以是论域中的任何一个人,但又未专指哪个人。

论域 U 中的"任意一个个体"就称为论域 U 上的个体变元。论域 U 称为个体变元的变域。个体变元只在论域中变。如前所述,用斜体小写拉丁字母 x、y、z,加撇或下标表示个体变元。

个体变元不具有逻辑外的经验性质,而只具有逻辑性质,即:在论域中变。因而,我们称个体变元为逻辑对象。

2.4.2 n 元函数的变值

至少含有一个个体变元的 n 目组称为变 n 目组。如(x)、(x, e_i)、$(x_i, e_i, x_j,$

e_j)、$(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$皆为变 n 目组。必须注意,这里的 e_i、e_j及 x、x_i、x_n等并非指这些字母自身,而是指称存在于论域 U 上客观的个体或个体变元。

以变 n 目组为原像的 n 元函数 f^n的值就称为 n 元函数的变值。可表示为:

$$f^n(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

$f^1(x)$就表示对于变 1 目组(x),1 元函数 f^1的变值;$f^2(x_1,x_2)$就表示对于变 2 目组(x_1,x_2),2 元函数 f^2的变值;等等。

n 元函数的变值也是变的,也并不专指某个确定的个体,但它与个体变元不同:n 元函数的变值取决于变 n 目组中的每一个个体变元 x_i的值,即 n 元函数的变值随个体变元的变而变;个体变元在整个论域上变,而 n 元函数的变值则在论域的子集(有时只在论域的真子集)中变。例如,以 f 为论域(人)的一个 1 元函数"……的父亲",当 x 取值"曹植"时,$f(x)$只能取值"曹操",当 x 取值"阿斗"时,$f(x)$只能取值"刘备";并且,x 在整个论域上变,因为事实上任何人都有而且只有一个生身之父,但 $f(x)$只能在集(有子女的男人)中变。

2.4.3　项的定义

项作为一种客观存在形态,具有客观的形成准则(正像化学所研究的晶体具有客观的形成准则一样)。是否符合这种形成准则,就成了鉴别任一对象究竟是否为项的客观标准。项的客观的形成准则如下:

(1) 任一个体变元是项;

(2) 若 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_i,\cdots,\boldsymbol{u}_n$是项,$f^n$是论域 U 上的一个 n 元函数,则 $f^n(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_i,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$是项;

(3) $\boldsymbol{u}$ 是项,仅当 $\boldsymbol{u}$ 满足(1)或(2)。

这里,$\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,n)$指称任意对象。

我们用黑斜体小写拉丁字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$,加撇或下标表示任意的项。

这种形成准则为人所认识后,就称为项的递归定义。在这个递归定义中,(1)称为基始或基础,(2)称为归纳,(3)称为限制约定或界限。这三者互相依存、互相补充、缺一不可。

基始为归纳提供了切实的出发点。基始部分指出,项至少包括个体变元。个体变元是不通过函数关系得出的项(即,不是作为函数的值的项),也可以说,个体变元是 0 次通过函数关系得出的项。

归纳给基始提供了无限广阔的发展前景。归纳部分指出,项从个体变元出发,可以一次一次地通过函数得出一系列更复杂的项来。我们知道,任一个体 e_i是某一 0 元函数的值,即 e_i就是 $f_i^0()$。0 元函数 f_i^0的辖域中出现 0 个项(归纳并不要求 $n>0$),故而,任一个体 e_i是项。由于 e_1和 x_1是项,所以 $f(e_1)$、$f(x_1)$也是项。同理,不仅 $f_1(e_1,x_1)$是项,而且 $f_2(e_2,x_2,f_1(e_1,x_1))$、$f_3(e_3,x_3,x_4,f_1(e_1,x_1))$,

$f_2(e_2, x_1, f_1(e_1, x_1)))$也是项。

限制约定把项的外延限制在满足基始或归纳的范围内。没有限制约定,基始和归纳就只说明了项至少是什么,而不能规定项只能是什么。

项的逻辑结构的数量特征,我们称做阶。阶是一个与项通过的函数关系次数有关的非负的整数。下面,我们给出项的阶的定义。

个体变元为0阶项;个体为1阶项;若$f(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$是既非个体变元又非个体的项,且诸项$a_i$中的最高阶为$k$,则$f(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots a_n)$的阶为$k+1$。

由于个体变元是没有通过函数关系得出的项,亦即,是0次通过函数关系得出的项,因此,个体变元的阶数为0,是0阶项;任一个体是通过一次0元函数关系得到的项。因此,个体为1阶项;$f_1(e_1, x_2)$是既非个体变元又非个体的项,而在括弧内的两个项中,x_1为0阶项,e_1为1阶项,故最高阶为1,因此$f_1(e_1, x_1)$为2阶项。同理,$f_2(e_2, x_2, f(e_1, x_1))$为3阶项,$f_3(f_2(f_1(e_1, x_1)))$为4阶项,等等。

2.4.4 项的分类

根据是否出现个体变元,项可二分为变项和常项。

1. 变项

变项就是出现个体变元的项。如$f_1(x)$、$f_2(e, x)$,因其中出现个体变元x,故是变项。若指定x为“任一城市”,e为“贵阳”,f_1为“……的面积”,f_2为“……与……的距离”,那么我们便得到这两个变项的实例,用自然语言或符号语言表述出来即为:

任一城市的面积($f_1(x)$)

贵阳与任一城市的距离($f_2(e, x)$)

一再提请注意,这里所讨论的始终是客观世界的项,而不是用来指称客观世界的项的自然语言或人工语言及它们所承载的思考,尽管我们的讨论无论如何离不开利用作为思考的载体的自然语言和人工语言。

根据变项的阶的不同,变项又可二分为0阶变项和非0阶变项。

(1) 0阶变项——即不出现函数关系的个体变元。在“人”这个论域上,用自然语言“任意一个人”所指称的客观对象就是个体变元,因而是0阶变项。在“国家”这个论域上,用自然语言“任意一个国家”所指称的客观对象也是个体变元,因而也是0阶变项。我们常用符号x、y、z等泛指论域U中的任意个体,即在论域U中变的个体变元,因此符号x、y、z等所指称的客观对象也就是0阶变项。

(2) 非0阶变项——即出现n元函数关系的变项。下面是一些非0阶变项的例子。

① 1 阶变项。

“政党的纲领”用符号可表示为 $f_1^1(x_1)$（x_1 表示“政党”，f_1^1 表示 1 元函数“……的纲领”）。

“玫瑰花的颜色”用符号表示为 $f_2^1(x_1)$（x_2 表示“玫瑰花”，f_2^1 表示 1 元函数“……的颜色”）。

② 2 阶变项。

“行星的自转速度”用符号表示为 $f_4^1(f_3^1(x_3))$（x_3 表示“行星”，f_3^1 表示 1 元函数“……的自转”，f_4^1 表示 1 元函数“……的速度”）。

“贵阳与任一首都的距离”用符号表示为 $f_1^2(e_1,x_3)$（e_1 表示“贵阳”，x_3 表示“任一首都”，f_1^2 表示 2 元函数“……与……的距离”）。

③ 3 阶变项。

“哲学家的哲学派别的历史”用符号表示为 $f_7^1(f_6^1(f_5^1(x_4)))$（x_4 表示“哲学家”，f_5^1、f_6^1、f_7^1 分别表示 1 元函数“……的哲学”、“……的派别”、“……的历史”）。

“知识分子家庭的经济状况”用符号表示为 $f_{10}^1((f_9^1(f_8^1(x_5)))$（$x_5$ 表示“知识分子”，f_8^1、f_9^1、f_{10}^1 表示 1 元函数“……的家庭”、“……的经济”、“……的状况”）。

2. 常项

常项就是不出现个体变元的项。如 $f^1(e_1)$、$f^2(e_1,e_2)$，由于其中不出现个体变元，因此是常项。若以 e_1 表示“贵阳”，e_2 表示“北京”，f^1、f^2 分别表示 1 元函数“……的面积”、2 元函数“……与……的距离”，则上述用符号所指称的常项便可用自然语言表示为：

贵阳的面积

贵阳与北京的距离

根据常项的阶的不同，常项又可分为 1 阶常项和多阶常项。

（1）1 阶常项——即论域 U 内的确定的个体，又称“个体常项”，简称“个体”。我们知道，论域 U 内的某一确定的个体 e_i 是项，显然，e_i 中不出现个体变元，因此 e_i 是常项；又由于 e_i 是通过一次 0 元函数得出的项，因此是 1 阶常项。例如，论域“人”内的确定的个体李白、杜甫、孙中山等是 1 阶常项，论域“国家”内的确定的个体中国、美国、日本等也是 1 阶常项。

（2）多阶常项——即出现非 0 元函数的常项。下面是一些多阶常项的例子。

① 2 阶常项。

“地球的体积”用符号可表示为 $h_1^1(e_1)$（e_1 表示“地球”，h_1^1 表示 1 元函数“……的体积”）。

“北京与莫斯科的距离”用符号可表示为 $h_1^2(e_2、e_3)$（e_2、e_3分别表示“北京”、“莫斯科”，h_1^2表示 2 元函数“……与……的距离”）。

② 3 阶常项。

“李白的父亲的母亲”用符号可表示为 $h_3^1(h_2^1(e_4))$（e_4表示“李白”，、h_2^1、h_3^1分别表示 1 元函数“……的父亲”、“……的母亲”）。

“甲球的自由降落速度”用符号可表示为 $h_5^1(h_4^1(e_5))$（e_5表示“甲球”，h_4^1、h_5^1分别表示 1 元函数“……的自由降落”、“……的速度”）。

③ 4 阶常项。

“曹植的嫂嫂的父亲的母亲”用符号可表示为 $h_3^1(h_2^1(h_6^1(e_6)))$（e_6表示“曹植”，h_6^1、h_2^1、h_3^1分别表示 1 元函数“……的嫂嫂”、“……的父亲”和“……的母亲”）。

“甲球与乙球的固结体的自由降落速度”用符号可表示为 $h_5^1(h_4^1(h_2^2(e_5, e_7)))$（$e_5$、$e_7$分别表示“甲球”、“乙球”，$h_2^2$表示 2 元函数“……与……的固结体。$h_4^1$、$h_5^1$同②中的例子）。

项的分类如图 2.2 所示。

个体变元（即 0 阶变项）由于不包含 n 元函数关系，因此没有经验性质，只有逻辑性质“在论域中变”，故称为逻辑项。除个体变元之外的非 0 阶项（包括常项和非 0 阶变项），由于包含 n 元函数关系，因此，除了具有逻辑性质外，还具有逻辑外的经验性质（某种确定的映射），故称为经验项。

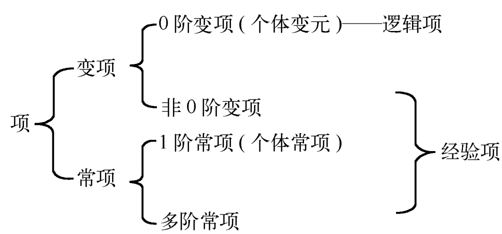


图 2.2　项的分类

2.5　客观世界的原子事件

流行的逻辑读本都讨论原子命题（或称初级命题、基础命题、简单命题），可是何谓原子命题？皆无语义的和语构的解释。当代形式逻辑认为，命题是关于客观世界的事件的思考，原子命题则是关于客观世界的原子事件的思考。被原子命题所思考的客观世界的原子事件就称为原子命题的内容。

原子事件是一种客观存在的事物。尽管我们不能不利用作为思维载体的自

然语言和人工语言来指称客观存在的事物,来表达我们所做的探讨,然而下面所探讨的始终是客观世界的原子事件。

所谓原子事件,包括闭原子事件和开原子事件。

2.5.1 闭原子事件

1. 闭原子事件的定义

若 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n$ 为 n 个常项,即其中的每一个 $a_i(1<i<n)$ 都不含个体变元,则称由它们组成的 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为常 n 目组。一个常 n 目组是论域上的一个确定的 n 目组。存在于客观世界的常 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 满足 n 元关系 p,或者常 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 属于 U^n 的以 n 元关系 p 为共仅属性的子集 P 这个事实,称为 U 上的一个 n 元的闭原子事件。用符号表示为:

$$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$$

必须注意的是,任一闭原子事件必为一确实存在的客观事实。

我们知道,地球、太阳为论域(太阳系)上的两个常项,这里分别以 e_3、e_0 表示。由它们组成的2目组 (e_3,e_0) 显然为常2目组。“……绕……转”为2元关系,用 p 表示。集 P 是论域 U 上的2目组集 U^2 的一个以2元关系 p 为共仅属性的子集。客观事实“地球绕太阳转 $p(e_3,e_0)$”就是论域太阳系上的一个2元的闭原子事件。

在闭原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 中,常 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 称为 n 元关系 p 的辖域。在不致引起含混的情况下,可以省去作为 n 元关系的辖域的常 n 目组,把闭原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 简写为 p。

2. 闭原子事件 p 的补闭原子事件 $\sim p$

若 p 为 U^n 的子集,则由 U^n 中的不属于 P 的个体(为 n 目组)组成之集称为 P 的补集。以 $\sim P$ 表示 P 的补集。补集可简称为补。若 $\sim p$、p 分别为 $\sim P$、P 的共仅属性,则称 $\sim p$ 为 p 的补关系。$\sim P$ 和 P 互为补集,$\sim p$ 和 p 互为补关系。这样,我们称 $\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的补闭原子事件。$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 和 $\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 互为补闭原子事件。我们也可称 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为 $\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的补闭原子事件。例如,下列语句所指谓的事件

赵构通过秦桧杀害岳飞(用符号表示为 $p(e_1,e_2,e_3)$)

同下列语句所指谓的事件

并非赵构通过秦桧杀害岳飞(用符号表示为 $\sim p(e_1,e_2,e_3)$)

就互为补闭原子事件。

3. 闭原子事件 p 的真值——有、无

由常项的定义我们知道,地球、太阳为论域 U(太阳系)上的两个常项,这里分别以 e_3、e_0 表示。由它们组成的 2 目组(e_3,e_0)显然为常 2 目组。“……绕……转”为 2 元关系,以 p 表示。集 P 是 U^2 的一个以 2 元关系为共仅属性的子集,则客观事实

地球绕太阳转(用符号表示为 $p(e_3,e_0)$ 或 $(e_3,e_0) \in P$)

就是论域太阳系上的一个 2 元的闭原子事件。

当且仅当有下述三个事实时,称闭原子事件 $p(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ 为有:

(1) 有由论域 U 上的 n 个常项 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 组成的常 n 目组$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$;

(2) 有论域 U 上的一个 n 元关系 p;

(3) 有$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$满足 p。

若 P 为 U^n 的子集,则称由且仅由 U^n 内不属于 P 的 n 目组为元组成之集 R 为 P 的补集。以 $R = \sim P$ 表示 R 是 P 的补集。若 p、$\sim p$ 分别为 P、$\sim P$ 的共仅属性,则称 $\sim p$ 为 p 的补 n 元关系,简称为补关系。

当且仅当有下述三个事实时,称闭原子事件 $p(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ 为无:

(1) 有由论域 U 上的 n 个常项 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 组成的常 n 目组$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$;

(2) 有论域 $\boldsymbol{U}$ 上的一个 n 元关系 p,从而,必定也有其补关系 $\sim p$;

(3) 有$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$不满足 p,从而,必定有$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$满足 $\sim p$。

这就是说,无闭原子事件 $p(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ 当且仅当有其补闭原子事件 $\sim p(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$。因此,对于闭原子事件来说,无就是有补,就是异在;无是一种有——有补,是一种存在——异在。

关于闭原子事件的思考称为闭原子命题,其真假取决于相应的闭原子事件的有无。以“太阳系恒星或行星”为论域 U,设 e_0、e_3、p 分别表示个体“太阳”、“地球”、2 元关系“……绕……转”,闭原子命题“地球绕太阳转”为真,因为,有闭原子事件 $p(\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_0)$;而闭原子命题“太阳绕地球转”为假,因为,无闭原子事件 $p(e_0,e_3)$,亦即,有闭原子事件 $\sim p(e_0,e_3)$。然而语句“地球绕救星转”所表述的思考却不是闭原子命题。因为,对于论域 U 来说,语词“救星”是一无所指的空词,从而,上述有空词的语句称为空话,其表述的思想称为空想。上述空想的指谓是 $p(e_3,\quad)$,鉴于缺少事实(1)、(3)(其中的$(e_3,\quad)$由于空缺第 2 目上的个体,从而不是常 2 目组,故而,无所谓是否满足 2 元关系 p),不是什么闭原子事件,更无所谓有、无。因此,不可以说“闭原子事件‘地球绕救星转’为无”!

以“1”表示有，“0”表示无。由且仅由 1(即有)、0(即无)组成之集{1,0}称为有无域。

2.5.2　开原子事件

1. 开原子事件的定义

若 $a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n$ 为 n 个项，且其中至少有一为变项(即含个体变元)，则称由其组成的 n 目组$(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$为变 n 目组。变 n 目组在论域 U 的 n 目组集 U^n 的一个确定的子集中变，这个 U^n 的确定的子集就称为变 n 目组的变域。若论域 $U=\{$太阳，地球，火星$\}$，以 e_0、e_3、e_4 依次表示太阳、地球、火星，则变 2 目组(x,y)的变域为 U^2(是 $3^2=9$ 元集)，而变 2 目组(x,e_0)的变域则为 U^2 的下述 3 元子集：

$$\{(e_0,e_0),(e_3,e_0),(e_4、e_0)\}$$

提请注意，n 目组尽管和项有紧密联系，然而有严格区别：n 目组是 n 个项的序列，而项则是以 n 目组为原像通过 n 元函数关系得出的映像。变 n 目组的变域是一个以常 n 目组为元的 U^n 的确定的子集。

设 p 为论域 U 上的一个 n 元关系，P 为与 p 相应的 U^n 的一个子集，$\sim p$ 为 p 的补关系，$\sim P$ 为 P 的补集。又设 U 的基数为 m，P 的基数为 l，则 U^n 的基数为 m^n，$\sim P$ 的基数则为 m^n-l。显然，关于 p 共有 l 个闭原子事件；关于 $\sim p$ 共有 m^n-l 个闭原子事件。以这 m^n 个闭原子事件为元组成的集 $P^☆$(读做“P 星”)称为关于 p 的闭原子事件集。

从变 n 目组$(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$的变域到关于 p 的闭原子事件集 $P^☆$ 之间有一个映射：对于变域中任意一个常 n 目组，必定有且只有一个 $P^☆$ 中的闭原子事件与之对应。例如，在前述的论域 $U(=\{$太阳，地球，火星$\})$上，从变 2 目组(x,y)的变域 U^2 到关于 2 元关系“……绕……转”(p_1)的闭原子事件集 $P^☆$ 之间有如下映射：

U^2	$P^☆$	闭原子事件 $p_1(e_{j1},e_{j2})$ 的有、无集{1,0}
(太阳，太阳)	太阳不绕太阳转	无
(太阳，地球)	太阳不绕地球转	无
(太阳，火星)	太阳不绕火星转	无
(地球，太阳)	地球绕太阳转	有
(地球，地球)	地球不绕地球转	无
(地球，火星)	地球不绕火星转	无
(火星，太阳)	火星绕太阳转	有
(火星，地球)	火星不绕地球转	无
(火星，火星)	火星不绕火星转	无

显然,存在上述从变 2 目组的变域 U^2 到 $P^☆$ 的一个映射的同时,还存在从变 2 目组的变域 U^2 到 $P^☆$ 中关于 p 的闭原子事件 $p_1(e_{j1},e_{j2})$ 的有、无之间一个映射。对这后一个映射,我们已经其将映像列在最右边。

这就是说,对于论域 U 来说,存在从变 n 目组$(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$的变域 U^n 到关于 n 元关系 p 的闭原子事件集 $P^☆$ 之间的一个映射的同时,还存在一个从变 n 目组$(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$的变域 U^n 到 $P^☆$ 中关于 n 元关系 p 的闭原子事件集$p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$的有无之间的一个映射,这后一个映射就称为关于 n 元关系 p 和变 n 目组$(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$的开原子事件。用符号表示为:

$$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$$

开原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 是以论域 U 为定义域,以闭原子事件 $p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 的真值域为值域的 n 元函数,因此,开原子事件又称为原子事件函数,或者,称为个体 - 真值函数。开原子事件 $p(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 称为 n 元关系 p 的命名事件。

2. 开原子事件的例

我们规定:当 a_i 为常项时,e_{ji} 为其值,当 a_i 为变项时,e_{ji} 为 a_i 中出现的个体变元均取某个个体常项为值后得出的值。这样,闭原子事件 $p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 就称为开原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的个别例。在不致引起含混的情况下,可简称为例。一个开原子事件对应着一个由它的例——闭原子事件组成的集。显然,开原子事件的符号表达形态 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 并无"变 n 目组$(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$满足 n 元关系 p"的意思,因为一个变 n 目组在确定的变域中变,其本身是不确定的,无所谓是否满足 n 元关系 p。对于开原子事件来说,重要的是:开原子事件对应着由它的例组成的集。

若开原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的例 $p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 为有,则称 $p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 为 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的正例;若开原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的例 $p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 为无,亦即,$\sim p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 为有,则称 $p(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{ji},\cdots,e_{jn})$ 为 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的反例。开原子事件的任一例非正必反。

应当注意的是:对于 n 目组的变域中的任一常 n 目组,并非必定有一个作为相应的开原子事件的正例的闭原子事件。亦即,对于变 n 目组的变域中的任一常 n 目组,并非必定满足 n 元关系 p。

如前所举,对于论域 $U(=\{$太阳,地球,火星$\})$上的 2 元关系 p("……绕……转"),开原子事件 $p(x,y)$ 对应着 2 个正例、7 个反例。这可用如下关系矩阵清晰地表示出来:

p	e_0	e_3	e_4
e_0	0	0	0
e_3	1	0	0
e_4	1	0	0

开原子事件 $p(x,e_0)$ 的正例也是前述 2 个。可是,变 2 目组 (x,e_0) 的变域却是 3 元集,其中一个常 2 目组 (e_0,e_0) 其相应的例 $p(e_0,e_0)$(“太阳绕太阳转”)为反例。

3. 开原子事件的有、无

我们以斜体大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$,加撇或下标表示原子事件(闭或开)。

开原子事件 $\boldsymbol{A}$ 是个体 - 真值函数,是一个以变域 U^n 的某个子集中的常 n 目组为原像,以闭原子事件的有、无为映像的映射偶之集。其本身无所谓有,也无所谓无。开原子事件 $\boldsymbol{A}$ 的例 $\boldsymbol{A}'$ 是个闭原子事件,不是有就是无。若开原子事件 $\boldsymbol{A}$ 的任一例 $\boldsymbol{A}'$ 必定为有,则称 $\boldsymbol{A}$ 为常有;若开原子事件的任一例 $\boldsymbol{A}'$ 必定为无,则称为常无;若开原子事件 $\boldsymbol{A}$ 不是常无,即并非 $\boldsymbol{A}$ 的任一例 $\boldsymbol{A}'$ 必定为无,则称为可有;若开原子事件 $\boldsymbol{A}$ 不是常有,即并非 $\boldsymbol{A}$ 的任一例 $\boldsymbol{A}'$ 必定为有,则称 $\boldsymbol{A}$ 为可无;若开原子事件 $\boldsymbol{A}$ 可有且可无,即并非 $\boldsymbol{A}$ 的任一例 $\boldsymbol{A}'$ 必定为无,且并非 $\boldsymbol{A}$ 的任一例 $\boldsymbol{A}'$ 必定为有,则称为可有可无。显然,可有即常有或可有可无,可无即可有可无或常无。于是,对开原子事件可做如下划分(二分或三分)。

可有 { 常有, 可有可无 }

{ 可有可无, 常无 } 可无

我们规定,闭原子事件 $\boldsymbol{A}$ 的例就是它自身。有时为了方便,我们也笼统地讨论原子事件 $\boldsymbol{A}$(闭或开)的有、无。我们约定,说“原子事件 $\boldsymbol{A}$(闭或开)的有、无”时,指的是 $\boldsymbol{A}$ 的例有、无——当 $\boldsymbol{A}$ 为闭原子事件时,指的是它自身的有无;当 $\boldsymbol{A}$ 为开原子事件时,指的是它的例 $\boldsymbol{A}'$ 的有、无。

2.5.3　原子事件

闭原子事件和开原子事件通称原子事件。以 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 表示原子事件。当 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n$ 皆为常项时,$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为闭原子事件。闭原子事件非有必无。当 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n$ 中至少有一为变项时,$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为开原子事件。开原子事件是个体 - 真值函数,即为从个体域 U 上的 n 目组集 U^n 的子集到有、无的一个映射。

若 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为原子事件,则称出现在其中的 n 目组 $(a_1,a_2,$

$\cdots, a_i, \cdots, a_n$)为出现在其中的 n 元关系 p 的辖域。此辖域是一个常 n 目组或变 n 目组。当它是变 n 目组时,其取值范围称为变域。此变域是论域上的 n 目组集 U^n 的一个确定的子集(可以但未必是真子集)。

n 元关系 p 的域跟原子事件中的 p 的辖域及其变域不同:p 的域是由 p 决定的论域 U 的一个子域,原子事件中 p 的辖域是指在原子事件中出现的常 n 目组或变 n 目组,而变域则是指 n 目组的取值范围——U^n 的一个确定的子集。

2.5.4 原子事件有、无的不矛盾律、排中律和选一律

依据 n 目组与 n 元关系之间满足关系的互补不矛盾律、排中律(二者合起来称为选一律),任一 n 目组不可能同时满足 n 元关系 p 和 $\sim p$,必定至少满足 n 元关系 p 或 $\sim p$ 中之一,亦即,必定满足且仅满足 n 元关系 p 或 $\sim p$ 二者之一。因此,闭原子事件 $p(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ 与闭原子事件 $\sim p(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ 既不可能同时并有,也不可能同时并无,亦即,必定存在而且仅仅存在二者之一。我们称这样的两个闭原子事件为互补原子事件。这就是说,一原子事件不可能同补原子事件并存、共无。这分别称为原子事件有无不矛盾律、排中律;二者合起来则称为原子事件有无选一律,即:任一原子事件要么存在,要么不存在,二者必居其一,抑或,任一原子事件要么存在其本身,要么存在其补事件,二者必居且只居其一。

清代小石道人辑《嘻谈续录》有个故事记述了如下一桩事。

一人嗜饮,日在酒乡,杯中物时不离口,已成酒病。众友力劝其戒酒,嗜酒者曰:“我本要戒,因小儿出门未归,时时盼望,聊以酒浇愁耳。子归当戒之。”众曰:“赌咒方信。”嗜者曰:“子若归,不戒酒,教大酒缸把我淹死,小酒杯把我噎死,跌在酒池内泡死,掉在酒海里淹死,罚我生为曲部之民,死为糟丘之鬼,在酒泉之下永不得翻身。”众友曰:“令郎到底何处去了?”答曰:“杏花村外给我沽酒去也。”

这里揭举了“‘嗜酒者’不戒酒”(我们用单引号的‘嗜酒者’指称文中所指得的那个嗜酒者)这样一个闭原子事件。我们用 e_4' 和 e_9' 分别表示“‘嗜酒者’”和“酒”,以 r 表示 2 元关系“……戒……”,则此闭原子事件可用符号表示为:

$$\sim r(e_4', e_9')$$

与其互补的闭原子事件为“‘嗜酒者’戒酒”,用符号表示为:

$$r(e_4', e_9')$$

显然 $\sim r(e_4', e_9')$ 同 $r(e_4', e_9')$ 不可并存,这就是原子事件有无不矛盾律;$\sim r(e_4', e_9')$ 同 $r(e_4', e_9')$ 亦不可共无,此即原子事件有无排中律;要么 $\sim r(e_4', e_9')$ 存在,要么 $r(e_4', e_9')$ 存在,二者必居且只居其一,这就是原子事件有无选一律。绝不可能出现如下事实:‘嗜酒者’既戒酒又不戒酒,或者,既不存在‘嗜酒者’戒酒又不存在‘嗜酒者’不戒酒。只能出现如下事实,即:要么‘嗜酒者’戒酒,要么‘嗜酒者’不戒酒,二者必居且之居其一。不管‘嗜酒者’吹得如何

天花乱坠,这个故事所揭举的事实是:这个‘嗜酒者’不戒酒。

当 p 和 $\sim p$ 互补时,$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 和 $\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 互补。$\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 说的是:n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 满足 n 元关系 $\sim p$。当然,n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 满足 n 元关系 $\sim p$,当且仅当 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 不满足 n 元关系 p。而 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 不满足 n 元关系 p,用符号表示为 $\neg[p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)]$,其中的“$\neg$”读做“否定”,表示“不”的意思,而方括号“[ ]”往往省略,于是可是简单地写做:$\neg p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$。故,$\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 当且仅当 $\neg p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$。尽管此二者互为充要条件,然而,从逻辑上说却是不同的:前者说的是 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 满足 n 元关系 $\sim p$,这和原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 互补,称做原子事件 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的补原子事件,因而也是原子事件;而后者说的却是 n 目组 $(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 不满足 n 元关系 p,是 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的否定事件。由于多了个“否定”(“$\neg$”),故不符合原子事件的定义,不再是原子事件了。

显然,上述三律(原子事件有无不矛盾律、排中律、选一律)是客体的规律,并非什么“思维规律”。由于思维中含有空想,而从语言表述上看似乎互相“否定”的表述空想的空话(如,“美国皇帝生出自己”,“美国皇帝不生出自己”,其指谓分别为 $p(\quad,\quad)$,$\sim p(\quad,\quad)$),可以全都不是真的,当然,也全都不是假的,亦即,全都无真假可言。20 世纪以来被“智者”们挖空心思地构造出来的“悖论”(以“永恒的说谎者悖论”、“罗素悖论”为代表),全都是含有空词的精巧的空想,全都不是关于事件的思考,故而全都不是当代形式逻辑的命题,因此事实上全都不满足“与其自身的否定可以互相推出”(只有命题之间才讨论是否可推出。不是命题就无推出可言),亦即,全都不符合“悖论”的定义。

2.6　真值函数关系与纯真值复合事件

2.6.1　真值函数关系

真值是指命题的真假。命题是关于事件的思考,而所谓命题的真假就是被思考的事件的有无——有便为真,无即成假。因此,有无可以称为真值,而有无域{1,0}也相应地可称为真值域。所谓真值函数关系就是以{1,0}为定义域和值域的 n 元函数关系,也就是从 $\{1,0\}^n$ 到{1,0}的一个映射,可简称为真值函数。这是历史上用惯了的名称。由于真值在这里指的是客观的事件的有无,故而,真值函数原本应称为有无函数;而有、无是两个值,因此,真值函数又可称为

二值函数。最后的这个名称恰当地揭举了在历史上被称为“真值函数”的这类特殊的函数关系的本质：是从有、无到有、无的函数关系，故而只是二值的；但是无论如何是客观的，在人类出现之前就在宇宙中存在，原本和人的认识的真假无关；后来出现了人类和人的认识，于是就有了所谓的“真、假”，不过，这“真、假”是指原本和认识无关的客观的事件的有、无。客观地存在的不同的 n 元真值函数共有 2^{2^n} 个。

2.6.2 真值表

刻画 n 元真值函数的人为的方阵称为 n 元真值函数表，并简称为真值表。通常以斜体小写拉丁字母 p、q、r、s，加撇或下标表示真值变元。1、2 元真值函数的真值表分别如下。

P	f_1^1	f_2^1	f_3^1	f_4^1
			$\neg$	
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

p	q	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2	f_{16}^2
			$\vee$	$\leftarrow$		$\rightarrow$		$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\uparrow$	$\dot{\vee}$		$\nrightarrow$			$\downarrow$	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

真值表是人对客观的真值函数关系的认识、整理和总结，是人为绘制的。但是，通过真值表刻画的真值函数的性质却是客观的，不以人的认识和意志为转移。这之间的关系类似于人为地绘制的化学元素周期表和由之刻画的客观的元素周期律之间的关系。鉴于真值域{1,0}作为值是离散的，因此，真值函数的性质是离散数学的研究对象。所谓“布尔代数”（或称“逻辑代数”——曾经被误认为是逻辑的代数）就是关于个体域{1,0}上的 1 元运算 f_3^1（即$\neg$）和 2 元运算 f_8^2（即$\wedge$）的离散的代数系统—— $<\{1,0\}, f_3^1, f_8^2>$。

2.6.3 纯真值联结关系

当把“有、无”称为“真值”后，个体－有无函数就可相应地称为个体－真值函数。鉴于个体－真值函数、真值函数关系会在主要的逻辑联结关系充分条件关系的辖域中出现，故而，这两种作为离散数学的主要研究对象的函数关系，也是以充分条件关系为主要研究对象的逻辑科学的辅助的、次要的研究对象。作为当代形式逻辑语义学的次要的辅助因素之一的真值函数关系称为正统（或纯真值）联结关系。历史上，尤其是布尔代数产生后的一个半世纪以来，人们对第

3 号 1 元真值函数，第 2、5、7、8 号 2 元真值函数给予了特殊的关注，并分别以 $\neg p$（或 $\bar{p}$）、$p\lor q$、$p\rightarrow q$、$p\leftrightarrow q$、$p\land q$ 表示上述 5 种真值函数关系，在其中出现的纯真值联结关系 $\neg$、$\lor$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、$\land$ 分别读做：否定（或非）、析取、蕴涵、等值（或互蕴）、合取。

刻画第 5 号 2 元真值函数 f_5^2 的纯真值联结关系蕴涵关系（$\rightarrow$）和非纯真值的充分条件关系（$\rightharpoonup$）具有根本不同的逻辑性质，各自满足完全不同的逻辑规律，故而，$p\rightarrow q$ 不能读做"p 是 q 的充分条件"或"若 p，则 q"，而只能读做"p 蕴涵 q"或"不是有 p 而无 q"。

在历史上，人们还曾对第 3、9、10、12、15 号真值函数表示过特殊的兴趣，并分别以 $p\leftarrow q$（有 p 或者无 q）、$p\uparrow q$（p、q 不同有）、$p\dot{\lor} q$（p、q 不同有无）、$p\nrightarrow q$（有 p 而无 q）、$p\downarrow q$（p、q 同无）表示上述四种真值函数关系（括号中标出其逻辑语义）。在上述五种真值函数中出现的纯真值联结关系 $\leftarrow$、$\uparrow$、$\dot{\lor}$、$\nrightarrow$、$\downarrow$ 分别读做：逆蕴涵、与非（或析舍）、不可兼析取、不蕴涵、或非（或合舍）。其中的 $\uparrow$（与非）、$\downarrow$（或非）这两个纯真值联结关系为美国数理逻辑学家舍佛于 1913 年提出的，故而也被称为"舍佛竖"。

对于五种纯真值联结关系（即 $\neg$、$\lor$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、$\land$）来说，用而且只用其中的否定（$\neg$）、合取（$\land$）（或析取 $\lor$、或蕴涵 $\rightarrow$）两种纯真值联结关系，即可由之刻画任意的真值函数关系，亦即，任意的 n 元真值函数（共有 $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{2^i}$ 个，$\sum$ 为连加号）f_i^n 必定可表示为否定、合取（或析取、或蕴涵）的某种复合。真值函数的这种显示其内在紧密联系的客观性质，称为否定、合取（或析取、或蕴涵）对真值函数关系的完全性。因此，为了刻画任意的真值函数关系，作为基本的纯真值联结关系，只选用否定、合取（或析取、或蕴涵）两种就足够了。基本的纯真值联结关系选定后，其余三种则相对地称为导出纯真值联结关系。

2.6.4　纯真值复合事件

不分析其内部结构的事件称为基础事件。以黑斜体大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$，加撇或下标表示基础事件。$\neg\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}\land\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\lor\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\leftarrow\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$ 分别称为否定、合取、析取、蕴涵、逆蕴涵、等值事件，此六者统称为纯真值复合事件。前二者称为基本的，后四者称为导出的。

闭（开）原子事件是闭（开）事件。$\neg\boldsymbol{A}$ 是闭（开）事件，当且仅当，$\boldsymbol{A}$ 是闭（开）事件。$\boldsymbol{A}\land\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\lor\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\leftarrow\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$ 是闭事件，当且仅当，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 皆为闭事件；否则（亦即 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中至少有一为开事件），即为开事件。开原子事件是个体 - 真值函数；开纯真值复合事件是个体 - 真值函数与真值函数的复合函数，归根结底还是个体 - 真值函数：以个体域为定义域，以真值域（即有、无域{1,0}）

为值域的 n 元函数。

2.7 基本的非纯真值联结关系——充分条件关系及其两个独立性

在逻辑史上,“充分条件”作为重要的联结关系,向来都是逻辑学家所关注的焦点。这是因为,任何推理式的前提和结论之间一定存在普遍有效的充分条件关系;对事实上可得出新知的推理来说,在其前提中一定含有充分条件关系。人们对充分条件关系的逻辑含义的研究,从古希腊的亚里士多德、费罗(Philo)、我国先秦的墨翟,迄今两千多年来,始终是众说纷纭、莫衷一是。尽管如此,有一点却是十分明确的:非纯真值的充分条件事件“若 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}$”不是正统数理逻辑所研究的纯真值复合事件。

2.7.1 充分条件关系与必然关系同义

在流行的形式逻辑著作中,往往喜欢用“$\boldsymbol{A}$ 必然 $\boldsymbol{B}$”来界说充分条件关系的“若 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}$”。例如,在我国著名的逻辑学家金岳霖等著的《逻辑通俗读本》中,就是用“有 $\boldsymbol{A}$ 必然有 $\boldsymbol{B}$”来定义 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的充分条件的“若 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}$”的。这就是说,一种相当有代表性的传统形式逻辑观点是:必然关系就是二元的非纯真值的充分条件关系,就是二元的非纯真值的联结词“若,则”的逻辑语义。可是,令人遗憾的是,鉴于本身也可以作为联结词的必然的逻辑含义一直不曾被规定清楚,故此,由之界说的充分条件关系迄今未获严格准确、一致公认的定义。不过,非常幸运的是,尽管上述二者的逻辑含义都还不曾清晰地揭举,然而对于那种用必然来界说充分条件关系的颇有影响的传统逻辑观点来说,有一点是明确的:从逻辑学意义上说,此二者完全同义。

我们以符号表达式 $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ 表示“$\boldsymbol{A}$ 必然 $\boldsymbol{B}$”或“$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的充分条件”,其中表意的人工符号$\rightharpoonup$称为“充分条件号”,$\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ 就读做“若 $\boldsymbol{A}$ 则 $\boldsymbol{B}$”(这称为“符号式的念法”),而“$\boldsymbol{A}$ 必然 $\boldsymbol{B}$”或“$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的充分条件”则是符号式的逻辑语义。以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为前、后支的非纯真值复合事件 $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ 就称为“充分条件事件”。这样一来,至少可用两个不同语句“事物必然处于运动变化之中”、“x 是事物($\boldsymbol{A}(x)$),必然,x 处于运动变化之中($\boldsymbol{B}(x)$)”同义地陈述的事件,用符号就表示成 $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$,其中的逻辑符号 x 称为个体变元。自然语言是讲究精练的,因此,命题 $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ 通常不采用“x 是事物,必然,x 处于运动变化之中”这种啰嗦的说法,而是简洁地陈述为“事物必然处于运动变化之中”。由于省略个体变元,而把其中出现的语词“必然”前后的两个语句紧缩成两个名词,从而将“必然”连接起来的两个语句压缩成一个包含“必然”的语句。正是自然语言的这种

习惯,有时使人觉得,非纯真值复合事件中的二元联结关系“必然”非常像是一元联结关系。

究竟有没有“必然 $\boldsymbol{B}$”这样的事件呢？也就是说,“必然”是不是也可以是一元联结关系呢？从自然语言表述的习惯看,“必然 $\boldsymbol{B}$”这种语句表达方式确实是经常碰到的。譬如,在以实数为论域的实数数学中,就有下述用来陈述数学定理的语句“必然 $x^2 \not< 0$”。通常,为了更符合约定俗成的语言习惯,这个定理往往同义地说成“x 的平方必然不小于零”。这里,用上述语句表达的事件,乍一看,使人觉得似乎具有 $\mathrm{N}\boldsymbol{B}(x)$形,其中,N 表示“必然”,$\boldsymbol{B}(x)$表示“$x^2 \not< 0$”。不过,经过仔细考察,我们发现,上述语句只不过是对充分条件事件 $\boldsymbol{U}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$的一种简练的表述方式,其中,$\boldsymbol{U}$ 表示论域“实数”,$\boldsymbol{U}(x)$表示“x 在论域实数中”或者“x 是实数”,显然,这是个恒真的开事件(或恒取值真的个体－事件函数)。充分条件事件 $\boldsymbol{U}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$也可以陈述为“$x$ 是实数,必然,x 的平方不小于零”,而“x 的平方必然不小于零”则为其同义的简练陈述方式:省去恒真的“x 是实数”(因为,原本以实数为论域,个体变元 x 当然在论域实数中变)不提,为了符合语言习惯,把陈述二元联结关系的语词“必然”移至剩下的那个语句中间,从而把一个冗长的复合句提炼为一个简短的简单句。这就是说,从语言表述上看起来仿佛具有 $\mathrm{N}\boldsymbol{B}(x)$形的事件,其实却是 $\boldsymbol{U}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$形,是 $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$形的充分条件当 $\boldsymbol{A}(x)$为 $\boldsymbol{U}(x)$时的特殊情况。

这里,我们贯彻了在分析逻辑理论问题时的一条重要主导思想:为语句所表述的命题的逻辑结构取决于被语境(上下文或客观环境)所决定的该语句所指谓的客观的逻辑结构(也可称为该语句所表述命题的逻辑内容),而不取决于游离于语境的、在很大程度上被民族的或个人的语言习惯所左右的语句的语言表述方式。显然,被语境单义化了的语句的指谓只有一个,以此指谓为内容的命题也只有一个,然而,同时可用来承载这唯一的命题而具有不同语言表述方式的语句,却有成千上万(如今世界上至少有2500种不同民族的语言,而在每一种民族语言中又存在广泛的同义现象)。这就是说,事实是:被语境单义化了的语句具有一个指谓,陈述一个命题,而同时又可以有与之同义的成千上万个具有不同的语言表述方式的不同语句。由此可见,命题与表述命题的语句的指谓(即客体)一一对应,而命题与承载命题的语句却是多对多关系。正由于此,命题的逻辑结构取决于语句指谓的客观的逻辑结构,而不取决于语言的表述形态。要想通过语句的语言表述形态来分析出为其所承载的命题的逻辑结构,就好比沙里淘金、隔靴搔痒。

至此,我们仍然不曾清楚地规定充分条件或必然关系的逻辑含义。尽管如此,我们还是明确了:从逻辑学意义上说,二者完全同义。下面将要讨论的是:这充分条件和必然关系的完全同义的逻辑学意义上的“义”究竟是什么?

2.7.2 充分条件事件的定义及充分条件关系的两个独立性

物理学确定了：电磁波的传播速度是光速——每秒 30 万公里。月亮与地球之间的精确距离是通过电磁波往返于月球与地球之间的时间测算的。这时，要用到下述必然关系：若电磁波往返于月球与地球间的时间为 x 秒（$\boldsymbol{A}(x)$），则二者的距离为 $x/2\times30$ 万公里（$\boldsymbol{B}(x)$）——也可表述为：电磁波往返于月球与地球间的时间为 x 秒（$\boldsymbol{A}(x)$），必然，二者的距离为 $x/2\times30$ 万公里（$\boldsymbol{B}(x)$）。物理学在实际测出电磁波往返于月球与地球间的时间之前，早就确定上述非纯真值复合事件“若 $\boldsymbol{A}(x)$ 则 $\boldsymbol{B}(x)$”为有（即存在），这是由于存在下述三个事实（x 表示个体变元，在论域中变；e 表示 x 可能取得的值，为论域中的某一个体）：

（1）对于人的历史来说，不管 x 取得的值 e 为几许，有 $\boldsymbol{A}(e)$ 而无 $\boldsymbol{B}(e)$ 这样的事情，在过去、现在和将来都不会发生；

（2）人已经确定了事实（1）；

（3）在人确定事实（1）时，勿需依据 $\boldsymbol{A}(e)$、$\boldsymbol{B}(e)$ 本身的有无。

这里，事实（1）可简称为“不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$”，而这其实就是电磁波的传播速度为 30 万公里/秒这个物理规律；事实（2）就是人在利用上述物理规律来测算月球与地球距离之前早已在物理学中将其确定的这个历史事实；事实（3）可简称“勿需依据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的真假确定”，这个事实的存在明如观火——既然人们还未动手测得电磁波的往返时间，连 x 实际取得的值 e 究竟何许尚且一无所知，怎么可能在确定事实（1）时去依据 $\boldsymbol{A}(e)$、$\boldsymbol{B}(e)$ 本身的真假呢？我们用这三个事实组成一个综合的重要事实：勿需依据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。这个重要事实也可陈述为：可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。我们把包含在这重要事实中的“可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的有无确定”这个性质称为“第一独立性”，并简称为“一独”。于是，对于上述重要事实的陈述可紧缩为：具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。人们依据早已确定的“$\boldsymbol{A}(x)$ 必然 $\boldsymbol{B}(x)$”为有（这个在先），并在其指导下，设计了一套测定的器械，通过实测，获得了 x 的实际取值 e 为 2.6 秒（这个在后），在确定上述二者之后，才能据此二者推得论断 $\boldsymbol{B}(e)$ 即 $\boldsymbol{B}(2.6)$（月球与地球之间的距离为 $2.6/2\times30$ 万公里 $=39$ 万公里）。人们要在并不知道 x 取值 e 为何许的情况下去确定存在“不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$”这个事实时，只可能通过具有一独的方法。这就是说，人们不仅实际上是而且也只可能是具有一独地去得知不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。我们只要将要而尚未实测电磁波往返于月球与地球间的时间的时候就具有一独地得知不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$ 这个事实，并从这个事实出发进行探讨，而把关于人们究竟何以能够和怎样实现具有一独地去得知不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$，人们在认识客观世界的过程中究竟用什么样的

方法导致一独的这种认识论、方法论上的问题，留给哲学家去从长计议。尽管我们暂且说不清这导致一独的方法究竟是什么样的，但是，我们知道确实有暂且说不清的方法能导致显而易见的一独。人们就是凭借这显而易见的一独从已知（前提$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{B}(x)$、$\boldsymbol{A}(e)$为有）进入新知（结论 $\boldsymbol{B}(e)$为有）。

非常明显，“雪是黑的”与“2 加 2 等于 4”、“$\boldsymbol{C}$ 且非 $\boldsymbol{C}$”与“$\boldsymbol{D}$”之间，没有充分条件关系，这是因为，这二例尽管满足“不会是有前而无后”（前例是，无前而有后；后例是，前恒无而后有无不定），然而，人们却依据确定无前或者依据确定有后来确定“不会是有前而无后”的，亦即，这种确定“不会是有前而无后”的方法不具有一独。是否具有一独，这就是与必然关系同义的非纯真值的充分条件关系和真值函数关系实质蕴涵的本质分野。是否具有一独，是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间是否具有充分条件（必然）关系的关键。一独是在为传统形式逻辑所研究的能获得新知的推理格式中出现的充分条件关系的逻辑精髓和理论核心，因此，一独对于以完备而又无误地研究作为从已知进入新知的工具的推理格式为主要使命的充分发展了的当代形式逻辑来说是至关重要的。

与一独相辅相成，对于一系列逻辑的充分条件关系和任意逻辑外的经验的充分条件关系来说，还有一个十分重要的逻辑性质，叫第二独立性。

还是结合上述利用电磁波测算月球与地球的距离这个实例来探讨这个重要的逻辑性质。人们在此之前早已确定了“若 $\boldsymbol{A}(x)$则 $\boldsymbol{B}(x)$”为有（即存在），亦即，早已获得了“具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}(e)$而无 $\boldsymbol{B}(e)$”。在这里出现的 e 称为“新知个体常项”，简称为“新知个体”。尽管明明知道电磁波往返于月球与地球之间的时间 e 是唯一的，然而，在实际测定之前却并不清楚究竟这 e 是多少。所谓“新知个体”，就是实际上唯一确定然而暂且还不为人所知的个体。显然，新知个体 e 与个体变元 x 在逻辑含义上有重大区别：后者是已知而不确定的，亦即，已知个体变元 x 在论域中变，然而，究竟为哪个个体却是不明确的。与之相应地，具有确定含义和真值（物理学已确定为有）的闭复合事件“若 $\boldsymbol{A}(x)$则 $\boldsymbol{B}(x)$”的前、后支 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$都是个体－真值函数，其本身无所谓有无，只有当个体变元 x 取得确定的个体后，才是闭事件，才有确定的含义和真值；而用来定义“若$\boldsymbol{A}(x)$则 $\boldsymbol{B}(x)$”的“具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}(e)$而无 $\boldsymbol{B}(e)$”中的 $\boldsymbol{A}(e)$、$\boldsymbol{B}(e)$都是闭事件，都不是个体－真值函数，分别是个体－真值函数 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$当 x 取值为 e 时的值，事实上具有确定的含义和真值，只是暂且还不为人所知。现在，请注意下述重要事实：人们在实测电磁波往返于月球与地球间的时间（即知道 $\boldsymbol{A}(e)$中的新知个体 e 并同时证实 $\boldsymbol{A}(e)$为有）时，是根本不必事先知道月球与地球间的距离究竟是多少的（即事先无须知道 $\boldsymbol{B}(e)$的真值）。事情甚至是，只有在知道了电磁波往返于月球与地球间的时间为 2.6 秒，亦即，确定了 $\boldsymbol{A}(e)$为有之后，才能由之推断月球与地球间的距离为 39 万公里，亦即，确定结论

$\boldsymbol{B}(e)$为有。这个事实至关重要。这里所揭举的重要事实可以简要地表述为：可在未确定$\boldsymbol{B}(e)$有无的情况下确定$\boldsymbol{A}(e)$为有。这也可以说成：可独立于$\boldsymbol{B}(e)$的真值确定$\boldsymbol{A}(e)$为有。我们称这个事实为“第二独立性”，并简称为“二独”。这就是说，经验的“若$\boldsymbol{A}(x)$则$\boldsymbol{B}(x)$”不仅具有一独，而且具有二独。像一独一样，这二独对于以获得新知为主要使命的逻辑科学来说，也具有决定性的重要意义。

上述包含在“若$\boldsymbol{A}(x)$则$\boldsymbol{B}(x)$”中的一独和二独由于与前、后件的全部具体内容（由逻辑内容和此外的经验内容组成）有关，因而称为经验的一独和二独，这种“若$\boldsymbol{A}(x)$则$\boldsymbol{B}(x)$”称为经验的充分条件事件，其中的“若，则”称为经验的充分条件联结关系。

下面，我们来探讨只与前、后件的逻辑内容有关的逻辑的一独和二独。我们来分析$\boldsymbol{A}(e) \wedge [\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)]$与$\boldsymbol{B}(e)$之间是否满足充分条件即必然关系（相应地，是否具有一独），以及，是否具有二独。为了方便，用$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$分别表示$\boldsymbol{A}(e) \wedge [\boldsymbol{A}(x) \in \boldsymbol{B}(x)]$、$\boldsymbol{B}(e)$。显然有下述事实：

（1）对于人的历史来说，有$\boldsymbol{C}$而无$\boldsymbol{D}$这样的事情，过去、现在和将来都不会发生；

（2）人早已确定了事实（1）；

（3）在人确定事实（1）时，并未依据$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$本身的有无。

事实（1），即不会是有$\boldsymbol{C}$而无$\boldsymbol{D}$，真可说是久经考验、颠扑不破的了；事实（2）的建立至少可追溯到两千多年前的亚里士多德和斯多噶学派（推理式$\boldsymbol{A}(e) \wedge [\boldsymbol{A}(x) \in \boldsymbol{B}(x)] \rightarrow \boldsymbol{B}(e)$分别类似于三段论第一格 AAA 式和充分条件假言推理肯定式）；事实（3）依然明如观火：人们只依据$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的逻辑结构便可确定事实（1），而仅仅依据$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的逻辑结构是不足以确定$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$本身的有无的。这三个事实确定了非纯真值的复合事件$\boldsymbol{A}(e) \wedge [\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)] \rightarrow \boldsymbol{B}(e)$（为便于讨论，以$\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$表示）为有。称$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的逻辑结构的指谓为$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的逻辑内容，此外的内容称为$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的逻辑外的经验内容，并简称为经验内容。这里，仅据$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的逻辑内容，不管$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的经验内容，便可独立于$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$的有无值确定不会是有$\boldsymbol{C}$而无$\boldsymbol{D}$，亦即，确定$\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$为有。这种仅据逻辑内容确定的$\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$为有的有称为逻辑真，也叫做恒真、有效，$\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$就称为恒真的充分条件事件或有效的充分条件事件，其中的“若，则”就称为恒真的“若，则”或有效的“若，则”。有效“若，则”的一独仅由前、后件的逻辑内容提供，称为逻辑一独，以区别于需要由全部具体内容（逻辑内容加经验内容）提供的经验一独。

鉴于$\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)$具有经验的一独和二独，于是：$\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)$为有可独立于$\boldsymbol{B}(e)$的有无值确定（$\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)$的经验一独转化为$\boldsymbol{C}$中的右合取支对$\boldsymbol{D}$的二独）；$\boldsymbol{A}(e)$为有可独立于$\boldsymbol{B}(e)$的有无值确定（$\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)$的经验二独转化为$\boldsymbol{C}$中的左合取支对$\boldsymbol{D}$的二独）；故而，$\boldsymbol{C}$（即$\boldsymbol{A}(e) \wedge [\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(x)]$）为有可独立

于 $\boldsymbol{D}$（即 $\boldsymbol{B}(e)$）的有无值确定，亦即，$\boldsymbol{C}$ 对 $\boldsymbol{D}$ 具有二独。由于 $\boldsymbol{C}$ 对 $\boldsymbol{D}$ 的二独仅由 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 的逻辑内容提供，亦即，仅据 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 的逻辑结构便可得出 $\boldsymbol{C}$ 对 $\boldsymbol{D}$ 的二独，因此，这里的二独称为逻辑二独。这样，我们阐明了 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 间不仅具有逻辑一独，而且还具有逻辑二独，并分析了 $\boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$ 的逻辑一独、二独如何由 $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ 的经验一独、二独转化而来。至此，我们顺便给出推理式和新知的定义，并据此阐明推理式必然导致新知。若 $\boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$ 有效且具有二独，则称 $\boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$ 为推理式。亦即，所谓推理式，就是具有二独的有效充分条件推理式。以“$\vdash \boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$”表示 $\boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$ 为有效式，“$\vdash$”号中的一个短横就表示逻辑一独；以“$\Vdash \boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$”表示 $\boldsymbol{C} \rightharpoonup \boldsymbol{D}$ 为推理式，$\boldsymbol{C}$ 称为假设或前提，$\boldsymbol{D}$ 称为推断或结论，“$\Vdash$”号中的两个短横就表示逻辑一独和逻辑二独。$\boldsymbol{D}$ 对 $\boldsymbol{C}$ 来说是新知，当且仅当，可独立于 $\boldsymbol{D}$ 的真值确定 $\boldsymbol{C}$ 为真。若仅据 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 的逻辑结构即可确定可独立于 $\boldsymbol{D}$ 的真值确定 $\boldsymbol{C}$ 为真，则称 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的逻辑新知。任一推理式的结论对前提来说都是逻辑新知，因为，前提对结论具有逻辑二独。包含在推理式中的逻辑的一独、二独为人们开拓了仅据前提、结论的逻辑结构即可由已有知识（已知）进入逻辑新知识（新知）的途径。

推理式就是对客观推理律的刻画，表达了人对客观推理律的认识。

一独和二独合称两个独立性并简称为两独。两独可分经验的和逻辑的，前者是后者的渊源和归宿。两独是充分条件（必然）关系的逻辑精髓，是作为从已知进入新知的工具的逻辑科学的两块基石。如果说，逻辑科学如今已成为根深叶茂、硕果盈枝的大树，那么，人们早先对事实上包含在充分条件（必然）关系中的两独的朦胧的认识则是那大树萌芽时的两片叶子。

可以严格证明：作为正统数理逻辑重要研究对象的蕴涵重言式的前、后件之间不满足两独，因此，与作为从已知进入新知的工具的推理式殊异。蕴涵重言式只表达了二值的离散数学真理，可应用于获取新知之外的需要这种二值的数量关系规律的场合（如接点电路、计算机门电路等）。

鉴于充分条件事件 $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ 含有一独（大都还有二独），其本身的有无不取决于其前、后件 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的有无，故而不是有无函数（或称真值函数），因此，充分条件事件称为非纯真值复合事件，充分条件关系称为非纯真值联结关系。开事件是个体－有无函数，其本身的有无取决于在其中出现的个体变元在个体域中的取值，这时，个体变元这个出现称为自由的。开事件就是个体变元自由出现的事件。而闭事件则或者不出现个体变元，或者虽出现个体变元，但其本身的有无不取决于个体变元的取值，这时，个体变元的这个出现就称为约束的。闭事件就是不出现个体变元，或只有个体变元的约束出现的事件。闭事件的有无不取决于个体变元的取值，故而不是个体－有无函数。当 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$（$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示事件，括弧中的 x 表示在其中出现的个体变元）均为 1 元开事件（即 1 元个体－有无函数）时，$\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ 却为闭事件。一般地，当 $\boldsymbol{A}(x_1, \cdots, x_n)$、$\boldsymbol{B}(x_1, \cdots, x_n)$ 均为 n

元事件时，$\boldsymbol{A}(x_1,\cdots,x_n)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x_1,\cdots,x_n)$却是闭事件。这是因为，非纯真值的充分条件关系含有一独，故而在事实上（不管人是否认识）能约束同时在其前、后件中自由出现的个体变元。这是非纯真值的充分条件关系的从一独派生的又一个重要的、客观的逻辑性质。自发而又朦胧地感受到充分条件关系的这个重要客观性质的人们在事实上从来不借助于什么“莫须有”的施加于个体变元的“量词”来约束个体变元（例如：“凡兰皆虫媒”——“x是兰，则，x虫媒”；“相邻的自然数必互素”——“x与y是相邻的自然数，则，x与y互素”）。到了20世纪，为了逻辑中全面采用数学方法（这从方法论上说无疑是正确的），从而彻底抛弃了充分条件关系中的一独及其派生的重要性质的草创正统数理逻辑的数学家（以提出“复合命题的真值是其支命题的真值的真值函数”这个所谓“弗雷格原理”的弗雷格为代表），才不得不在理论上求助于对无限域来说根本无法实施（因此在事实上人类从来不曾使用过）的竟然要求“无限合取”的所谓“量词”。

2.7.3 对“充分条件”的界说的历史回顾

在逻辑史上，“充分条件”作为重要的联结关系，历来都是逻辑学家们关注的焦点。其原因是：任何推理格式的前提（前件）与结论（后件）之间一定存在普遍有效的充分条件关系（通常被同语反复地说成“推出关系”）；对事实上可从已有知识得出新知识的推理来说，在其前提（前件）中一定含有充分条件关系。人们对充分条件关系的逻辑含义的探究，已有十分悠久的历史。早在2400年前，《墨经·经说上》对“大故”与“小故”（充分条件与必要条件关系）就曾做出了下述规定：“有之必然”，“无之必不然”。在古希腊，斯多噶学派的达多勒斯对充分条件关系的含义界说为：“不可能前件真而后件假。”而14世纪法国巴黎大学校长布利丹则规定为：“一个命题称做另一个命题的前件，如果当这两个命题给定时，不管这两个命题的意义是什么，不可能第一个是真的，而第二个是假的。”《墨经》中的“有、无”指的是客观事件的有、无，因此，墨子所说的“充分条件”（即“大故”）理应是客观事件间的客观的联结关系。而客观事件则作为思想的命题的思考对象，因此，命题的“真、假”与为其思考的事件的“有、无”同义：事件为有，命题为真；事件为无，命题为假。达多勒斯和布利丹所提出的界说可同义地改说成：“不可能有前件而无后件”（当然，这里“前、后件”均指客观事件），而这又与将墨子的话译成现代汉语“有前件必然有后件”等价，因为，“不可能不”与“必然”等价。可见，经历了漫长的1800年，对充分条件关系的界说却一直踏步不前。

尽管，充分条件关系是传统形式逻辑的主要研究对象，然而，对此至今尚无严格准确、一致公认的定义。国内一些形式逻辑书（如金岳霖的《形式逻辑通俗读本》）通常采用与2000多年前在《墨经》中提出的“有之必然”相应的“有甲必然有乙”这种素朴的界说。虽然这种十分古老的规定在当时曾经是辉煌的逻辑

思想,可是经不起当代形式逻辑的严格考核。譬如说,当后件乙本身就是必然的事件(如乙为“下雨或不下雨”)时,对于任意的前件甲(如甲为“我姓龚”)来说,似乎满足“有甲必然有乙”;可是,任意的甲绝非本身就是必然却与甲毫无内在联系的乙的充分条件。又譬如,“甲,必然,乙必然甲且乙”是否成立?在这种出现两次(甚至更多)“必然”的较为复杂的情况下,要用那种素朴的规定作为鉴别其成立与否的逻辑标准,那就难以胜任了。

其实,“……是……的充分条件”、“……必然……”作为二元联结关系,就其逻辑含义来说,始终未曾被清晰地揭露,前者的逻辑含义始终是朦胧的,后者亦然。因此,想用后者来界说前者,依旧摆脱不了朦胧。但是,尽管如此,在这2400年来的传统形式逻辑的发展过程中,始终坚持充分条件关系的前、后件之间必须具有内在的必然联系这一点,无疑是难能可贵、殊堪珍惜的黄金般闪光的历史遗产,向后继者指明了正确的探索方向。

为了摆脱朦胧,图谋清晰(这可以理解,应予赞许),却把那黄金般闪光的正确方向弃如敝屣(这便舍本逐末,大谬不然了)的另一条解决途径便乘虚而入。

从公元前4世纪古希腊哲学家麦加拉学派重要代表人物费罗开始,直到现代数理逻辑奠基人之一,19世纪的德国数理逻辑学家弗雷格,他们走着另外一条途径。费罗认为:“一个条件命题是真的,只要不是前件真、后件假。”这个陈述可简化为:“不是前真而后假。”这就开了现代数理逻辑把充分条件关系处理成二值的离散数学函数实质蕴涵的先河。弗雷格继承和发展了费罗的观点,提出了著名的弗雷格原理:“复合命题的真假只取决于支命题的真假,是支命题真假的一个函数。”他认为:“我这里的任务是通过将这种附属物分离出去,剖析出一种称为逻辑核心的两个思想的结构,我称这种结构为假言思想结构。”(《弗雷格哲学论著选辑》,商务印书馆出版)他将前、后件之间的内在必然联系这个逻辑精髓当做“附属物”分离出去,剩下的“逻辑核心”真值函数只不过是硬塞给逻辑科学的理论糟粕(当然,在离散数学中仍不失为精华)。这样一来,在现代的正统数理逻辑中,充分条件关系被当做真值函数关系“实质蕴涵”(往往简称为“蕴涵”)。以“**A→B**”表示“命题**A**蕴涵命题**B**”(亦即正统数理逻辑中的“若**A**,则**B**”或“**A**是**B**的充分条件”)。真值函数**A→B**的真值函数(与二元的“乘函数$x \times y$”相仿佛)表(简称为“真值表”)如下:**A**、**B**,**A→B**:1、1得1;1、0得0;0、1得1;0、0得1。其中,“1”、“0”分别表示“真”、“假”。这种把庄严厚重、坚实沉稳的“充分条件关系”处理成上述东搭西配、轻飘草率的真值函数的做法,尽管具有数学意义上的一清二楚、毫不含糊的清晰性,却彻底背离了传统形式逻辑一贯坚持的正确的研究方向,充分条件前后件之间必须具有内在的必然联系这个殊堪珍惜的理论精髓被清除得干干净净。正由于此,这个函数化了的所谓“充分条件关系”与人们的普通逻辑思考实际方枘圆凿、南辕北辙。传说当费罗

向人们解说他的观点时，闭上眼睛用手随便一指，说："如果这是白的，那么我正在说话。"不管他指的是什么东西，也不管那件东西是不是白的，由于他事实上正在说话，上述"充分条件命题"居然为真。这就是这个离奇的蕴涵的几个著名的离奇的特性之一："任何命题蕴涵真命题"。与之齐名的离奇特性可举出："假命题蕴涵任何命题"，"任意两个命题，其中至少有一个蕴涵另外一个"（这个离奇的特性还有一个好听的名称"蕴涵的连通性"），等等，不一而足。我们模仿着费罗，不妨也举一个例子试试："如果我死了，那么我活着。"由于我正在填格子，故而这个"充分条件命题"也竟然为真。随便一样不管是否白色的东西居然是费罗正在说话的"充分条件"，而一个人死了竟然又会是他活着的"充分条件"。这种在理论上如此这般随心所欲地戏弄、践踏坚如磐石、固若金汤的充分条件关系，真是人类智慧中的闹剧。

从费罗到弗雷格对充分条件界说的发展途径，由于背离普通逻辑思维实际，尽管作为离散数学函数关系的数学含义晶莹透彻，是离散数学中的十分精彩的部分，在开关线路、计算机门电路等领域中可获得重要应用，然而，在人的普通逻辑思维领域中硬是要将蕴涵充做"充分条件"的"逻辑核心"（其后继者称之为"逻辑抽象"或"真值抽象"），虽然清晰却是谬误的。

直到 1976 年，我国逻辑学家林邦瑾教授创立崭新体系制约逻辑，才严格、准确地把充分条件关系刻画清楚，揭举了充分条件关系的重要性质——两个独立性。刻画清楚后的充分条件关系称为制约关系。为了尊重历史的习惯，我们把制约关系同义地称为充分条件关系。

2.7.4　两个独立性从经验进到逻辑的历史追溯

人类智能的根本特征是能从已知得出新知、从事发明创造。作为个体的人的知识来源有三：亲身感知、他人告知、逻辑推知。然而对全人类来说，获取知识的途径却只有一、三两种，因为并无"他类告知"这一途径。作为人类获取知识的重要途径，逻辑推知就是在头脑中进行的从已知得出新知这种智能活动，这是作为其物质原型的客观世界中从已有事件必然过渡到新事件的正确反映、如实摹写。例如，月球与地球间的距离是通过具有光速的电磁波往返于二者间的时间测定的。在此前，物理学已经确定了："电磁波往返于月球与地球间的时间为 x 秒，必然，月地间的距离为 $x/2\times30$ 万公里。"我们以"$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{B}(x)$"表示上述"必然事件"，其中，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别表示"必然"的前、后两个事件；x 称为"个体变元"，在时间"……秒"中变；$\rightharpoondown$ 为"充分条件号"，"……$\rightharpoondown$……"表示"……必然……"，或"若……，则……"，即通常所说的"必然联系"或"充分条件关系"（但绝不是数理逻辑中的真值函数"实质蕴涵"，因为充分条件关系不是任何函数）。事件 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有、无须取决于 x 的实际取值，可以为有，也可以为无。在实

际测定 x 究竟为多少秒之前,确定不了 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 何时为有,何时为无。然而,就在这种 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有无未定的情况下,物理学就确定了充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$ 为有,其含义为:"不管 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 本身的有无,不会是有 $\boldsymbol{A}(x)$ 而无 $\boldsymbol{B}(x)$。"这也可改说成:"可独立于 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}(x)$ 而无 $\boldsymbol{B}(x)$。"这其中的"可独立于 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有无确定"就称为充分条件关系的"第一独立性",并简称为"一独"。显然,电磁波往返于月球与地球间的时间究竟为多少秒可独立于月球与地球间的距离究竟为多少公里确定,亦即"$\boldsymbol{A}(x)$ 何时为有可独立于 $\boldsymbol{B}(x)$ 的有无确定。"这里的"$\boldsymbol{A}$ 为有可独立于 $\boldsymbol{B}$ 的有无确定"称为充分条件关系的"第二独立性",并简称"二独"。"一独"、"二独"合称"两个独立性",简称"两独"。物理学确定了具有两独的充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$ 为有,这里的充分条件关系为"逻辑外的经验充分条件关系",简称为"经验充分条件"(这个实例为"物理的充分条件"),包含在其中的两独称为"经验两独"。像在物理学中早已确定了经验充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$(甲)为有一样,在逻辑学中也早已确定了逻辑充分条件事件 $\{\boldsymbol{A}(e)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]\}\rightharpoonup\boldsymbol{B}(e)$(乙)为有,其中,$e$ 为确定的某秒(这可以实际测定,在未测定前为待定),称为"个体常项"。乙与甲不同,只凭乙的客观的逻辑结构(不管其中包含的逻辑外的经验性质)便可确定为有,这称为"恒有"(在时间上永恒)、"普有"(在空间上普适),也称为"逻辑有效",简称"有效"。因此,乙中后面的那个充分条件称为"逻辑充分条件",显然,前后件之间也具有两独,称之为"逻辑两独"。这是经验充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$ 中的经验两独向逻辑充分条件事件(乙)中的逻辑两独的逻辑升华。经验两独是逻辑两独的渊源与归宿。时间上永恒、空间上普适的有效事件称为"客观世界的逻辑规律",简称为"逻辑规律"。具有逻辑两独的逻辑规律称为"客观推理",乙便是客观推理,命名为"内涵三段律"。前件确定为有的客观推理称为"客观证明"。经实测,e 为 2.6 秒,于是,$\boldsymbol{A}(2.6)$ 表示"电磁波往返于月球与地球间的时间为 2.6 秒",此时,有 $\{\boldsymbol{A}(2.6)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]\}\rightharpoonup\boldsymbol{B}(2.6)$(丙),这丙便是客观证明,带有逻辑两独地从前件 $\{\boldsymbol{A}(2.6)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]\}$ 为有必然过渡到后件 $\boldsymbol{B}(2.6)$(即月球与地球间距离为 39 万公里)为有。关于客观世界的充分条件事件、客观推理、客观证明的思考,就分别称为"充分条件命题"、"思想推理"、"思想证明",后三者分别是前三者在人类头脑中以脑神经元搭接的方式实现的摹写,无论是逻辑学还是其他科学对其本身的"思维结构"几乎一无所知,逻辑学为了便于讨论只不过按被其思考的客观对象(其客观结构一清二楚)分别起个相应的名称,如此而已。

逻辑思维的历史和人类的历史一样长久。先是依据现实世界的充分条件关系的从已知进入新知的自发的逻辑思维,然后才有对这种逻辑思维的系统研究,并产生了逻辑理论。逻辑理论的历史源远流长,系统的逻辑理论约始于公元前

六世纪至公元前四世纪,其主要的发源地有三,除古希腊亚里士多德名词逻辑与斯多葛学派的命题逻辑外,还可以举出:由公元前六世纪印度婆罗门六大教派之一正理派的乔达摩(足目)草创,并由其后世弟子集体完成的《正理经》(五卷),以及后来佛教法相宗大师陈那的《因明正理门论》和其学生商羯罗主发展而成的《因明入正理论》(此二者均为玄奘的译本,因明为梵语 Hetuvidy asthana 的意译,就是古代印度关于推理的学说);以及我国春秋战国时期以墨翟、荀况和韩非为代表的墨家、名家和“辩者”的名辩之学的逻辑体系。在古印度的因明中,五支论式的典型例子如下:

(宗)此山有火

(因)以有烟故

(喻)如灶

(合)此(山)亦如是(有烟)

(结)故(此山)如是(有火)

这种五支论式可依据其宗、因归结为:“此山有烟,所以,此山有火”。它带有浓厚的实际逻辑思维的色彩:紧密结合经验内容,而且,形式化以后不是普遍有效的。这还只能说是真正的形式逻辑的坚实地植根于人类逻辑思维实际的萌芽状态。像“此山有烟,所以,此山有火”这种论式不仅古人常用,就是现代人也常用。我们把这种依据经验内容而且并不普遍有效的论式表示成“α,所以,β”,并以 Ω 表示整个论式。我们把 Ω 这样的由长期的社会实践验证为正确然而并不普遍有效的论式称为经验论式。像 Ω 这样的经验论式在《墨经》中也可以找到。现在我们就来分析经验论式 Ω 中的“所以”的逻辑含义。显然:这里的“所以”有“不会是 α 真而 β 假”的意思,因为,人们不会说“此山有烟,所以,此山无火”。但是,还有别的意思,因为人们也不会说“太阳是方的,所以,此山有火”,或者,“此山有烟,所以,太阳是圆的”。这是由于,尽管这两句话都满足“不会是前真而后假”,然而,要确定这一点必须预先确定前件为假或确定后件为真。这违背了 Ω 中的“所以”的本意,因为,人们在说这样的“所以”时总是要去确定前件为真,在说“所以”之前并未确定后件为真,而是通过 Ω 去得出后件为真的。可见,这里的“所以”的含义至少是“可以在既不需要确定 α 假又不需要确定 β 真的情况下确定不会是 α 真而 β 假”。由于确定 α 真与 β 假无助于确定“不会是 α 真而 β 假”。因此,这个至少具有的含义可以改说成“可在既不需确定 α 的真假也不需要确定 β 的真假的情况下确定不会是 α 真而 β 假”,这可简化为“可独立于 α、β 的真假确定不会是 α 真而 β 假。”我们把其中的“可独立于 α、β 的真假确定”称为“具有第一独立性”,并简称为“具有一独”。这样,“所以”的含义至少是“具有一独的不会是 α 真而 β 假”。我们这里说的“至少是”有这样的含义——人们不会在下述语句之间使用像 Ω 中那样的“所以”:

γ,跟,γ;

γ 与 δ,跟,γ;

γ,跟,γ 或 δ。

这是因为,尽管上述出现在“跟”的两边的语句之间都满足“具有一独的不会是前真而后假”,然而,在未确定后件为真的情况下不能确定前件为真(请注意,这里说的是确定)。而这又违背了 Ω 中的“所以”的本意,因为,人们在说 Ω 中的“所以”时,总是要在未确定后件为真的情况下就去确定前件为真的,而后件为真则是要通过确定前件为真与这个“所以”去得出的。可见,Ω 中的“所以”的含义是“可在不需要确定 β 真的情况下确定 α 真,并且,具有一独的不会是 α 真而 β 假”。由于确定 β 假无助于确定 α 真,因此,这个含义可以改说成“可在不需要确定 β 的真假的情况下确定 α 真,并且,具有一独的不会是 α 真而 β 假”。这“并且”的前面部分可简化为“可独立于 β 的真假确定 α 真”,并把这称为“具有第二独立性”,简称为“具有二独”。“具有一独”与“具有二独”合称“具有两个独立性”。因此,Ω 中的“所以”的含义是“具有两个独立性的不会是 α 真而 β 假”。

随着逻辑科学的不断发展,古希腊的斯多噶学派把像 Ω 那样的不普遍有效的经验定理发展成普遍有效的逻辑定理:α,若 α 则 β,所以,β。这就是著名的充分条件推理式。我们以 θ 表示这个逻辑定理。有了逻辑定理 θ 后,一些逻辑书往往把原来的那个经验定理 Ω 当做 θ 的省去了充分条件前提的省略式。可是,事实是:至少在 θ 产生之前三个世纪,就已经有了 Ω。因此,事实是:Ω 不是 θ 的省略,而 θ 是 Ω 的发展。直到如今,并不知道有 θ 的人们仍然在自发地使用 Ω。θ 与 Ω 的根本区别在于是否普遍有效。显然,用任意命题代入 θ 中的 α、β,θ 中的“所以”事实上始终满足“具有两个独立性的不会是前真而后假”,这是由于 Ω 中的“所以”具有的两个独立性事实上从 Ω 转移到 θ:Ω 的一独、二独转变成 θ 的一独;Ω 的一独转变成 θ 的第 2 前提的二独,Ω 的二独转变成 θ 的第 1 前提的二独。因此,θ 中的“所以”的含义是“普遍有效的具有两个独立性的不会是前真而后假”。然而,Ω 中的“所以”的含义却只能是“不普遍有效的具有两个独立性的不会是前真而后假”。譬如,我们分别以“此山有烟”与“本地路湿”分别代入 Ω 中的 α 与 β,这就成为“此山有烟,所以,本地路湿”。即使在此山确实无烟或本地真的路湿的情况下,这个“所以”也仍然是没道理的。这种从 Ω 发展到 θ,从只在一定领域内生效的经验定理进到对任意领域都普遍有效的逻辑定理,从包含在经验充分条件中的经验的两个独立性进到包含在逻辑充分条件中的逻辑的两个独立性,是逻辑史上一次光辉的飞跃。古代逻辑家对人类文明做出了巨大贡献。然而,遗憾的是:当初的人们一直不曾注意到像 Ω 那样的经验定理中的“所以”事实上具有两个独立性,也不曾注意到这两个独立性从经验定理到当初提

出的为数非常有限的逻辑定理的事实上的转移。正由于此,舍弃了对作为从已知进入新知的工具的推理式起决定作用的两个独立性而仅仅抽取“不是前真而后假”的实质蕴涵就应运而生;于是,像Ω那样的从已知进入新知的工具就逐渐演变成像近代逻辑中的重言式那样的打赌不输的方法。正如现代工业的发展带来了环境污染一样,现代逻辑的发展产生了蕴涵怪论。污染使人们留恋过去干净的环境,怪论使人缅怀以往纯洁的逻辑。当然,历史不会倒退,已经进到更高的发展阶段的处于复杂状态的事物不会回复到早先低级的简单状态中去。消除由现代工业产生的环境污染要靠现代工业;排除由现代逻辑产生的蕴涵怪论也要靠现代逻辑。解铃还需系铃人。

2.8　导出的非纯真值联结关系和非纯真值复合事件

在本书语境中,充分条件关系就是必然关系。充分条件关系是基本的非纯真值联结关系。自亚里士多德以来2400年,人们对充分条件关系给予了极大的关注。与此同时,人们对充分条件关系以外的其他一些非纯真值联结关系也非常关心。这些关系及由它们构成的非纯真值复合事件有六类。

2.8.1　必要条件关系和必要条件事件

必要条件关系用符号表达为$\leftharpoondown$,读做“倒半箭”或“只有,才”。由必要条件关系联结基础事件构成的非纯真值复合事件称为必要条件事件。其符号表达式为:$\boldsymbol{A}\leftharpoondown\boldsymbol{B}$。可用充分条件关系刻画为:

$$\boldsymbol{A}\leftharpoondown\boldsymbol{B}=\mathrm{df}\quad\boldsymbol{B}\rightharpoondown\boldsymbol{A}$$

2.8.2　约合关系和约合事件

约合关系可称“可以关系”,用符号表示为!,读做“约合”或“可以”。由约合关系联结基础事件构成的非纯真值复合事件称为约合事件。约合事件的符号表达式是:$\boldsymbol{A}!\boldsymbol{B}$。可用充分条件关系和否定关系刻画为:

$$\boldsymbol{A}!\boldsymbol{B}=\mathrm{df}\ \neg(\boldsymbol{A}\rightharpoondown\neg\boldsymbol{B})$$

2.8.3　尽举相容选择关系和尽举相容选择事件

尽举相容选择关系用符号表示为$\upharpoonleft$,读做“右上半箭”或“尽举相容选择”,还可简化地读做“尽举相容”。由其联结基础事件构成的非纯真值复合事件可称为尽举相容选择事件,简称“尽举相容事件”。尽举相容事件的符号表达式为$\boldsymbol{A}\upharpoonleft\boldsymbol{B}$。可用充分条件关系和否定关系刻画为:

$$\boldsymbol{A}\upharpoonleft\boldsymbol{B}=\mathrm{df}\ \neg\boldsymbol{A}\rightharpoondown\boldsymbol{B}$$

2.8.4　尽举反相容选择关系和尽举反相容选择事件

尽举反相容选择关系用符号表示为$\upharpoonleft$，读做“左上半箭”或“尽举反相容选择”，还可简化地读做“尽举反相容”。由其联结基础事件构成的非纯真值复合事件可称为尽举反相容选择事件，简称“尽举反相容事件”。尽举反相容事件的符号表达式为$\boldsymbol{A} \upharpoonleft \boldsymbol{B}$。可用充分条件关系和否定关系刻画为：

$$\boldsymbol{A} \upharpoonleft \boldsymbol{B} = \mathrm{df}\quad \boldsymbol{A} \rightharpoonup \neg \boldsymbol{B}$$

2.8.5　尽举不相容选择关系和尽举不相容选择事件

尽举不相容选择关系，用符号表示为$\uparrow$，读做“尽举不相容选择”或“上箭”，还可简化地读做“尽举不相容”。由其联结基础事件构成的非纯真值复合事件可称为尽举不相容选择事件，简称“尽举不相容事件”。尽举不相容事件的符号表达式为$\boldsymbol{A} \uparrow \boldsymbol{B}$。可用充分条件关系、合取关系和否定关系刻画为：

$$\boldsymbol{A} \uparrow \boldsymbol{B} = \mathrm{df}\quad (\boldsymbol{A} \rightharpoonup \neg \boldsymbol{B}) \wedge (\neg \boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B})$$

2.8.6　充分必要条件关系和充分必要条件事件

充分必要条件关系可简称“充要条件关系”，用符号表示为$\rightleftharpoons$，读做“当且仅当”或“左右半箭”。由其联结基础事件构成的非纯真值复合事件可称为充分必要条件事件，简称“充要条件事件”。充分必要条件事件的符号表达式为$\boldsymbol{A} \rightleftharpoons \boldsymbol{B}$。可用充分条件关系、合取关系刻画为：

$$\boldsymbol{A} \rightleftharpoons \boldsymbol{B} = \mathrm{df}\quad (\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \rightharpoonup \boldsymbol{A})$$

2.9　客观世界的事件

2.9.1　事件的形成准则

真值函数关系（以$\neg$、$\wedge$作为基本的）称为纯真值联结关系，充分条件关系称为非纯真值联结关系，此二者合称联结关系。开事件（即个体 – 真值函数）、真值函数都是函数关系，因而是数学关系，是数学的研究对象；充分条件关系则不是函数关系，因而不是数学关系，不是数学的研究对象，由于包含于其中的两个独立性是向人类认识客观世界提供从已知进入新知的工具的逻辑科学的两块基石，因而是真正的逻辑关系，是逻辑科学的主要研究对象。鉴于在主要的逻辑关系的辖域中会出现个体 – 真值函数和真值函数关系，故而，此两类函数关系在这种情况下就成了次要的逻辑关系，因此，逻辑科学也必需附带研究这两类兼是数学关系的次要的逻辑关系，当做一种辅助。

纯真值复合事件和非纯真值复合事件称为复合事件。原子事件和复合事件统称为事件。

和项一样,事件是另一种为当代形式逻辑语义学所研究的客观世界的重要对象。同样,和项一样,事件作为一种客观的存在形态,具有客观的形成准则;是否符合这种形成准则,就成了鉴别任一对象究竟是否为事件的客观标准。事件的客观的形成准则如下:

(1) 任一原子事件 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 是事件;

(2) 若 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 是事件,则 $\neg\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{u}\rightarrow\boldsymbol{v}$ 是事件;

(3) $\boldsymbol{w}$ 是事件,仅当 $\boldsymbol{w}$ 满足(1)或(2)。

这里,黑斜体小写拉丁字母 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 指称任意对象。以黑斜体大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$,加撇或下标指称任意事件。

显然,对于正在进行的关于事件的讨论来说,存在着互有紧密联系然而又有严格区别的下述三者:

(1) 一个由客观的事件组成的集 $\boldsymbol{A}$ 及其客观的共仅属性 $\boldsymbol{\alpha}$(客体);

(2) 关于客观的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\alpha}$ 的认识——概念"事件"及其递归定义(思考——脑神经元的一种搭接);

(3) 表述(2)的自然语言、人工语言组成的定义句"事件的形成准则……:(1)……;(2)……;(3)……。"(语言—— 一串声音或笔画)。

上述三者的联系和区别是:①是讨论的对象;②就是正在进行的讨论本身(但不是讨论的对象);③是讨论的语言载体(也不是讨论对象)。总起来说:由定义句(3)表述概念"事件"的递归定义(2),揭举客观的事件之集 $\boldsymbol{A}$ 的客观的共仅属性 $\boldsymbol{\alpha}$(1)。

若事件 $\boldsymbol{A}$ 在事件 $\boldsymbol{B}$ 中出现,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的子事件。$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的子事件。当 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的子事件时,$\boldsymbol{B}$ 可以是也可以不是 $\boldsymbol{A}$ 的子事件。若 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的子事件且 $\boldsymbol{B}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的子事件,则称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的真子事件,亦称支事件,并简称为支。

事件可按是否含有联结关系,或者是否有支,二分为原子事件和复合事件。从基础事件出发,复合事件按为其所含有的联结关系是纯真值的还是非纯真值的,二分为纯真值复合事件和非纯真值复合事件,后者是逻辑科学的主要研究对象。事件还可以按是否含有个体变元的自由出现,或者,是否为个体-真值函数,二分为闭事件和开事件。非纯真值的闭事件是逻辑科学的主要研究对象。正由于非纯真值的闭事件的支可以是纯真值的开事件,逻辑科学才对其进行研究,作为一种次要的辅助。于是,我们得到图 2.3 所示的事件的分类。

在事件中出现的联结关系的次数称为事件的高,是一个非负的自然数。原子事件的高为 0,复合事件的高大于 0。原子事件的层为 0;若 $\boldsymbol{A}$ 的层为 k,则 $\neg\boldsymbol{A}$ 的层为 $k+1$;若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中的最大层为 k;则 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$ 的层为 $k+1$。事件

的层为依据上述算法确定的非负自然数。事件的高和层是事件的客观的逻辑结构的数量特征。

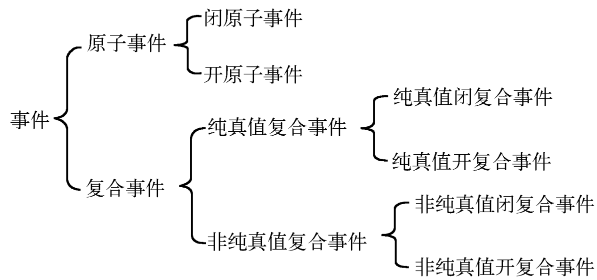


图 2. 3　事件的分类

2. 9. 2　闭事件和开事件的交叉递归定义

我们知道,原子事件有闭原子事件、开原子事件。因而,复合事件也有闭复合事件、开复合事件。闭原子事件和闭复合事件统称为闭事件,开原子事件和开复合事件统称为开事件。鉴于客观世界的闭事件与开事件交替出现,辗转相生,因此我们对闭、开事件给出如下交叉的递归定义。

(1) 基始:

(1. 1) 闭原子事件是闭事件;

(1. 2) 开原子事件是开事件。

(2) 归纳:

(2. 1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为闭事件,则 $\neg \boldsymbol{A}$ 为闭事件;若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为闭事件,则 $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ 为闭事件;

(2. 2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为开事件,则 $\neg \boldsymbol{A}$ 为开事件;若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中至少有一个为开事件,则 $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ 为开事件;

(2. 3) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为闭事件,则 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ 为闭事件;若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中至少有一个为开事件,且在 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中出现的个体变元完全相同,则 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ 为闭事件;

(2. 4) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中至少有一个个为开事件,且,$\boldsymbol{A}$ 为开事件时其中至少有一个个体变元不在 $\boldsymbol{B}$ 中出现或当 $\boldsymbol{B}$ 为开事件时其中至少有一个个体变元不在 $\boldsymbol{A}$ 中出现,则 $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ 为开事件。

(3) 界限:

(3. 1) $\boldsymbol{C}$ 为闭事件,仅当 $\boldsymbol{C}$ 满足(1. 1),或,(2. 1)或(2. 3);

(3. 2) $\boldsymbol{C}$ 为开事件,仅当 $\boldsymbol{C}$ 满足(1. 2),或,(2. 2)或(2. 4)。

基始部分的闭原子事件、开原子事件,我们已在 2. 5 节做了详细讨论。简言

之,所谓闭原子事件就是在其中不出现变项的原子事件;所谓开原子事件就是其中出现变项的原子事件。如 $p(e_1)$、$q(f(e_1),e_2)$ 就是闭原子事件;$p(x)$、$q(f(x),e_2)$、$q(f(e_1),y)$、$q(f(x),y)$就是开原子事件。

下面我们举行出一些关于归纳部分所形成的闭、开事件的例子。

关于(2.1),设 $\boldsymbol{A}$ 为闭事件 $p(e_1)$,则$\neg p(e_1)$为闭事件;设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为闭事件 $p(e)$、$q(e)$,则 $p(e)\wedge q(e)$ 为闭事件。由此可见,$\neg(p(e)\wedge q(e))$、$\neg p(e)\wedge q(e)$等亦为闭事件。

关于(2.2),设 $\boldsymbol{A}$ 为开事件 $p(x)$,则$\neg p(x)$为开事件;设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为开事件$p(x)$、闭事件 $q(e)$,则 $p(x)\wedge q(e)$ 为开事件,或者,设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为开事件 $p(x)$、$q(x)$,则 $p(x)\wedge q(x)$ 为开事件。显然$\neg(p(x)\wedge q(x))$、$\neg p(x)\wedge q(x)$、$p(x)\wedge\neg q(x)$等亦皆为开事件。

关于(2.3),设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为闭事件 $p(e_3,e_0)$、$\neg p(e_0,e_3)$,则 $p(e_3,e_0)\rightharpoonup\neg p(e_0,e_3)$为闭事件;设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为开事件 $p(x,y)$、$q(y,x)$,则 $p(x,y)\rightharpoonup q(y,x)$为闭事件,或者,设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为开事件 $p(f(x),h(x))$、闭事件 $q(f(x))\rightharpoonup r(h(x))$,则 $p(f(x),h(x))\rightharpoonup[q(f(x))\rightharpoonup r(h(x))]$为闭事件。

关于(2.4),设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为开事件$p(x)$,$q(y)$,则$p(x)\rightharpoonup q(y)$为开事件,或者,设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为开事件 $p(x)$,闭事件 $q(y,z)\rightharpoonup\neg q(z,y)$,则 $p(x)\rightharpoonup(q(y,z)\rightharpoonup\neg q(z,y))$是开事件。

提请注意以下几点。

第一,对含有导出联结关系的事件,可据导出联结关系的定义恢复为仅含基本联结关系的事件,然后在判定其闭、开。例如,对事件 $p(x)!\ q(x)$,可据!的定义将其恢复为事件$\neg(p(x)\rightharpoonup\neg q(x))$。因 $q(x)$为开事件,据上述定义归纳部分的(2.2)知$\neg q(x)$为开事件。又因 $p(x)$为开事件,故根据上述定义的(2.3),$p(x)\rightharpoonup\neg q(x)$为闭事件。又据(2.1),$\neg(p(x)\rightharpoonup\neg q(x))$是闭事件。

第二,从(1)基始中的0层事件(即原子事件)开始,经(2)归纳中的大于0层的复合事件,即可逐层判定出现在任意事件 $\boldsymbol{C}$ 中的每一子事件的闭、开,并最终判定整个事件 $\boldsymbol{C}$ 的闭、开。如前述第一条中所举的例子就是这样逐层判定的。

第三,分别在递归定义的(1)、(2)、(3)(主要是在(2))中出现的标号纯粹出于陈述上的必需(作为一种陈述,不可能没有先后顺序),并不反映客观世界的出现顺序。因此,在(2.1)、(2.2)中也可以分别出现(2.3)、(2.4);当然,在(2.3)、(2.4)中也可以出现(2.1)、(2.2)。其实,这可以说是作为表述递归定义的递归定义句群的语言习惯上的常用惯例。鉴于这里的情况比较复杂,故特加如上说明,以免引起误解。

第四,关于闭、开事件的当代形式逻辑乃是依据对宇宙的无限多样客观逻辑结构的内涵科学分析得出的,并非通过归纳已为人知(或已为人所感兴趣)的有

限多的实例得出的。故而,某些(实际上是无限多个)理论上认定其存在的客观的为闭或开的逻辑结构,由于不为人知(或不为人所感兴趣),目前尚不能找到恰当的实例。这并非无限的内涵的理论脱离有限的外延的实际,而是为了给未来无限延伸的实际需要(目前无法预测将来人们会需要些什么)提供完备的理论分析工具。因此,能举出实例的不妨举举;举不出实例的建议“向前看”的人们“走着瞧”——只要在“七 - 四”基本元素、准则这种条件下,不会出现超乎已给定义的异常的莫辩其闭、开的事件。

第五,这个递归定义在技术处理上的难点是:在(2)归纳部分,闭中含开、开中含闭,或者说,在结构层次上闭、开交替出现,辗转相生。故而,给不出单纯的闭或单纯的开的一刀两断的递归定义——只有在规定清楚闭之后,才能规定清楚开;然而,又只有在规定清楚开之后,才能规定清楚闭;于是,一旦截然分开,就会撞上逻辑死锁,谁也规定清楚不了。客观世界原本如此这般交替辗转,以忠实地摹写客观世界的本来面目为己任的坚持辩证唯物主义的逻辑理论的构造者就不会纯主观地追求理论上的“单纯”。这个“不单纯”的递归定义不妨称为“交叉递归定义”。

若个体变元 x 在事件 $\boldsymbol{A}$ 中且不在 $\boldsymbol{A}$ 的具有 $\boldsymbol{B}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{C}(x)$ 结构的子事件中出现,则称 x 在 $\boldsymbol{A}$ 中的这些出现是自由的;若个体变元 x 在事件 $\boldsymbol{A}$ 的具有 $\boldsymbol{B}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{C}(x)$ 结构的子事件中出现,则称 x 在 $\boldsymbol{A}$ 中的这些出现是约束的。亦即,只有当个体变元出现在开事件中且不出现在这一开事件的具有 $\boldsymbol{B}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{C}(x)$ 结构的子事件中时,相应的个体变元才是自由的。当个体变元出现在含有个体变元的闭事件中(即 $\boldsymbol{B}(x)\rightharpoondown\boldsymbol{C}(x)$ 这种结构)时,则是约束的。含有自由出现的个体变元 x 的事件 $\boldsymbol{A}$ 是 x 的个体 - 真值函数,$\boldsymbol{A}$ 的有无取决于 x 的值,即取决于给 x 指定的确定的个体;只含有约束出现的个体变元 x 的事件 $\boldsymbol{A}$ 不是关于 x 的个体 - 真值函数,$\boldsymbol{A}$ 的有无不取决于 x 的取值。显然,开事件(即个体 - 真值函数)是含有自由出现的个体变元的事件,闭事件是不含有自由出现的个体变元(也就是不含有个体变元或只含有约束出现的个体变元)的事件。

若事件 $\boldsymbol{A}$ 中含有且只含有 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$ 这 n 个个体变元的自由出现,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 元开事件。n 元开事件是 n 元个体 - 真值函数。在不致引起含混的情况下,可以用 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 表示 n 元开事件。以 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)[x_{j1},e_{j1}]$,表示在 n 元开事件 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 中个体变元 x_{j1} 的每一个自由出现都取值 e_{j1} 后得出的新事件。若 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 是 n 元开事件,则 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)[x_{j1},e_{j1}]$、$\boldsymbol{B}(x_{j1})\rightharpoondown\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 是 $n-1$ 元开事件,$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)[x_{j1},x_{j2},e_{j1},e_{j2}]$、$\boldsymbol{B}(x_{j1},x_{j2})\rightharpoondown\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\rightharpoondown\boldsymbol{B}(x_{j1},x_{j2})$ 是 $n-2$ 元开事件……;$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)[x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jn-1},e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jn-1}]$、$\boldsymbol{B}(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jn-1})\rightharpoondown\boldsymbol{A}(x_1,$

$x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$)、$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\rightarrow\boldsymbol{B}(e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jn-1})$是$n-(n-1)=1$元开事件,$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)[x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n,\ e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_n]$、$\boldsymbol{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow\boldsymbol{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$n-n=0$元开事件。0元开事件(即含有0个个体变元的自由出现的事件)不再是个体-真值函数而是闭事件。

上述n元开事件中$k(1\leqslant k\leqslant n)$个自由出现的个体变元取得确定值后得出的$n$元事件,称为原$n$元开事件的例。当$n$元开事件中$k(1\leqslant k\leqslant n-1)$个自由出现的个体变元取得确定值后得出的$n-k$元事件,称为原开事件的特例。当$n$元开事件中$n$个自由出现的个体变元都取得确定值后得出的0元开事件,即为原n元开事件的个别例。所谓例,就是特例和个别例的总称。

例如,某日,在我国某空域发现一架情况不明的飞机,监视人员需要弄清楚:①这是哪国的飞机?②从哪里起飞的?③准备飞往哪里?④执行什么任务?这样就构成一个4元开事件;“……国飞机从……起飞,到……去执行……任务。”我们用$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)$表示这个4元开事件。经过紧张的调查研究,确定这是F国的飞机(e_1),这时,事件$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)[x_1,e_1]$就是一个$4-1=3$元开事件,并且是上述4元开事件的一个特例。接着,又确定了这架飞机是从紫岛(e_2)起飞的,这时,事件$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)[x_1,x_2,e_1,e_2]$就是$4-2=2$元开事件,并且也是原4元开事件的一个特例。进而,又确定了这架飞机是到欖山(e_3)去的,这时,事件$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)[x_1,x_2,x_3,e_1,e_2,e_3]$就是一个$4-3=1$元开事件,并且也是原4元开事件的一个特例。最后,弄清了这架飞机是去执行紧急空投任务的(e_4),这时,事件$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)[x_1,x_2,x_3,x_4,e_1,e_2,e_3,e_4]$就是一个$4-4=0$元开事件,也就是闭事件“F国的这架飞机从紫岛起飞,到欖山去执行紧急空投任务。”这就是原4元开事件的个别例。

2.9.3 事件的性质

为了讲清当代形式逻辑所指的逻辑规律是地地道道的客观世界的逻辑规律,我们需要了解下面几个问题。

1. 对象的经验属性和逻辑属性

这里所说的对象是可以对之思考的一切,也就是在前面充分介绍过的客观世界的n目组、n元函数关系、论域U上的n目组集U^n的一个子集P[外延];P的共仅属性p(n元关系)[内涵]、个体(1阶常项)、多阶常项[包含1元多元函数、非0阶变项[包含n元函数]、个体变元[0阶变项]、真值函数关系[否定关系、合取关系]、充分条件关系。

对象的逻辑属性,就是分别为上述对象所具有的众多属性中作为客观世界

的 n 目组、n 元函数关系、U^n 的子集、子集的共反属性、个体、多阶常项、非 0 阶变项、0 阶变项、否定关系、合取关系、充分条件关系这样的属性，这些属性为逻辑科学所研究。对象具有的此外的一切属性，便称为对象的经验属性，为逻辑外的经验科学所分别研究。例如，“地球”这一对象的逻辑属性，“地球”所具有的“作为一个个体”这样的属性为逻辑科学所研究，而“地球”所具有的此外的一切属性，如地球大体上是球形、自转并绕太阳公转、地球上有生命等，则是它的经验属性，分别为逻辑外的经验科学所研究。

2. 经验对象和逻辑对象

我们根据对象是否只具有逻辑属性，亦即，不具有还是具有逻辑属性外的经验属性，把对象分为逻辑对象和经验对象。

逻辑对象，就是只具有逻辑属性而不具有逻辑外的经验属性的对象。客观世界的个体变元（即 0 阶变项）、联结关系这两种对象，只具有逻辑属性而无此外的经验属性，因而都是逻辑对象。不难理解，由人工符号 x、y 等表示的客观的个体变元除了具有“在论域中变”这种逻辑属性外，没有其他任何属性。由人工符号 $\neg$、$\wedge$、$\rightarrow$ 表示的客观世界的否定关系、合取关系和充分条件关系，除了分别具有“有映射无，无映射有”、“‘有有’映射有，‘有无’、‘无有’、‘无无’映射无”、“有一独的不会是有前而无后”这种逻辑属性外，没有此外的任何属性。个体变元这种逻辑对象又称为逻辑项。逻辑对象的全部属性都为逻辑科学所研究，因而是逻辑科学的主要研究对象。

<table>
<tr><td rowspan="10">对象</td><td rowspan="6">经验对象</td><td colspan="4">n 目组</td><td rowspan="6">具有经验属性</td></tr>
<tr><td colspan="4">n 元函数关系</td></tr>
<tr><td colspan="4">论域 U 上的 n 组集 U^n 的一个子集 P[外延]、
P 的共仅属性 p(n 元关系)[内涵]</td></tr>
<tr><td rowspan="4">项</td><td rowspan="2">常项</td><td colspan="2">个体(1 阶常项)</td></tr>
<tr><td colspan="2">多阶常项[包含 1 元、多元函数]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">变项</td><td colspan="2">非 0 阶变项[包含 n 元函数]</td></tr>
<tr><td rowspan="4">逻辑对象</td><td colspan="2">个体变元[0 阶变项]</td><td rowspan="4">不具有经验属性</td></tr>
<tr><td rowspan="3">联结关系</td><td colspan="2" rowspan="2">真值函数关系[为数学关系，辅助的逻辑关系]</td><td>否定关系</td></tr>
<tr><td>合取关系</td></tr>
<tr><td colspan="2">充分条件关系[为非数学关系，主要的逻辑关系]</td><td>充分条件关系</td></tr>
</table>

经验对象,就是除具有逻辑属性外还具有经验属性的对象。鉴于客观世界的 n 目组、n 元函数关系,非 0 阶项(个体,多阶常项及非 0 阶变项)、U^n 的子集(或 n 元关系)这四类对象,除了逻辑性质外,还具有众多的经验属性,因此它们是经验对象,又可称为非逻辑对象。

提请注意,经验对象并不意味着没有逻辑属性从而不为逻辑科学所研究,只不过是说这类对象的逻辑属性总是与其经验属性有机地结合在一起,须臾不可分离,而逻辑科学在研究这类对象时,只研究其逻辑属性,此外的经验属性则为逻辑外的经验科学所研究。例如,“地球绕太阳转”,其中“地球”、“太阳”分别是一个个体 e_3、一个个体 e_0,并由之组成论域“天体”上的一个 2 目组(e_3,e_0),而“……绕……转”则是一个 2 元关系 p,整个事件则为(e_3,e_0)满足 p,即$p(e_3,e_0)$,上述这些就是为逻辑科学所研究的经验对象的逻辑属性,显然,这些逻辑属性总是与其经验属性密不可分的,离开了经验属性,其逻辑属性也就不复存在了。又如,第 2.12 节即将阐述的那个楚人的“牛皮”“这支矛可陷任何物体”中的“矛”,是一个个体 e',它和个体变元“任何物体”x 组成论域“物体”上的一个变 2 目组(e',x),而“……陷……”则是一个 2 元关系 p_1,整个事件为(e',x)满足 p_1,即 $p_1(e',x)$,显然,这里面经验对象的逻辑属性与其经验属性也是密不可分的,而逻辑科学仅关心经验对象的与经验属性联系在一起的逻辑属性。非逻辑对象中非 0 阶项又称为非逻辑项或经验项。

3. 事件的逻辑性质与经验性质

我们知道,原子事件由 n 元关系和经验项或逻辑项组成;复合事件由 n 元关系、经验项或逻辑项、联结关系组成。显然,只要是事件,其中必然出现经验对象。请看以下各例:

“地球绕太阳转”——$p(e_3,e_0)$,为一闭原子事件。这里有经验对象“……绕……转”(p)这一 2 元关系,“地球、太阳”(e_3,e_0)这一 2 目组,以及“地球”、“太阳”两个个体(1 阶常项)。

“太阳系的某一行星绕太阳转”,即 $p(x,e_0)$,为一开原子事件。这里除逻辑对象“x”外,还有非逻辑对象 2 元关系“……绕……转”(p)和经验项 1 阶常项(即个体)“太阳”(e_0)。

无须再举例便不难理解开复合事件、闭复合事件中也必然会出现非逻辑对象。

由于事件 $\boldsymbol{A}$ 中总有经验对象出现,因此总含有经验对象的经验属性。把事件 $\boldsymbol{A}$ 中的经验对象,即 n 元函数关系、n 目组、非 0 阶项、U^n 的子集(或其共仅属性)中的非逻辑的经验属性的总和称为事件 $\boldsymbol{A}$ 的经验性质,也可称做事件 $\boldsymbol{A}$ 的非逻辑性质;把事件 $\boldsymbol{A}$ 的此外的性质,即事件 $\boldsymbol{A}$ 中的非逻辑对象中的逻辑属性

及事件 **A** 中逻辑对象(即个体变元、联结关系)中的逻辑属性的总和称为事件 **A** 的逻辑性质,又可称为事件 **A** 的逻辑结构。强调 **A** 的结构特征时,就使用"逻辑结构"这一术语;当为了与 **A** 中的经验性质相区别时,就使用"逻辑性质"这一名称。

如前所述,可以知道,事件的逻辑性质总是与事件的经验性质共处于事件中,不可分离的。把事件 **A** 的经验性质和逻辑性质的有机结合称为事件 **A** 的具体性质。经验性质、逻辑性质都是具体性质的有机组成部分。根据需要人们可以不管 **A** 的经验性质只研究其逻辑性质,也可以撇开 **A** 的逻辑性质而只研究其经验性质。不过,这种所谓"不管"、"撇开"只是人在研究客观世界时的态度,此时,事件的经验性质和逻辑性质仍然有机而又综合地共存于事件之中,并不会因为人的研究方法而有丝毫改变。一类事件的共性可以是逻辑性质,而另一类事件的共性也可以是经验性质,不过,当人们注重某一方面性质时,并不意味着这一方面性质事实上与其有机结合在一起的其他性质的分离。对于逻辑科学来说,研究事件的逻辑性质并不意味着以为有一个游离于事件的具体性质而事实上与经验性质相分离的逻辑性质。如同经验性质是具体性质的一部分一样,逻辑性质也是具体性质的一部分而且始终与经验性质紧密地、牢牢不可分地结合在一起。当我们以逻辑的眼界去研究事件时,就好像戴了一副滤色眼镜,这时看到的事件主要是逻辑性质。就像用滤色镜头照相一样,物体的色彩经过滤色后,某些色彩被强化了,某些色彩被削弱了,而被拍摄的物体本身却依然故我,原来是多少色彩被拍摄后还是多少色彩。当我们仅仅注意并研究事件 **A** 的逻辑性质时,事件 **A** 还是逻辑性质与经验性质的综合体,我们研究的是事件 **A** 的具体性质的一个方面,我们不能把这种研究方式称为"从具体上升到抽象"。

2.10 客观世界的逻辑结构

我们知道,原子事件由 n 元关系 p 和 n 目组$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$构成,亦即,原子事件可分析为 n 元关系 p 和 n 目组$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$;$n$ 目组可分解为 n 个项(常项或变项)$\boldsymbol{a}_i(i=1,\cdots,n)$;按项的形成准则,任一项 $\boldsymbol{a}_i$可分解为 m 元函数 f 和 m 个其阶低于 $\boldsymbol{a}_i$的项 $\boldsymbol{b}_i(i=1,\cdots,m)$;依此类推,一直分析到 1 阶常项即个体 e 和 0 阶变项即个体变元 x。故而,任一项 $\boldsymbol{a}_i$可有下述不再对之分解的组成部分:m 元函数 f、1 阶常项 e、0 阶变项 x。事件中不再对之分解的组成部分称为基本对象。因此,任一原子事件 $p(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$可分解为下述基本对象:$n$ 元关系 p、m 元函数 f、个体 e、个体变元 x。

依据事件的形成准则,任一复合事件可分解为联结关系(否定 $\neg$、合取 $\wedge$、充分条件 $\rightarrow$)和原子事件。因此,任一事件(原子事件或复合事件)至多由下述

七种基本对象组成。

(1) n 元关系 p;

(2) m 元函数 f;

(3) 个体 e;

(4) 个体变元 x;

(5) 否定关系$\neg$;

(6) 合取关系 $\wedge$;

(7) 充分条件关系$\rightharpoonup$。

其中,前三种称为经验基本对象,后四种称为逻辑基本对象。

下述依次属于七种基本对象的七种客观性质,统称为逻辑性质。

(1) 是个 n 元关系;

(2) 是个 m 元函数;

(3) 是个个体;

(4) 在论域中变;

(5) 1 元的有无函数;

(6) 2 元的有无函数;

(7) 具有一独的不会是有前件而无后件。

逻辑外的经验科学(除离散数学外),不研究上述七种逻辑性质;离散数学不研究最后的也是最重要的一种逻辑性质,只从外延的角度部分地研究第一种"n 元关系"的逻辑性质。显然,后四种基本对象除了只具有属于自己的逻辑性质外,不再具有其他的任何性质。故而,这后四种只具有逻辑性质的基本对象——个体变元 x、否定$\neg$、合取 $\wedge$、充分条件 $\rightharpoonup$,就统称为逻辑基本对象。同样,前三种基本对象除了属于自己的逻辑性质之外,还分别依次具有下述性质:确定的 U^n 的确定的子集 P 的一个确定的共仅属性、从确定的定义域到确定的值域的确定的 m 元映射、确定的论域中的确定的个体。这三种性质就统称为经验性质。经验性质只为逻辑外的经验科学所研究。前三种同时还具有经验性质的基本对象——n 元关系 p、m 元函数 f、个体 e,统称为经验基本对象。

由项 $f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 的子项的逐阶形成过程所确定的出现在其中的全部基本对象的逻辑性质的总和,称为项的逻辑性质;项的此外的性质,亦即,出现在项中的全部经验基本对象的经验性质的总和,称为项的经验性质。按与项的客观的逻辑性质相对应的人为的形成规则编写出来的表意的人工符号串 $f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 称为项符;项符是用来刻画项的客观的逻辑性质的符号语言表述形态。

由事件 $\boldsymbol{A}$ 的子事件的逐层形成过程所确定的出现在其中的全部基本对象的逻辑性质的总和,称为事件的逻辑性质;事件的此外的性质,亦即,出现在事件

中的全部经验基本对象的经验性质的总和,称为事件的经验性质。按与事件的客观的逻辑性质相对应的人为的形成规则编写出来的表意的人工符号串 $\boldsymbol{A}$ 称为良构式,并简称为式;式是用来刻画事件的客观的逻辑性质的符号语言表述形态。

鉴于项、事件的逻辑性质体现了由项的逐阶、事件的逐层的客观的形成过程所确定的结构,因此,也可称为项、事件的逻辑结构。

上述规定至少提供了如下信息:逻辑科学研究组成项、事件的逻辑的和经验的基本对象的客观的逻辑性质,以及项、事件的客观的逻辑结构;逻辑外的各门经验科学则研究项、事件中的经验基本对象的经验性质,以及项、事件的经验性质。因此,任何经验科学,只有会同逻辑科学,才能对客观世界进行有意义的研究。

2.11　客观世界的逻辑规律及其种类

逻辑规律是指客观的逻辑存在事件或逻辑存在事件间的条件关系的事件。

客观世界的逻辑规律按仅是逻辑存在事件还是关于逻辑存在事件间的条件关系二分为逻辑定律和逻辑法则。其中,对逻辑定律,按是否需要对其中出现的事件分解到项,可分为事件逻辑定律和项逻辑定律;逻辑法则可分为事件逻辑法则和项逻辑法则。逻辑规律的分类如图 2.4 所示。

- 逻辑规律
  - 逻辑定律
    - 事件逻辑定律
      - 纯真值逻辑定律——重言定律
      - 非纯真值逻辑定律
        - 非纯真值非推导逻辑定律
        - 非纯真值推导逻辑定律
          - 导出律
          - 推理律
    - 项逻辑定律
  - 逻辑法则
    - 事件逻辑法则
    - 项逻辑法则

图 2.4　逻辑规律的分类

2.12　客观世界的逻辑定律

客观世界的逻辑定律,就是指客观世界的逻辑存在事件。所谓逻辑存在事件就是仅仅根据它的逻辑性质就可确定其存在,而不取决于除此以外的经验性质的事件。逻辑定律分为事件逻辑定律和项逻辑定律。

2.12.1 客观世界的事件逻辑定律

事件逻辑定律,就是无须分析出在其中出现的基础事件本身的逻辑结构(亦即,以基础事件为最小单位)就可以确定其存在的逻辑规律。事件逻辑定律二分为纯真值逻辑定律(又称重言定律)和非纯真值逻辑定律。

1. 纯真值逻辑定律

纯真值逻辑定律是指从基础事件出发不含有条件关系只含有纯真值联结关系的逻辑存在事件。亦即,是恒有的真值函数。例如,纯真值排中律 $\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$,纯真值不矛盾律 $\neg(\boldsymbol{A} \wedge \neg \boldsymbol{A})$,就是纯真值逻辑定律,又称重言定律。重言定律的符号表达式称为重言式,又称永真式。下述各式都是重言式。

(1) 蕴涵否定律:$\neg \boldsymbol{B} \wedge (\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \rightarrow \neg \boldsymbol{A}$。

(2) 析取肯定律:$\neg \boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \rightarrow \boldsymbol{B}$。

(3) 蕴涵析取律:$(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A})$。

一个纯真值复合式是否重言式,用真值表在有限步骤内即可判定(见第 6.4 节)。重言定律的基本特征是:整个事件的有无取决于基础事件的有无。这就是著名的弗雷格原理。正因为如此,重言定律不是从已知获取新知的客观依据。

2. 非纯真值逻辑定律

非纯真逻辑定律是指从基础事件出发含有条件关系的逻辑存在事件。非纯真逻辑定律可二分为非纯真值非推导逻辑定律和非纯真值推导逻辑定律。

(1) 非纯真值非推导逻辑定律。

例如,韩非不可以矛盾律。

不可以矛盾律与不矛盾律不同。

韩非不可以矛盾律是通过“或曰:‘以子之矛陷子之盾,何如?’”这样的绝妙诘问阐述的。韩非、诘问者、那位楚国商人都明白,在客观世界中,下述事件恒无:

吾矛能陷吾盾,可以,吾矛不能陷吾盾。

其表达式为:

$$p(e_1, e_2)\,!\ \neg p(e_1, e_2)$$

因而,其否定则为恒有事件:

$$\neg[p(e_1, e_2)\,!\ \neg p(e_1, e_2)]$$

容易验证,仅凭以上逻辑结构我们便可确认这一事件为有,而且恒有、普有。故而,这是一个客观世界的逻辑定律,我们称之为“韩非不可以矛盾律”。

韩非不可以矛盾律作为逻辑存在事件,作为客观世界的逻辑定律,也是由具

有相同逻辑结构而非逻辑对象互有差异的无限多个事件构成的。这样的事件同样很多,见表 2.1。

表 2.1　韩非不可以矛盾律

2 元关系	个体常项		事　　件	
p	e_1	e_2	$p(e_1,e_2)$	$\neg p(e_1,e_2)$
高于	这山	那山	这山高于那山	这山不高于那山
侵略	甲国	乙国	甲国侵略乙国	甲国不侵略乙国
认识	张三	李四	张三认识李四	张三不认识李四
快于	a 马	b 马	a 马快于 b 马	a 马不快于 b 马

表 2.1 中每一行的两个事件构成的约合事件为恒无,而约合事件的否定事件则恒有,且均具有韩非不可以矛盾律的逻辑结构。

不可以矛盾律的一般表达式为:

$$\vdash \neg(\boldsymbol{A}!\ \neg\boldsymbol{A})$$

(2)非纯真值推导逻辑定律。

非纯真值推导逻辑定律按仅含有第一独立性还是同时具有两个独立性分为推理律和导出律。

① 推理律。推理律不仅含有一独而且具有二独,即同时具有两个独立性。它是从已知获取新知的客观依据。推理律的符号表达式就叫推理式。例如:

- 充分条件推理肯定式　$\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B})\rightharpoonup\boldsymbol{B}$;
- 充分条件连锁推理肯定式　$(\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{B}\rightharpoonup\boldsymbol{C})\rightharpoonup(\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{C})$;
- 尽举相容选择推理肯定式　$\neg\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{A}\upharpoonright\boldsymbol{B})\rightharpoonup\boldsymbol{B}$;
- 强归谬推理式　$(\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{A}\rightharpoonup\neg\boldsymbol{B})\rightharpoonup\neg\boldsymbol{A}$。

② 导出律。导出律只具有第一独立性,没有第二独立性。导出律的符号表达式就叫导出式。例如:

- 合取交换式　$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\rightharpoonup\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}$;
- 合取对析取分配式　$\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})\rightharpoonup(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\vee(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C})$;
- 析取对合取分配式　$\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\wedge C)\rightharpoonup(\boldsymbol{A}\vee B)\wedge(\boldsymbol{A}\vee C)$;
- 析取引入式　$\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{A}\vee B$。

2.12.2　客观世界的项逻辑定律

项逻辑定律是对传统形式逻辑中“简单判断推理”的真正发展。所谓项逻辑定律,就是需要对在其中出现的事件的逻辑结构分析到项,而不是以基础事件为最小单位的逻辑规律。换言之,需分析出基础事件中的项之后,才能确认为逻

辑定律。

例如,韩非不自相矛盾律。

在《韩非子·难一》中,韩非得出结论:事实上满足“不可陷”的盾和满足“无不陷”的矛这样的实物“不可同世而立”,亦即在客观世界里不可能并存。这里实际上揭示的是下述含有2元关系的两个事件在客观世界里不可能并存。

(1)“(吾矛)于物无不陷也”(即:吾矛可陷任何物体)。

(2)“(吾盾)物莫能陷也”(即:任何物体不可陷吾盾)。

我们可用符号表达式将以上二事件的逻辑结构分别表示为:

$$U(x)\rightarrow p(e_1,x)$$

$$U(y)\rightarrow\neg p(y,e_2)$$

这里,U表示论域“物体”,e_1表示论域中的个体“吾矛”,e_2表示论域中的个体“吾盾”,x、y分别表示在论域中变的个体变元“任何物体”,p表示U上的2元关系“……可陷……”。我们可以把上述含有2元关系的二事件不可并存,用人工符号表达为:

$$\underset{(\text{不可})}{\neg}\ \underset{(\text{这支矛能戳穿任何物体})}{\{[U(x)\rightarrow p(e_1,x)]}\ \underset{(\text{并存})}{\wedge}\ \underset{(\text{任何物体不能戳穿那面盾})}{[U(y)\rightarrow\neg p(y,e_2)]\}}$$

上述这一客观存在的4层复合事件有一个十分引人注目的重要性质:它的存在仅仅取决于它的逻辑结构,或者说,仅仅取决于它的逻辑性质,而不取决于它的此外的经验性质。具体地说,这个4层复合事件的存在取决于其中的逻辑对象(即个体变元x、y和联结关系$\neg$、$\wedge$、$\rightarrow$)的逻辑性质(即,任意个体,真值函数关系否定、合取,充分条件关系),取决于其中出现的非逻辑对象(即,论域U,个体e_1、e_2,2元关系p)的逻辑性质(即,是一个论域,是一个个体和另一个个体,是一个2元关系)。换言之,这一4层复合事件的存在只取决于它的逻辑结构(符号表达式就刻画了它的逻辑结构),而不取决于在其中出现的非逻辑对象(分别用U、e_1、e_2、p表示)的经验性质(是实物,是吾矛、吾盾,是……可陷……)。由于上述4层复合事件是一个其存在只取决于其逻辑结构而不取决于它的经验性质的客观世界的逻辑存在事件,因而它是一个客观世界的逻辑定律。由于这一逻辑定律是先哲韩非用卖矛与盾的生动寓言故事揭示出来的。故此,我们称之为“韩非不自相矛盾律”。

2.13　客观世界的逻辑法则

客观地存在着的关于客观世界的逻辑定律之间的充分条件关系称为客观世界的逻辑法则,简称法则。以$\boldsymbol{A}\vdash\boldsymbol{B}$表示逻辑法则,$\boldsymbol{A}$称为前件,$\boldsymbol{B}$称为后件。提请注意:当$\boldsymbol{A}\vdash\boldsymbol{B}$为法则时,这里的“$\vdash$”具有一独,即可以在并未确定$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$

本身是否逻辑定律的情况下，便可确定，不会是 $\boldsymbol{A}$ 是定律而 $\boldsymbol{B}$ 不是定律。这事实上对于不是逻辑定律的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 也依然成立。

在讨论逻辑定律的语境中，只要不致引起含混，法则可以表述为“若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$是定律，则 $\boldsymbol{B}$ 是定律”，或者“若 $\vdash\boldsymbol{A}_1$，$\vdash\boldsymbol{A}_2$，$\cdots$，$\vdash\boldsymbol{A}_n$，则 $\vdash\boldsymbol{B}$”。并以

$$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n \Vdash \boldsymbol{B}$$

表示。其中“$\vdash$”为定律号，“$\Vdash$”为法则号，n 为有限自然数，相应的客观世界的逻辑法则称为 n 元法则。$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$称为前件，$\boldsymbol{B}$ 称为后件。

为了简化，也可用大写希腊字母 $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$（即 n 个前件，为事件的有限序列）。于是，n 元法则就可表示为：

$$\boldsymbol{\Gamma} \Vdash \boldsymbol{B}$$

逻辑法则依据是关于事件逻辑定律之间的充分条件关系，还是关于项逻辑定律之间的充分条件关系，二分为事件逻辑法则和项逻辑法则。

2.13.1　客观世界的事件逻辑法则

客观地存在着的关于客观世界的事件逻辑定律之间的充分条件关系，称做事件逻辑法则。

例如，分离法则：

当 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 时，$\boldsymbol{C}\wedge(\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{D})\Vdash\boldsymbol{D}$ 就是分离法则。

如果 $\boldsymbol{C}$ 正好为：

$$\vdash \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{e})\wedge(\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})\rightarrow\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x}))\rightarrow\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{e})$$

且 $\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{D}$ 正好为：

$$\vdash[\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{e})\wedge(\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})\rightarrow\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x}))\rightarrow\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{e})]\rightarrow$$
$$\{\neg\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{e})\rightarrow\neg[\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{e})\wedge(\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})\rightarrow\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x}))]\}$$

那么，分离法则就告诉我们，由上二式必然得出：

$$\vdash\neg\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{e})\rightarrow\neg[\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{e})\wedge(\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})\rightarrow\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x}))]$$

显而易见，这时分离法则是从客观世界的逻辑定律“内涵三段律”和“逆否律”得到一个新的客观世界的逻辑定律（姑且称为“反内涵三段律”）的一种充分条件关系。我们用一个具体的事件为例来进一步理解上述法则。

$\vdash\boldsymbol{C}$ 为：若“北斗是恒星，而且凡恒星必发光”则北斗发光（即一个内涵三段律）。

$\vdash\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{D}$ 为：如果“若‘北斗是恒星，而且凡恒星必发光’，则北斗发光”，那么，“若北斗不发光，则并非‘北斗是恒星，而且凡恒星必发光’”（即一个逆否律）。

这时，根据分离法则，一定有“若北斗不发光，则并非‘北斗是恒星，而且凡恒星必发光’”，亦即：若北斗不发光，则北斗不是恒星或者并非凡恒星必发光

(即一个反内涵三段律)。

2.13.2 客观世界的项逻辑法则

客观地存在着的关于客观世界的项逻辑定律之间的充分条件关系,称为项逻辑法则。

例如,代入法则:

当 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为 $\boldsymbol{A}(x)$,$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}(x)[\boldsymbol{a}]$ 时,称 $\boldsymbol{\Gamma} \models \boldsymbol{B}$ 为代入法则,即

$$\boldsymbol{A}(x) \models \boldsymbol{A}(x)[\boldsymbol{a}]$$

若 $\boldsymbol{a}$ 对 $\boldsymbol{A}$ 中的 x 是可代入的,则以 $\boldsymbol{A}(x)[\boldsymbol{a}]$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 对 $\boldsymbol{A}$ 中的 x 的代入:将 $\boldsymbol{A}$ 中的 x 的全部出现以 $\boldsymbol{a}$ 置换。

代入法则告诉我们,如果 $\boldsymbol{A}$ 是定律,那么 $\boldsymbol{A}$ 中出现的 x 以 $\boldsymbol{a}$ 各个代入之后,仍然是定律。即是说:

如果 $\vdash \boldsymbol{A}(x)$,则 $\vdash \boldsymbol{A}(x)[\boldsymbol{a}]$

项 $\boldsymbol{a}$ 对在 $\boldsymbol{A}$ 中出现的 x 是可代入的,当且仅当,若 $\boldsymbol{a}$ 中含有 y,则在 $\boldsymbol{A}$ 中不出现具有 $\boldsymbol{B}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{C}(y)$ 或 $\boldsymbol{B}(y) \rightharpoonup \boldsymbol{C}(x)$ 形的子式。

提请注意:

(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 中不含有个体变元,亦即 $\boldsymbol{a}$ 为常项时,则 $\boldsymbol{a}$ 对 $\boldsymbol{A}$ 中的任意 x 都是可代入的;

(2) 对在 $\boldsymbol{A}$ 中出现的任何常项不可做代入。

从语义上讲,$\boldsymbol{A}(x)[\boldsymbol{a}]$ 是 $\boldsymbol{A}[x]$ 的特殊情况,因为,x 以论域为变域,而 $\boldsymbol{a}$ 的值域是论域的一个子域;当 $\boldsymbol{a}$ 是常项 e 时,$\boldsymbol{A}(x)[\boldsymbol{a}]$ 是 $\boldsymbol{A}(x)$ 的个别情况,因为,e 只指称论域中的一个个体。

我们用代入法则来分析那个卖矛与盾的商人的两句话:

(1) 这支矛(e_1)能戳穿(p)任何物体(x);

(2) 任何物体(y)不能戳穿($\neg p$)那面盾(e_2)。

这两句话相应的式为:

(1′) $U(x) \rightharpoonup p(e_1, x)$;

(2′) $U(y) \rightharpoonup \neg p(y, e_2)$。

我们只要应用代入法则,便立即揭露出其“自相矛盾”来。

对式(1′),我们用项 e_2(即“那面盾”)替换其中的个体变元 x,即得:

(1″) $U(e_2) \rightharpoonup p(e_1, e_2)$。

对(2′)式,我们用项 e_1(即“这支矛”)替换其中的个体变元 y,即得:

(2″) $U(e_1) \rightharpoonup \neg p(e_1, e_2)$。

难怪,韩非子云:“夫不可陷之盾,与无不陷之矛,不可同世而立。”先贤韩非这句话就是说,“这支矛能戳穿任何物体”和“任何物体都不能戳穿那面盾”这两

个事件实际上不可能并存。可谓一针见血。这就是我们在前边所说的“韩非不自相矛盾律”。

对 $\vdash \neg\{[U(x)\to p(e_1,x)]\wedge[U(y)\to\neg p(y,e_2)]\}$，用 e_2、e_1 分别代入 x、y，则得：

$$\vdash \neg\{[U(e_2)\to p(e_1,e_2)]\wedge[U(e_1)\to\neg p(e_1,e_2)]\}$$

前式是定律，经过代入所得的后式仍是定律。

代入法则说的是，一旦 x 要被代入，就必须在 $\boldsymbol{A}$ 中出现的每一处都代入，即各个代入。如上所举的从式(1′)到式(1″)和从式(2′)到式(2″)。

上述所有的客观世界的逻辑定律和客观世界的逻辑法则都是客观世界的逻辑规律（客观世界的逻辑法则是关于规律的规律），二者共同构成了客观世界的洋洋大观的逻辑规律。先贤韩非不曾在23个世纪之前周详地指明这些客观世界的逻辑规律和客观世界的逻辑法则（如逆否律、代入法则），也许只不过是由于当时在竹片上用漆写字过于艰苦，迫使他不得不采取惜墨如金的方式来表达自己的思想。

至少在下述几个方面，韩非的逻辑思想远远胜过后来流行的形式逻辑读本。

第一，径直去研究客观世界的逻辑规律，而无须再讨论有无“客观基础”的问题；如今的形式逻辑却还在那里争论“思维的逻辑规律”有无客观基础，若有，又究竟是什么。

第二，从事包含多元关系的真正关系逻辑的研究，而后来的形式逻辑由于不研究包含多元关系的逻辑规律，因此，根本分析不出那个楚人的自相矛盾来。

第三，不自相矛盾律、从不矛盾得出不自相矛盾法则等属于真正的项逻辑（比德国数理逻辑学家弗雷格的谓词逻辑早两千多年），而后来的形式逻辑由于不研究项逻辑（相当于谓词逻辑），那些建立在直言命题上的直接推理、间接推理名义上分析到“名词”，实质上仍然只不过是最简单的事件逻辑（相当于命题逻辑）。

宇宙原本是通过客观的逻辑结构将各种事件在时间和空间上从一个必然过渡到另一个必然的无限绵延广漠的网，而逻辑科学则是对宇宙这个无限绵延广漠的从一个事件必然过渡到另一个事件的逻辑结构的网的认识、整理和总结。

第 3 章　逻辑规律是客观世界的规律

3.1　逻辑规律概述

远在百家争鸣的春秋战国时期,我国就产生了研究包含多元关系的客观世界的逻辑规律的光辉灿烂的古代逻辑。《韩非子·难一》里说:“楚人有鬻盾与矛者,誉之曰:‘吾盾之坚,物莫能陷也’。又誉其矛曰:‘吾矛之利,于物无不陷也’。或曰:‘以子之矛,陷子之盾,何如’? 其人弗能应也。夫不可陷之盾,与无不陷之矛,不可同世而立。”这最后的断语揭举了下述含有 2 元关系的两个事件,在客观世界里不可能并有:

“吾矛可陷任何物体”;

“任何物体不可陷吾盾”。

设:

U——论域“物体”;

x、y——个体变元,在“物体”中变;

e_1——“吾矛”,e_2——“吾盾”,系论域“物体”中的两个个体;

p——U 上的 2 元关系“……可陷……”。

于是,有下面两个表达式:

$U(x)\to p(e_1,x)$——“若 x 是物体,则吾矛可陷 x”;

$U(x)\to\neg p(y,e_2)$——“若 y 是物体,则 y 不可陷吾盾”。

为韩非揭举的关于包含 2 元关系的这两个事件“不可同世而立”的客观世界的逻辑定律可用下式表述:

① $\vdash\neg\{[U(x)\to p(e_1,x)]\wedge[U(y)\to\neg p(y,e_2)]\}$

此表达式刻画的客观地存在的 4 层的复合事件可称为“韩非不自相矛盾律”。它具有引人注目的重要性质:它的存在仅取决于它的逻辑结构,而不取决于它的此外的经验性质。若对此尚有怀疑,请看下述实例:

并非“甲国支援任何国家且任何国家不支援乙国”。

事件“张三认识任何人”和事件“任何人不认识李四”不可同世而立。

不会出现“a 星球大于任何星球而任何星球不大于 b 星球”。

并不是“甲球队战胜任何球队但任何球队不能战胜乙球队”。

容易验证,这几个语句所指谓的由成对事件构成的合取事件的否定事件,永

远存在,普遍存在! 这类例子俯拾皆是。

其存在只取决于其逻辑结构的事件称为逻辑存在事件,又称恒有事件或普有事件。“恒”就是永恒、永远,是从时间上说的;“普”就是普遍、到处,是从空间上说的。客观世界的逻辑定律就是客观世界的逻辑存在事件。具有一定的逻辑结构而在其中出现的经验基本对象却不同的逻辑定律有无限多条,由之组成了一个无限集,而对其中的任一条定律之所以存在起决定作用的一定的逻辑结构则是这个无限集的共仅属性。这个共仅属性(即一定的逻辑结构)不可能游离于具有一定经验性质(尽管任意一条定律的存在不取决于它们)的具体定律而单独存在。一般必须也只能存在于个别之中。先贤韩非就是通过揭举这无限集里的一个引人入胜的元来阐明作为逻辑定律的“不自相矛盾律”,从而指明这个由无限多个不自相矛盾事件组成的无限集及其共仅属性的。从这里可以体会出一条重要的具有方法论意义的准则:

抓住了本质,一就是一切。

先贤韩非就是在这个准则的指导下,寓普遍、永远存在的逻辑定律(无限集及其共仅属性)于形象、生动的个别事例之中,其手法是十分高明的。上下四方为宇,古往今来为宙,这宇宙就是广漠无垠的空间和绵延不绝的时间,而逻辑定律则用它的逻辑结构的网在这广漠绵延的无限时空中捕捞任意的 n 元关系和项,以构成逻辑存在的事件。这神奇的网像宇宙一样的广漠、绵延。

以 $\vdash \boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是客观世界的逻辑定律,其中的符号“$\vdash$”就称为定律号,读做单栅。

客观地存在着的关于客观世界的逻辑定律之间的充分条件关系称为客观世界的逻辑法则,并简称为法则。在讨论逻辑定律的语境中,法则可以表述为“若 $\vdash \boldsymbol{A}_1, \cdots, \vdash \boldsymbol{A}_n$,则 $\vdash \boldsymbol{B}$”,或者省去定律号,简化为“若 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$,则 $\boldsymbol{B}$”,并以“$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n \vdash\!\!- B$”表示。其中的辅助符号“$\vdash\!\!-$”表示关于定律之间的充分条件关系,$n$ 为有限自然数,相应的法则称为 n 元法则,$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ 称为前件或假设,$\boldsymbol{B}$ 称为后件或结果。

客观世界的逻辑定律、逻辑法则统称为客观世界的逻辑规律。定律和法则都是规律,而法则是关于定律的规律,因此也可以称为元逻辑规律。

对于前引《韩非子·难一》里的绝妙的诘问:“以子之矛,陷子之盾,何如?”那个吹牛过头的楚人的回答不是 $p(e_1, e_2)$(吾矛可陷吾盾),就是 $\neg p(e_1, e_2)$(吾矛不可陷吾盾),然而,韩非和那个寓言中的楚国商人全都明白,在客观世界中,恒无 $p(e_1, e_2) \wedge \neg p(e_1, e_2)$;于是,其否定恒有(加上 $\vdash$):

② $\vdash \neg[p(e_1, e_2) \wedge \neg p(e_1, e_2)]$　(韩非不矛盾律)

韩非不矛盾律可表示为:

$\neg(\boldsymbol{A} \wedge \neg \boldsymbol{A})$

为什么面对这个客观的逻辑定律不矛盾律,那个牛皮吹过头了的商人“弗能

应也”了呢？那是由于韩非和那个楚国商人都清楚，楚国商人吹牛时其语言所指谓的自相矛盾事件$[U(x)\rightarrow p(e_1,x)\wedge[U(y)\rightarrow\neg p(y,e_2)]$，是矛盾事件$p(e_1,e_2)\wedge\neg p(e_1,e_2)$的充分条件，亦即他们都知道存在下述客观世界的逻辑法则：

③ $[U(x)\rightarrow p(e_1,x)\wedge[U(y)\rightarrow\neg p(y,e_2)]\vdash$

$p(e_1,e_2)\wedge\neg p(e_1,e_2)$　（韩非从自相矛盾得出矛盾法则）

这里，“自相矛盾事件”指的就是“矛盾事件的充分条件”。韩非要从②和③去得出他的前述①不自相矛盾律，还需通过：

④ $\vdash(\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B})\rightarrow(\neg\boldsymbol{B}\rightarrow\neg\boldsymbol{A})$　（逆否律）

⑤ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\rightarrow B\vdash\boldsymbol{B}$　（分离法则）

韩非据③、④、⑤才能得出：

⑥ $\neg[p(e_1,e_2)\wedge\neg p(e_1,e_2)]$

$\vdash\neg\{[U(x)\rightarrow p(e_1,x)]\wedge[U(y)\rightarrow\neg p(y,e_2)]\}$

（韩非从不矛盾得出不自相矛盾法则）

然后，再据定律②、法则⑥去得出他的彪炳古今的韩非不自相矛盾律①。

以基础事件为最小单位，无须分析在其中出现的基础事件本身的逻辑结构即可确定其逻辑存在的规律称为事件逻辑规律。上述六条规律中的②不矛盾律、④逆否律，属于事件逻辑定律；⑤分离法则等，属于事件逻辑法则。不以基础事件为最小单位，需对在其中出现的基础事件分析到项才能确定其逻辑存在的规律称为项逻辑规律。上述六条规律中的①不自相矛盾律，属于项逻辑定律；③从自相矛盾得出矛盾法则；⑥从不矛盾得出不自相矛盾法则等，属于项逻辑法则。

3.2　逻辑规律不是思维自身的规律

辩证唯物主义认为，思维是客观世界高度发展的产物，作为人脑的一种属性而存在，它一经在宇宙中产生便有自身的规律。例如，存在决定意识——唯物律；思维必有物质载体——载体律；思维不能以正在进行的思维自身为思考对象——不自返律；等等。这些真正的名副其实的思维规律已分别为认识论、语言学、心理学等科学所研究，其思维自身并不存在“韩非不矛盾律”、“排中律”、“同一律”。相反，在现实中，对于普通人来讲，只要他能进行正常的逻辑思维，在他活着的一天中，其思维中的矛盾现象是不难找到的。即使在课堂上，常用“在任何思维的过程中都不允许，不应该自相矛盾”这种所谓“不矛盾要求”来要求学生的逻辑学者，他在实际上也总是抛弃这个事实上不可能实现的“要求”，在他自己的思维过程中出现自相矛盾。

归纳起来，这种“矛盾现象”主要有以下几种表现。

（1）谎言。也就是口是心非，表里不一。心里想的是$\boldsymbol{A}$（或$\neg\boldsymbol{A}$），可说的是

$\neg \boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{A}$)。从动机和实施效果上可分为善意的谎言(现实中称为美丽的谎言)和恶意的谎言,这由从事的职业而定。前者如医生、外交家、统帅等为了事业的需要编造的唯心之论;后者如盗贼、骗子、反动政客等的自欺欺人之谈。

(2) 矛盾统治时期的自相矛盾。这里主要是指欧洲中世纪教会统治时期,他们为了维护自身利益,用火刑等残酷手段维护矛盾的“地球中心说”、“血液再生说”等人们不得不心非口是地承认的自相矛盾。但事实胜于雄辩,波兰天文学家哥白尼经过长期的探测,大胆地否定了教会的观点,在其著作“On the Revolutions of the Celestial Spheres”(《天体运行论》)中,提出“以太阳为中心的世界观”,即“日心说”;英国生理医生哈唯提出了“血液循环”的理论。最终彻底推翻了他们的“宗教哲学”。

(3) 在事实尚未揭示前的自相矛盾。主要表现在物理学领域中。例如,自由落体法则在未被伽利略(Galileo Galilei)发现之前的自相矛盾。在欧洲中世纪时期,人们普遍相信亚里士多德的“自由落体运动法则”,即:“重物的自由降落速度必定快于轻物。”然而,伽利略经过证明得出与“亚氏法则”相对立的一对矛盾:“合球的自由降落速度快于大球”与“合球的自由降落速度不快于大球。”在做出以上证明后,他又用实验推翻了统治人类 1800 多年的“亚氏法则”。

(4) 所谓超协调逻辑(又称弗协调逻辑)的自相矛盾。超协调逻辑是 20 世纪 50 年代形成和发展起来的符号逻辑。这种理论认为:A 是对的,非 A 也是对的,“不能‘A 与非 A 都对’”也是对的。这种逻辑宣称,它能为不协调(即包含矛盾)然而并非无意义的理论提供逻辑基础。超协调逻辑的特点是在系统中纳入相互矛盾的命题,它不否认矛盾而且接收矛盾对矛盾持超然态度。这在实际中是非常有用的,如解决民事纠纷等。

(5) 作为科学定义的自相矛盾。例如,在集合论中把空集定义为:

$\{x \mid x \in U \wedge x \notin U\}$　　($x \notin U$ 读做“x 不属于 U”)

这就是自相矛盾的思想。然而,正是这一矛盾思想完整地定义了空集。很明显,如果不矛盾律真的是思维的规律,那么空集将无法定义了。

由此可以看出,思维可以自相矛盾,思维可以违反不矛盾要求。同理,思维可以违反排中要求、同一要求、充足理由要求,等等。

“思维的自相矛盾现象”可以称为“思维可以自相矛盾律”。这是名副其实的思维自身的规律。我们做下述规定:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为命题集,若 $\boldsymbol{B}$ 中含有 α、$\neg\alpha$,则称 $\boldsymbol{B}$ 是直接矛盾的;若以 $\boldsymbol{A}$ 中的命题为前提,可以推出 $\boldsymbol{B}$ 中的任意命题,且 $\boldsymbol{B}$ 是直接矛盾的,则称 $\boldsymbol{A}$ 是包含矛盾的。直接矛盾与包含矛盾统称为自相矛盾。设 T 为任一人一生中某一时间区间,$\boldsymbol{C}$ 为在由 T 时间区间中所思考的命题组成之集,且 $\boldsymbol{C}$ 是自相矛盾的,则称 T 为矛盾区间。思维可以自相矛盾律是指,在任何能进行正常逻辑思维的人的一生中必定可以找到矛盾区间 T。“思维可以自相矛盾律”简称为“可以矛盾律”,并进一步简称为“矛盾律”。实际上,对于通常的人

来说，往往在他活着的一天中，其矛盾区间是不难找到的。换言之，思维的自相矛盾律就是指任何能进行正常逻辑思维的人，都必然有自相矛盾的时候。思维并不具有不矛盾的客观必然性，这才是名副其实的思维的规律。

当然，我们这里的"规律"一词始终是在马克思主义的经典意义上使用的。马克思主义认为："规律是事物发展中本身所固有的、本质的、必然的、稳定的联系。"[①]它既不能被废除，也不能被创造。规律是客观事物本身所具有的，不是人们外加给它的，因而是客观的，不以人们的意志为转移的。"天行有常，不为尧存，不为桀亡"，荀子这句话说的正是这个道理。人们的一切活动都是在规律的支配下进行的。实践证明，不遵循规律的一切行为必将失败。一切规律都是客观的。当然，人在客观规律面前并非束手无策、无能为力。规律能为人们所认识、所掌握。不难证明，逻辑规律作为客观世界的一类规律同样也是不以人们的意志为转移的，是客观的，是客观世界的反映；它不是人们能够随意创造、随意规定的；不是实证主义者卡尔纳普所认为的逻辑规律就像玩牌与下棋的规则一样，是人们任意约定的；也不是唯心主义哲学家康德所说的逻辑规律是思维本身所固有的先验的规律。逻辑规律是任何人都违反不了的。因此，必然有下述命题：如果逻辑规律是思维本身的规律，那么思维是不能违反的。例如，对于不矛盾律来说，**如果不矛盾律是思维本身的规律，那么思维是不能矛盾的**。于是，有下述假言推理：

如果不矛盾律是思维本身的规律，那么思维是不能矛盾的；
可是，如上所述，思维可以矛盾；

所以，不矛盾律不是思维本身的规律。

作为思维，人们可以思考"地球围绕太阳转"和"地球不围绕太阳转"同时并存，也可以思考二者皆无。但是为它们所思考的客观事件却无论如何是不能同时并存也不能同时皆无的。地球绕太阳转的客观事实是永远不会变的（这正是哥白尼的伟大功绩所在）。人们也可以思考"山是山又是非山"、"水是水又是非水"，而这样的"是又非"、"非又是"[②]的实物在客观世界中是不存在的。这就是《墨子·经说下》中所说的"彼此不可"。人的思维中根本不存在什么"不矛盾律"、"排中律"。然而，流行的传统形式逻辑读本却习惯于把客观的不矛盾律"事件 $\boldsymbol{A}$、$\neg \boldsymbol{A}$不可能并有"表述为"命题 $\mathbf{A}$、$\neg \mathbf{A}$ 不可能同真"（当然，只要承认二者同义，这种表述习惯也是可以尊重的），并从而把原本是"客观世界的不矛盾律"叫做"思维的不矛盾律"。至此，我们斗胆建议那些连自己也经常抛弃这个"不矛盾要求"的守卫者们，和我们一道，在需要自相矛盾时

① 转引自赵培星．论规律（M）．北京：人民出版社，1981．33．

② 引自詹剑峰．墨家的形式逻辑（M）．湖北：人民出版社，1956，59．60．

(当然不是恶意的谎言),大胆地、理直气壮地、理论联系实际地自相矛盾。理所当然,人们在做那种势在必行的自相矛盾的思考时 **A** 与¬**A** 必定有一为假。

综上所述,我们看到,逻辑规律之不矛盾律只能是客观世界的,是客观世界的逻辑规律。

思维事实上是可以自相矛盾的。流行的形式逻辑读本在“不矛盾律是思维的基本规律”的所谓“真理”的指导下提出“思维不矛盾要求”,束缚了人们的创造性思维,抑制了理论思维的进步,误导逻辑学爱好者(包括后起逻辑学家)的研究方向,从而阻碍了逻辑科学向前发展的进程。只有从“思维不矛盾要求”的习惯性思维模式的桎梏中摆脱出来,承认思维可以自相矛盾,在需要自相矛盾、必须自相矛盾时,应该自相矛盾,才能使我们的思维活动得以健全发展,从而推动理论思维的进步。

3.3 逻辑规律不是符号自身的规律

如果说逻辑的思维说是源远流长、古已有之的话,那么,逻辑的符号说可谓当今的摩登流派。主要以美国哲学家皮尔士和卡尔纳普为代表。皮尔士认为,“逻辑是关于记号的理论”,是“研究关于记号、特别是符号的必然的一般规律的科学。”①而卡尔纳普则断言:“逻辑只是按着一定规则来运算的符号系统,无论在任何地方都不涉及这些符号的意义,而只涉及这些符号的种类,以及这些符号所遵循的形式演算”,“逻辑的研究既不涉及作为心理活动的思想,也不涉及思想的内容,我们只涉及语句。”②可见,在头脑中进行的思维与其语言载体是截然不同的。因此,符号说坚决否认逻辑在事实上研究过思维本身,彻底分清了在人类头脑中进行的思维和作为思维的一种物质载体的符号(泛指人工符号、自然语言)的根本区别,对当代逻辑科学的发展做出了重大贡献。但符号说又称“逻辑只是按照一定规则来运算的符号系统,无论在什么地方都不涉及这些符号的意义,而只涉及这些符号的种类,以及这些符号所遵循的形式演算”。可是,“符号所遵循的形式演算”及“这些符号的种类”构建的客观依据又是什么呢?这是“符号说”无法回避也无法解决的问题。

人工符号作为表意符号,是人们认识、揭示客观世界的逻辑结构及其逻辑规律的辅助性工具。不管是刻画词的符号,还是命题的形式化过程中刻画事件的符号串,都不能随意胡编乱造,而必须按照一定的客观规则进行。例如,韩非在

① 扬百顺. 现代逻辑启蒙(M). 北京:中国青年出版社,1989,357.

② 卡尔纳普. 哲学与逻辑语法(M). 伦敦版,1935,40.46.

《难一》中揭示的不矛盾律，一般用表达式表示为：

$$\vdash \neg(\boldsymbol{A} \wedge \neg \boldsymbol{A})$$

其中，$\vdash$、$\neg$、$\wedge$分别称为断定号（读做“单栅”）、否定号、合取号。除此之外，还有析取号$\vee$、蕴涵号$\rightarrow$、充分条件号$\rightharpoonup$等。尽管符号多种多样，其表达的意义也各有不同，但它们都必须遵循一定的客观规则。不管是刻画词的符号，还是刻画命题的式，都不是人为地胡编乱造的，而是在一定的客观规则下进行的。式的形成规则就是人们以人工符号序列刻画逻辑结构的依据，并不是人为主观地给客观世界定的法则，其目的在于严密地刻画客观的逻辑内容。这就明确而客观地回答了“符号说”无法回答的问题：构建“这些符号的种类”及“这些符号所遵循的形式演算”的客观依据。它要求人工符号的排列结构及其顺序要同客观的逻辑事件相对应。正如当我们要表达一个化学方程式时，化学分子符号的排列结构要和客观物质化合物的化学结构相符合。例如，氢氧化钠和盐酸的反应，其化学方程式为：$NaOH + HCl = NaCl + H_2O$。其所刻画的是客观的化学规律，而不是什么符号的规律。

可以看出，形成规则作为人工符号的式的规则，是客观的，不随人的意志而转移。没有客观事件的逻辑结构，就没有“式的形成规则”。逻辑结构是客观存在的，在人们还未刻画出客观世界式的规则前早已存在。事件的逻辑结构的客观统一性，必然迫使人们按照客观的规律制定出相应的式的规则来。它是人们认识能力发展的必然产物。

人工符号作为人们认识世界、揭示规律的辅助性工具，为一定的学科所研究。但是作为符号，我们可以把$e \in p$和$\neg(e \in p)$写在一起，让它们并存，甚至可以把它们全部擦掉。根本不存在什么符号的不矛盾律、符号的排中律之类的符号的所谓逻辑规律。但是我们永远也擦不掉被符号所刻画的客观存在的客观事件的逻辑结构及其规律，这就从根本上否定了皮尔士等人所谓逻辑是“一种关于记号的理论”、是“按着一定规则来运算的符号系统”的观点。

因此，逻辑规律也不是符号的规律。

3.4 逻辑规律是且只能是客观世界的规律

从以上几节的论述我们可以看到，客观世界有其自身的逻辑结构和规律，这是客观存在的。人们对客观存在的逻辑结构和逻辑规律的思考和认识，属于意识，表现为相应的命题、定理等。人们的思考需要用一定的物质载体来承担，式就是用来承载命题或定理的人工符号序列（在这点功能上，它与自然语言相同）。式是人为地整理、规定，使之与客观世界的逻辑结构和规律（包括逻辑法则和逻辑定律）相对应的物质载体。逻辑规律既不是思维的规律，也不是符号

的规律,而是客观世界的规律。

我国作为与古希腊、古印度并列的世界三大逻辑发源地之一,远在春秋战国时期,就产生了关于客观世界的逻辑结构和客观世界的逻辑规律的光辉灿烂的逻辑思想。主要代表有韩非、墨翟、公孙龙等。其中韩非的逻辑思想家喻户晓。

韩非在其著名的《难一》篇中通过短小生动的寓言故事,对客观世界的不矛盾律等逻辑规律做出了深刻的刻画。他在《难一》中写道:

“楚人有鬻盾与矛者,誉之曰:‘吾盾之坚,物莫能陷也。’又誉其矛曰:‘吾矛之利,于物无不陷也。’或曰‘以子之矛,陷子之盾,何如?’其人弗能应也。夫不可陷之盾与无不陷之矛,不可同世而立。”

这则寓言告诫我们:事实上满足“不可陷”的盾和满足“无不陷”的矛这样的两件实物在客观世界中是不可并存的。这就是“韩非不矛盾律”。他是通过“或曰:‘以子之矛,陷子之盾,何如?’”这样的反问方式来阐明的。面对诘问者的问题,那个楚国商人不是回答“吾矛可陷吾盾”($\boldsymbol{A}$)就是“吾矛不可陷吾盾”($\neg\boldsymbol{A}$)。而韩非、诘问者和楚国商人都知道,在客观世界中,不存在“吾矛可陷吾盾,并且,吾矛不可陷吾盾”这样的事件。如果用人工符号 p 表示2元关系“……可陷……”、e_1表示个体“吾矛”,e_2表示个体“吾盾”。韩非不矛盾律即可表示为:

$$\neg[\,p(e_1,e_2)\wedge\neg p(e_1,e_2)\,]$$

韩非之所以在逻辑规律的研究上取得如此彪炳古今的成就,不仅因为他在《难一》中的矛与盾的故事,最根本的在于他以实事求是的唯物主义科学态度,正确而真实地揭示了客观世界的逻辑结构和逻辑规律。这体现了他的积极探索精神和求是的态度。他为世界逻辑史写下了光辉篇章。

传统形式逻辑从诞生之日起直到如今,事实上始终在研究客观世界的逻辑结构与客观世界的逻辑规律。逻辑规律是且只能是客观世界的规律。我们有下述尽举相容选言推理:

逻辑规律或者是思维本身的规律,“或者是符号自身的规律,或者是客观世界的规律”;

逻辑规律不是思维本身的规律;

所以,逻辑规律或者是符号自身的规律,或者是客观世界的规律;

逻辑规律也不是符号自身的规律;

所以,逻辑规律是客观世界的规律。

总之,逻辑规律是客观世界的规律,是客观世界实实在在地存在着的规律。从人类诞生前直到人类消失后,客观世界的逻辑规律无始无终而又无边无际地客观地存在着。宇宙具有按照客观的逻辑规律从原有事件必然过渡到新事件的

运演能力。人类的逻辑思考只不过是对宇宙这种运演能力以脑神经元作为桥梁实现的正确摹写。探究逻辑的发展史,人们所建立的一切有关逻辑的科学,都是对客观逻辑规律的揭示。在逻辑思潮层出不穷的今天,人们对逻辑研究对象的争议形成了各种流派,但“真理是时间的儿子,不是权威的儿子”(伽利略)。只有坚持以辩证唯物主义为指导思想,实事求是,才能在纷繁复杂的客观世界中正确地揭示客观的逻辑规律。相反,任何唯心的奇谈怪论都是站不住脚的。

3.5 彪炳古今的韩非定律

远在百家争鸣的春秋战国时期,我国就产生了光辉灿烂的古代逻辑。在《韩非子》的《难一》、《难势》等篇里,通过生动的寓言故事,深入浅出地陈述了不矛盾律等逻辑定律。在《难一》里说:

“楚人有鬻盾与矛者,誉之曰:‘吾盾之坚,物莫能陷也。’又誉其矛曰:‘吾矛之利,于物无不陷也。’或曰:‘以子之矛,陷子之盾,何如?’其人弗能应也。夫不可陷之盾,与无不陷之矛,不可同世而立。”

这最后一句是断语,其中的“世”是指客观世界。整句的意思是:事实上满足“不可陷”的盾和满足“无不陷”的矛这样的实物,在客观世界里不可能并存。这里揭示的显然是客观世界的逻辑规律。在《难势》里讲了相似的故事后,做出的断语则是:“以为不可陷之盾,与无不陷之矛,为名不可两立也。”

据“有言者自为名”(《韩非子·主道》),这里的“名”应指“说出来的语言”,因此,这个断语的意思是:认为有满足“不可陷”的盾和满足“无不陷”的矛这种说法,作为语句至少得否定其中之一。这里指出的则是语言构造上的定律了。

这则故事里的诘问者的“或曰”,实在厉害。好吹牛然而不讲逻辑的“楚人”面对这尖锐的诘问,也只得“弗能应也”了。因为,刚刚说过“吾矛于物无不陷”(甲)和“吾盾物莫能陷”(乙)的“楚人”的应对,不是“吾矛能陷吾盾”(丙)就是“吾矛莫能陷吾盾”(丁)。可是,丙是甲的推断,丁是乙的推断,而丁却又正好是丙的否定!

我们要探讨的“韩非定律”是指下述在这则寓言中揭举的三条逻辑定律。

(α) 不矛盾律:仅据逻辑内容即可确定“丙并且丁”必假。丙、丁就称为一对矛盾的命题。

(β) 从“甲并且乙”可推出“丙并且丁”:仅据逻辑内容即可确定“甲并且乙”是“丙并且丁”的充分条件;或者说,仅据逻辑内容即可确定:“甲并且乙”为真时“丙并且丁”必真,“丙并且丁”为假时“甲并且乙”必假。

(γ) 不自相矛盾律:仅据逻辑内容即可确定“甲并且乙”必假。能推出一对

矛盾丙、丁的命题甲、乙就称为一组自相矛盾的命题。

总起来说，这里所说的“韩非定律”是指，仅据逻辑内容即可确定：(α)矛盾的命题“丙并且丁”必假；(β)自相矛盾的命题“甲并且乙”是矛盾的命题“丙并且丁”的充分条件；(γ)自相矛盾的命题“甲并且乙”必假。

我们所说的“逻辑定律”是指：仅据逻辑内容即可确定其真假的命题。既然如此，我们就有必要先弄清楚究竟什么是语句甲、乙、丙、丁的逻辑内容。为了便于探讨，我们先将上述用文言文表述的语句甲、乙、丙、丁译成白话文，并列表对照，如表3.1所示。

表3.1 甲、乙、丙、丁古今文对照表

文言文	白话文	代号
吾矛于物无不陷	这支矛能戳穿任何物体	甲
吾盾物莫能陷	任何物体不能戳穿那面盾	乙
吾矛能陷吾盾	这支矛能戳穿那面盾	丙
吾矛莫能陷吾盾	这支矛不能戳穿那面盾	丁

我们知道，科学都是经验的。对于研究逻辑科学的人来说，有必要将科学二分为逻辑科学和逻辑外的经验科学。为了方便，把后者简称为经验科学。相应于上述划分，任一有具体含义的命题的内容便可二分为逻辑内容和经验内容——为逻辑科学所研究的内容和为此外的经验科学所探讨的内容。我们先来分析较为单纯的命题丙、丁的经验内容和逻辑内容。命题所涉及的对象的领域称为论域。命题丙的经验内容为：论域“物体”(U)，论域“物体”内的确定的个体“这支矛”(a)、“那面盾”(b)及论域“物体”上的一个确定的2元名词“能戳穿”(r)。“武器”、“刃具”、“刀”是论域“物体”上的三个逐一包含的1元名词。1元名词的特点是：外延是由论域上的单独个体为元素组成的集合。1元名词相当于传统形式逻辑里的“概念”，为了解传统逻辑的人们所熟识。而论域“物体”上的2元名词“能戳穿”与为人们所熟识的1元名词不同，它的外延不是以论域上的单独个体为元素组成的集合，而是以由论域上两个有先后顺序（简称有序）的个体构成的有序2目组（简称2目组）为元素组成的集合。通常将有序的两个个体用逗号分开一起放在括弧里来表示某2目组。如，（这支矛，那件布衫）、（这支矛，那块钢板）就分别是论域“物体”上的两个不同的2目组，前者在2元名词“能戳穿”的外延集合之中，而后者则不在其中。倘若要问论域“物体”上的另一个2目组（这支矛，那面盾）是否在2元名词“能戳穿”的外延集合之中，那就得戳戳看：要是事实上能戳穿，那就在其中；否则不在其中。这就是说，一个确定的2元名词的外延集合包含哪些2目组，是一个客观事实问题，与人们的“认为”、“希望”等主观因素无关。至于2元名词“能戳穿”的内涵，则是它的外延集

合的共仅属性——为此集合中的任意2目组所共有，而且，只为此集合中的2目组所仅有的属性。2元名词的内涵通常称为2元关系。与之相应地，1元名词的内涵就称为1元关系。至此我们揭举了命题丙的全部经验内容：论域“物体”(U)，论域“物体”内的确定的个体“这支矛”(a)、“那面盾”(b)，论域“物体”上的一个确定的2元名词“能戳穿”(r)。与丙的上述经验内容相对应，丙的逻辑内容分别有：一般的论域U，论域U内的某两个个体常项a、b及论域U上的某一2元名词r；此外，丙的逻辑内容还有：a、b构成2目组(a,b)，考虑2目组(a,b)满足2元关系r，这通常符号地表示成$r(a,b)$。因此，丙的全部逻辑内容可用符号串$r(a,b)$来刻画，而符号串$r(a,b)$就称为命题丙的符号表达式，并简称为式。倘若把命题丙的全部内容比做在三个空格r、a、b里分别放进去三件东西“能戳穿”、“这支矛”、“那面盾”的架子，那么，从这架子上拿下来的三件东西就是丙的经验内容，而拿走东西后的空架子就是丙的逻辑内容。当然，空架子与可以放进、拿走的东西一样，也是实体。

命题丁的经验内容与丙完全一样，所不同的只是逻辑内容：考虑2目组(a,b)不满足2元关系r。刻画丁的全部逻辑内容的式为$\neg r(a,b)$，这里的$\neg$称为“否定号”，表示“不”。丁跟丙的唯一区别是：拿走三种东西后的空架子上多钉了一根称为“否定”的木条。$r(a,b)$与$\neg r(a,b)$就称为一对矛盾命题。

以合取号$\wedge$表示“并且”。命题“丙并且丁”的式为$r(a,b) \wedge \neg r(a,b)$。于是韩非所揭举的逻辑定律($\alpha$)“不矛盾律”即可表达成“$r(a,b) \wedge \neg r(a,b)$必假”，或者，表示为：$\neg[r(a,b) \wedge \neg r(a,b)]$。

我们用小写字母x、y等来泛指论域上的任意个体，这泛指论域上的任意个体的x、y就称为个体变元号。我们用半边箭头$\rightharpoonup$表示充分条件关系，$\rightharpoonup$就称为充分条件号。有了个体变元号x、y和充分条件号$\rightharpoonup$，符号式$U(x) \rightharpoonup R(a,x)$就表示“$x$是物体，必然，这支矛能戳穿$x$”，亦即，“这支矛能戳穿任何物体”。于是，我们就能写出分别刻画命题甲、乙的逻辑内容的下述二式：

$$U(x) \rightharpoonup r(a,x),\ U(y) \rightharpoonup \neg r(y,b)$$

于是，前述“韩非定律”就表示为：

$$[U(x) \rightharpoonup r(a,x)] \wedge [U(y) \rightharpoonup \neg r(y,b)] \vdash r(a,b) \wedge \neg r(a,b)$$

这里，推出号“$\vdash$”左边的式中的个体变元号x、y分别以个体常项号b、a代入，并把恒真的$U(b)$、$U(a)$分离出去，即得出$\vdash$号右边的式。我们称右式为左式的“个别例”。这样一来，上述逻辑定律(β)可陈述为：从含有个体变元号的命题可推出其个别例，或者，仅据逻辑内容即可确定含有个体变元号的命题是其个别例的充分条件。这就是说，“从……可推出……”与“仅据逻辑内容即可确定……是……的充分条件”同义。

从定律(α)、(β)即可逻辑地得出定律(γ):

$$[U(x) \rightarrow r(a,x)] \wedge [U(y) \rightarrow \neg r(y,b)] \text{必假}$$

或者表示为:

¬	{[$U(x) \rightarrow r(a,x)$]	∧	[$U(y) \rightarrow \neg r(y,b)$]}
不可	吾矛于物无不陷	同世而立	吾盾物莫能陷

这里提请注意,在证明定律(γ)的过程中,逻辑不仅管推理的正确,而且还管前、后件(即定律(α)、(γ))的真假。能推出一对矛盾 $r(a,b)$ 和 $\neg r(a,b)$ 的 $U(x) \rightarrow r(a,x)$ 和 $U(y) \rightarrow \neg r(y,b)$ 就称为是"自相矛盾"的。自相矛盾的命题在逻辑上说不弱于矛盾的命题;前者可以同假,但不能同真,后者既不能同假,又不能同真。还是采用前述关于"架子"的比喻,这逻辑定律(γ)"不自相矛盾律"说的是:在有3个空格子的架子$[U(x) \rightarrow r(a,x)] \wedge [U(y) \rightarrow \neg r(y,b)]$的空格子 r、a、b 里不管放进去什么样论域上的哪一个2元名词、哪两个个体常项词,获得的必定是假命题:上述命题为假可以不管经验内容而仅仅依据逻辑内容确定。若对此尚有怀疑,请看表3.2。

表3.2 不自相矛盾律的实例

论域 U	2元名词 r	个体常项词		命 题 甲	命 题 乙
		a	b	$U(x) \rightarrow r(a,x)$	$U(y) \rightarrow \neg r(y,b)$
国家	侵略	A国	B国	A国侵略任何国家	任何国家不侵略B国
人	认识	张三	李四	张三认识任何人	任何人不认识李四
实数	大于	m	n	m 大于任何数	任何数不大于 n

类似的例子俯拾皆是,不胜枚举。因此,说得更确切些,作为客观的逻辑定律的语言表述形态的逻辑定理,是以具有共同逻辑内容然而经验内容各异的有具体含义的命题为元素组成的集合。韩非就是通过指出集合中的一些引人入胜的元素来揭示他的逻辑定律的。韩非寓普遍有效的逻辑定律于形象、生动的个别事例之中,其手法是十分高超的。不仅如此,更难能可贵的是,在韩非的逻辑思想里还显露出当代逻辑的不用逻辑量词然而分析到多元关系、变项、常项的"语义的(semantical)研究"和"语构的(syntactical)研究"端倪:"不可同世而立"(《难一》)和"为名不可两立"(《难势》)——从语义上说,对于客观世界的任何对象领域 U 和领域 U 上的任意2元关系 r 来说,满足 $U(x) \rightarrow r(a,x)$ 的个体 a 与满足 $U(y) \rightarrow \neg r(y,b)$ 的个体 b 不可能同时并存(这是客观世界的逻辑规律);从语构上说,语句 $U(x) \rightarrow r(a,x)$ 与 $U(y) \rightarrow \neg r(y,b)$ 不可能同时成立,亦即,语句$\neg [U(x) \rightarrow r(a,x)] \wedge [U(y) \rightarrow \neg r(y,b)]$是逻辑定理(这是对上述客观世界的逻辑规律的语构的摹写)。

两千多年前，我们中华民族的先贤曾为逻辑科学建立了丰功伟绩，开辟了径直通向当代形式逻辑的康庄大道。然而遗憾的是，后人不曾在先哲开拓的金光大道上继续前进，却一味崇奉从建立在不对其做进一步分析的1元名词之上的直言命题出发的亚里士多德的简陋贫乏的逻辑体系，以致如今传统的形式逻辑甚至连对从自相矛盾的“甲并且乙”推出矛盾的“丙并且丁”这种现代小学生都会自发地做出的推理过程都不能进行逻辑理论分析，而从建国初期起又去追随高尔斯基辈的以“在任何议论中都不应该有形式的矛盾”为“内容”因而可以“违反”的“矛盾律”；于是，曾在古代遥遥领先的逻辑学如今却远远地落在后边了。应该是朝着彪炳古今的韩非定律所照亮的方向长足前进，让祖国光辉灿烂的逻辑思想发扬光大的时候了！

第2篇　逻辑思考

第4章　逻辑思考概述

4.1　逻辑思考的定义

思考就是思维,逻辑思考就是逻辑思维。由于多年的习惯,加上自己的语感,我们习惯于用"思考"一词。有时候,为了区分名词和动词,我们也会二者都用。

为了方便,当代形式逻辑思考就简称逻辑思考。

在纷纭浩繁的大千世界中,有形形色色的客观对象。有由对象构成的丰富多彩的客观事件,也有无限多样的客观逻辑规律。它们都是可以为人所思考,为人所认识、整理和表述的。譬如,以人为论域,对象(张三,李四)可以为人所思考,这个思考就是一个2目组词。事件"张三认识李四"、"张三不认识李四"也可以为人所思考,对这两个事件的思考分别是一个2元原子命题、一个纯真值复合命题(即否定命题),如此等等。这种思考正是我们所要探讨的逻辑思考。所谓逻辑思考,就是关于客观世界的对象、事件或逻辑规律的思考。

关于客观世界的对象的思考称为词(又称概念)。客观的对象是无限多样的,但归根结底,不外乎经验对象和逻辑对象两种。关于经验对象的思考称为经验词;关于逻辑对象的思考称为逻辑词。

关于客观世界事件的思考称为命题。事件分原子事件和复合事件。关于原子事件的思考称为原子命题;关于复合事件的思考称为复合命题。当然,被命题所思考的事件可以为有,也可以为无——为无就是有补或异在。

关于客观世界的逻辑规律的思考称为逻辑定理。逻辑规律可二分为逻辑定律和逻辑法则。于是,逻辑定理也相应地二分为两类:一是关于逻辑定律的思考,称为有效命题;二是关于逻辑法则的思考,称为逻辑规则。

值得指出的是,逻辑定理是一种精神现象,说出来便是一串声音,记下来便是一串文字或符号。它从来不曾揭举"思维的规律",尽管思维确实也有自身的规律,而且有关的科学也确实有必要探讨它们。逻辑定理是揭举客观世界的逻辑规律的。有效命题是对客观世界的逻辑定律的揭举,逻辑规则是对客观世界的逻辑法则的揭举,它们都不曾揭举过思维自身的规律。迄今为止的传统形式

逻辑作为理论体系,事实上只是对客观的逻辑结构和逻辑规律的不完备的认识、整理和表述,其本身只是受思维规律支配的思维现象,而并非支配思维现象的思维规律。事实上它们从来不曾研究过支配逻辑思维现象的思维规律。

在人类思考的十分广泛的领域里,人们对于客观世界的对象、事件、逻辑规律的思考是逻辑思考。当然,除此而外,还存在大量的非逻辑思考,如有些音乐家作曲、有些舞蹈家编舞、有些画家构思画面、有些文学家的描写等。读过鲁迅的杂文《立论》的人,无不叹服于鲁迅对那位老师的圆滑的处世哲学的刻画。那位老师给学生的所谓“啊呀!这孩子啊!你瞧!多么……。呵唷!哈哈!Hehe!he!he he he!”的答复同样也不是逻辑思考,即使它是用文学语句来表达的。讨论一个思考究竟是否为逻辑思考,就看其是否合乎相应的定义。合乎定义的为是,不合乎定义的为否,然而,不管是与否,均无所谓“正确”、“错误”可言。我们不应指着一个非逻辑思考说:“这是个错误的逻辑思考”、“这个逻辑思考是不正确的”、“这个逻辑思考违反了某某逻辑规律”等。这正如我们在规定清楚“哺乳动物就是有乳腺的动物”之后,就不能指着一把鞋刷子说:“这是只错误的哺乳动物”、“这只哺乳动物是不正确的”、“这只哺乳动物没有乳腺,违反了哺乳规律”等一样。如果人们把那些非逻辑思考看做逻辑思考,那只是人们认为是这种愿望的错误,而就在这时,那个非逻辑思考却仍然是非逻辑思考,在一定领域中发挥一定的功能,其本身并无“错误”可言。

4.2 逻辑思维的内容

在这一节和下一节里,我们同时用“思维”和“思考”。当做名词用时,我们用“思维”一词;当做动词用时,我们用“思考”一词。

4.2.1 逻辑思维的内容

任一逻辑思维都有内容。为词、命题、逻辑定理所思考的客观世界的对象、事件、逻辑规律就称为相应的逻辑思维的内容,有时也称为具体的内容或全部的内容。

词(概念)的内容就是为词所思考的客观对象。在客观世界中,经验对象既具有经验属性又具有逻辑属性,故而经验词既具有经验内容又具有逻辑内容。词的经验内容即被思考的客观对象的经验属性,逻辑内容即被思考的客观对象的逻辑属性。逻辑对象只有逻辑属性而无经验属性,因此,逻辑词只有逻辑内容而无经验内容。

命题的内容就是被命题所思考的客观的事件。事件由逻辑对象和经验对象构成,因而命题由逻辑词和经验词构成。组成命题的经验词的经验内容就是命题的经验内容;组成命题的经验词和逻辑词的逻辑内容就是命题的逻辑内容。

理解了词和命题的内容,也就不难理解逻辑定理的内容。逻辑定理的内容就是被其所思考的逻辑规律。逻辑规律同样有经验性质和逻辑性质,相应地,逻辑定理也有经验内容和逻辑内容。逻辑定理的经验内容即被思考的逻辑规律的经验性质,亦即在逻辑规律中出现的原子事件的经验性质。逻辑定理的逻辑内容即被思考的逻辑规律的逻辑性质,亦即决定其为客观的逻辑定律的逻辑存在事件的逻辑结构或关于普有事件的充分条件关系。

总之,任一逻辑思维都有其具体内容,即被思考的相应的对象、事件、逻辑规律。而任一逻辑思维的具体内容可分为经验内容(当有时)和逻辑内容两方面,是这两方面的有机结合。不包括在具体内容中的经验内容没有,游离于具体内容的逻辑内容也没有。撇开了具体内容也就抛掉了逻辑内容。

4.2.2　思维的内容究竟是思维还是思维外的客观物质及其属性

有人认为:概念的内涵是反映在概念中的事物的属性(有的说是本质属性,有的说是特有属性)。概念的外延是反映在概念中的事物。提请注意,这里的两个“反映在概念中的”,即,概念的内涵和外延是在概念里面的思想。这里提出一个问题:思维(这里指逻辑思维)的内容是思维中的思维,还是思维外的客观事物及其属性?

我们先来考察究竟什么是思维的内容。我们采用公理的方法。下面给出关于思维及其内容的四条公理。

(1) **有限公理**: 令 $P=\{x|x$ 是思维$\}$,迄今为止,P 的基数(即元的个数)m 为有限自然数。

(2) **内容公理**:任一思维 x 有内容。

(3) **传递公理**: 若 y 是 x 的内容,并且,z 是 y 的内容,则 z 是 x 的内容。

(4) **排己公理**: x 的内容不是 x。

在这个公理系统中加入下述假设。

思维假设(α): 思维的内容是思维。

于是,据思维假设和 4 条公理得出:可以获得一个按照 x_{i+1} 是 x_i 的内容的顺序(即在前面出现的思维是紧邻的在后的思维的内容)的一个思维组成的序列:

$$x_1, x_2, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$$

据传递公理和排己公理,上述序列中的每一个思维 x_i 均和其余的思维不同。据有限公理,$n<m$。这就是说,上述序列有最后的一个思维,而且在其中出现的思维的个数不多于 m。现在,我们来考察这最后的一个思维 x_n 的内容究竟是什么? ①根据内容公理,x_n 有内容。②又根据有限公理,x_n 的内容只能在上述序列中找。③设 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 x_n 的内容,据传递公理,得出 x_i 是 x_i 的内容;但是,这

和排己公理矛盾。④若要避免这个矛盾,那就只好假设 x_n 无内容,而这又和内容公理矛盾。于是,就在已经给出的公理系统内证明了思维假设(α)的否定:思维的内容不是思维($\neg\alpha$)。

为了证明思维的内容究竟是什么,我们还需要再引入第 5 条公理:

(5)**论域公理**:思维的内容不是思维就是思维外的物质及其属性。

在上面这个扩大了的含有 5 个公理的公理系统内,只需用侧证法(即选言证法)就可以证明关于思维的内容的"物质定理"。

物质定理:思维的内容是物质及其属性。

至此,我们严格地证明了:思维的内容不是思维,思维的内容是思维外的物质及其属性。

4.3 逻辑思维的形式化

从一逻辑思维的具体内容中撇开其经验内容,提取其逻辑内容,并用能表述其逻辑内容的人工语言表述出来的过程,就称为逻辑思维的形式化。作为词、命题、有效命题的形式化的结果的符号序列,分别称之为符号、式(formula)、有效式。

对此,我们用下列实例加以说明:

(1)中华民族的摇篮;

(2)中国战胜日本;

(3)凡在座的解放军学员皆高于 1.6 米;

(4)若温度上升,则水银柱升高。

上述诸例表达的都是有着特定内容的思维。例(1)是以一个 2 阶常项"中华民族的摇篮"为内容的 2 阶常项词,其中的"是一个 2 阶常项"部分为逻辑内容。该 2 阶常项词由一个个体构成的一目组词"中华民族"和一个一元函数词"……的摇篮"所组成。"中华民族"的逻辑内容就是"一个个体"、"一个一目组","……的摇篮"的逻辑内容就是"一个 1 元函数"。我们用正体小写拉丁字母 e、f^1 分别表示一个个体词、一个函数词,并对个体词辅以左右括号表示一目组词(e),则有符号序列 $\mathrm{f}^1(\mathrm{e})$。$\mathrm{f}^1(\mathrm{e})$ 就是例(1)的形式化结果,称为 2 阶常项词符。例(2)是对一闭 2 元原子事件的思考的闭原子命题,其具体内容为被思考的闭原子事件"中国战胜日本"。其中的由一个常 2 目组、一个 2 元关系构成的闭原子事件就是逻辑内容。用 p 表示构成该原子命题的 2 元关系词,用(e_3,e_0)表示构成该原子命题的常 2 目组词,则该原子命题就可形式化为 $\mathrm{p}(\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_0)$。$\mathrm{p}(\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_0)$ 称为闭原子式。例(3)是以"凡在座的解放军学员皆高于 1.6 米"表述以一闭合取事件为内容的闭合取命题。其中的逻辑内容为:由 m 个 1 目组、m 个辖域不同而关系相同的 1 元关系构成的闭原子事件,上述 m 个闭原子事件的

闭合取事件。如果用 $p(e_1)$、$p(e_2)$、…、$p(e_i)$、…、$p(e_m)$ 分别依次表示从第一个至第 m 个全部闭原子式，则有下面的式：$p(e_1) \wedge p(e_2) \wedge \cdots \wedge p(e_i) \wedge \cdots \wedge p(e_m)$。此式就是例(3)的形式化表述，称为闭合取式。(4)是以“若温度上升则水银柱升高”所表述的以一闭充分条件事件为内容的充分条件命题。其逻辑内容为：由两个不同的个体常项、两个不同的1元关系构成的两个闭1元原子事件，以这两个闭1元原子事件为前、后件的闭充分条件事件。如果用 $p(e_1)$ 表示作为前件的闭原子命题（一个闭支的式），用 $q(e_2)$ 表示作为后件的闭原子命题（另一个闭支的式），那么，此闭充分条件命题可形式化为 $p(e_1) \rightharpoonup q(e_2)$。$p(e_1) \rightharpoonup q(e_2)$ 就称为例(4)的闭充分条件式。

以上有关命题的形式化过程表明，命题的形式化常常是在词的形式化的基础上完成的。然而不管是刻画词的符号，还是刻画命题的式都不是随意胡编的，而是按一定的规则（即形成规则）进行的。形成规则是人们以人工符号序列刻画逻辑结构的依据。当然，形成规则也不是随心所欲地规定的，而是以客观的逻辑结构为依据的。鉴于编写出一命题的式，目的在于严密地刻画该命题的逻辑内容，因而式的形成规则要顺应作为命题的逻辑内容的事件的客观的逻辑结构：组成式的人工符号的排列结构要同事件的逻辑结构相对应，这正如书写化学分子式时，分子式的化学符号的排列结构要和化合物的客观的化学结构相对应一样。事件的逻辑结构原本是客观的，在人定出式的形成规则之前早就存在了，而且，还确实具有规则性（这正像化合物的化学结构具有规律性一样）。这种规则性是不以人的意志为转移的客观的统一性。人为的人工符号排列的式的形成规则，只不过是事件的逻辑结构的客观的统一性在人的认识中的反映。事件的逻辑结构的客观统一性迫使人们制定出如此这般的式的形成规则来。这也正是根据事件逻辑结构确定的形成规则而形成、编写出来的命题的式正好与相应事件的客观的逻辑结构一致的客观依据。为了特别强调式的符号排列结构能良好地表达事件的逻辑结构，有时就称式为良构式（well formed formula）。上述有关命题的形式化结果——各种不同的式，就分别良好地表述了作为命题的逻辑内容的相应事件的逻辑结构，因而是相应的良构式。

我们再来考察逻辑定理的形式化。对于有效命题而言，其形式化过程与命题无异。所不同的是，作为形式化结果的有效式是刻画有效命题的逻辑内容的。一个有效式是一个具体的有效命题的式；并且仅仅依据一个有效式就可以确定一个有效命题为真。前面曾不只一次地提到我国古代先贤韩非所揭举的客观世界的逻辑定律——不自相矛盾定律。关于这一定律的逻辑思考——不自相矛盾命题的逻辑内容是：决定其为不自相矛盾定律的逻辑存在事件的客观的逻辑结构，亦即：$\neg[(U(x) \rightharpoonup p(e_1, x)) \wedge (U(y) \rightharpoonup \neg p(y, e_2))]$，其中，$U$ 指论域“物体”，p 指论域“物体”上的2元关系“……戳穿……”，e_1 指这支

矛,e_2指这面盾,x、y 泛指任意物体,→、∧、¬(或 ¯)分别为充分条件号、合取号、否定号。对此,除了充分条件、合取、否定采用同名同体符号表示外,如果将其中的斜体拉丁字母改为同名正体拉丁字母,则得到韩非不自相矛盾命题的形式化表示:$\neg[(\mathrm{U}(\mathrm{x})\rightarrow \mathrm{p}(\mathrm{e}_1,\mathrm{x}))\wedge(\mathrm{U}(\mathrm{y})\rightarrow\neg \mathrm{p}(\mathrm{y},\mathrm{e}_2))]$。此式即为有效式。必须明确的是,一有效式是对一具体逻辑定律的逻辑结构的揭举,或者说,也是对一整类具有这种逻辑结构的具体逻辑定律的揭举。有效式不是对什么“思维形式的规律”的揭举。诚然,“思维形式”(规定清楚后)也许确实有自身的规律。这正像化学反应式事实上揭举物质的化合、分解的客观规律,根本不曾揭举什么“思维的规律”或“思维形式的规律”一样。至于逻辑规则,由于比有效命题高一层次,因此,其形式化不能在有效命题的同一层次中进行。相对于有效命题这一层次的形式语言来说,规则必须采用元语言陈述。当然,为了方便,在元语言中也可以加入作为辅助手段的人工符号。如本书中表示各种语构变元的黑正体大写拉丁字母 **A**、**B**、**C**、**D**(表示任意的式)、黑正体小写字母 **a**、**b**、**c**、**d**(表示任意的项符),以及 $\models$、$\vdash$、$\Vdash$ 等。在相应的规则中不属于形式语言而属于元语言。为体现与除了规则之外的逻辑思维的形式化的区别,规则的人工符号表达(即对规则的逻辑内容的符号刻画)不妨称为“非形式的符号化”,并简称为“符号化”。

在逻辑科学中引入形式化表达式决不是故弄玄虚,而是鉴于清晰而又简便地进行严格确切的理论探讨的实际需要。传统形式逻辑之所以一直在原地踏步,形式语言贫乏不能不说是一个重要原因。

4.4 逻辑思维、思维对象、语言载体的关系

词(概念)、命题是逻辑思维,语词、语句或符号、式则分别是上述逻辑思维的自然语言或人工语言表述。而现实世界的相应对象、相应事件则作为逻辑思维的词(概念)、命题的思考对象(内容)。这三者紧密联系,又有严格区别:逻辑思维是意识(脑神经元的一种搭接);自然语言或人工语言是承载意识的语言载体(一串声音或笔画);现实世界的对象、事件则是为意识所反映的物质原型(独立于意识而存在),即思维对象。

逻辑思维同思维对象是一一对应的。客观世界的对象、事件具有唯一的确定性,由其决定了相应的逻辑思维具有唯一的确定性。

逻辑思维需要有物质载体,而常用的是语言载体。本书所讨论的符号、式等是这种载体的一种特殊情况。由于用以刻画逻辑思维的逻辑内容的符号、式是按一定的形成规则产生的,因而与客观世界的逻辑结构完全一致,并因此与唯一确定的逻辑思维一一对应。作为思维的载体的自然语言则不然。自然语言具有约定性、随意性;由之决定了自然语言本身的语言结构与客观世界的逻辑结构未

必一致。事实上二者往往是不一致的,它们的关系错综复杂、扑朔迷离。正由于此,自然语言与唯一确定的逻辑思维并不一一对应。承载唯一确定的逻辑思维的自然语言各种各样,而其中每一种又可以有多种用途。同一个逻辑思维可由不同的自然语言承载,同一自然语言也可以承载不同的逻辑思维。逻辑思维同自然语言载体之间的这种关系,可归结为两个“一对多”的关系。我们先考察从语言载体到逻辑思维的一对多关系。俗话说,“听话听声,锣鼓听音”,之所以要去听“声”听“音”,因为说出一句话来,可以有许多含义,即可以承载不同的思维。例如,汉语语词“日”可以指称:太阳(红日高照)、白天(日班)、一昼夜(一年三百六十五日)、某一天(生日),时候(往日、来日方长)、一个曾经残暴地侵略过我国的一衣带水的邻邦(抗日战争)等。再如,一自然语句“热爱祖国的孩子”,可以在动宾结构中指称:热爱这样一种孩子,祖国的而非外国的;也可以在偏正结构中指称:具有热爱祖国这种思想品德或行为的孩子。类似的例子不胜枚举。引起语言载体到思维之间的“一对多”的原因是很多的,一词多义(如前例)和语法结构歧义(后例)是重要的两个原因。

我们再看另一个“一对多”关系:同一思维可以由不同词语或语句承载的从思维到载体的关系。引起这种关系的原因之一是自然语言中的同义现象。譬如,客观世界只有一个唯一确定的个体“太阳”,只有一个唯一确定的闭2元原子事件“地球绕太阳转”,故而,对于全人类来说,分别以上述个体和事件为内容的逻辑思维个体词和闭2元原子命题也是唯一确定的,也只有一个。然而承载它们的自然语言却有成千上万个,其中的每一个又都可以有不同的指谓(世界上至少有两千五百种民族语言,每种民族语言又都有一义多词、一词多义的同义、歧义现象)。仅以汉语而言,承载个体词“太阳”的自然词语至少有以下这些:太阳、日、白驹、金虎、赤乌、阳乌、金乌、金轮、火轮、赤轮、晷景、朱曦、阳景、大明、明光、朱雀等。而且对不同时候、不同季节出现的“太阳”又有各种不同的称呼。早晨的太阳,称为朝阳、朝曦、朝暾、朝光、朝晖、初旭、旭日、初景等;而黄昏的太阳则可以叫做夕阳、夕照、夕晖、夕曛、残阳、斜阳、落日等。用以指称春、夏、秋、冬的太阳又可以分别采用:春晖、骄阳、丽日、煦日等词语。在分析承载逻辑思维的个体变元词、联结词的语言载体时,也有同样的情况。这时,还有由于表达的省略而引起“一对多”。例如同一思维:若x做贼,则x心虚($s(x) \rightharpoonup p(x)$),可以采用下述不同的语句表达:

(1) 谁做贼谁就心虚;

(2) 谁做贼谁心虚;

(3) 做贼的人一定心虚;

(4) 做贼一定心虚;

(5) 做贼必心虚;

(6) 如果做贼,那么心虚;

（7）做贼心虚；

……

以上的(2)省略了连结词“就”,(3)省略了后一个体变元词的语言载体,(4)、(5)、(6)将个体变元词的语言载体统统省略不提。而最合乎语言表达习惯的却是将个体变元词、联结词的语言载体统统省去的最经济、最简洁的说法,即“做贼心虚”。不难看出,与客观世界逻辑结构最接近的表达是“若 x 做贼,则 x 心虚”。但这并不符合一般人的表达习惯。最符合一般人的表达习惯的语句的语言结构,与客观世界的逻辑结构很不相同。这也佐证了前面关于“事实上自然语言的结构同客观世界的逻辑结构之间往往不一致”的说法。同时也提醒人们,只有从语言载体通过思考中介去抓住客体,并分析出客观的逻辑结构,才能对为语言载体所承载的逻辑思维命名并归类。

总之,语言载体与逻辑思维之间的两个“一对多”关系是十分复杂的。然而,在一定语境下,一个语言载体承载一个唯一的思维。我们正是依据一定的语境和一定的语言载体表达的内容,认定一定语言载体承载的一定的思维。以上游离语境讨论的两个“一对多”关系,则主要为了说明语言载体与思维的联系和区别。倘若把逻辑思维比做酒,那么,语言载体就是玻璃容器。尽管酒往往盛在玻璃容器里,但酒和玻璃容器根本不相同:同样的酒可以由不同的玻璃容器盛装,同样的玻璃容器中也可以注入不同的酒,甚至还可以容纳根本不同于酒的其他物品,如硫酸、甲苯、乙醚等。这就是说,逻辑思维及其思维的对象是一一对应的,而与其载体却是一对多的关系。当然,语言有其特有的结构,也值得研究——在语言学中。不过,倘若企图通过分析语言的结构来捉摸思维的结构,就会如同想要通过化验容器的成分来把握酒的特征一样——隔靴搔痒,不得要领。

逻辑思维、思维的对象、语言载体之间的关系可用图 4. 1 表示。

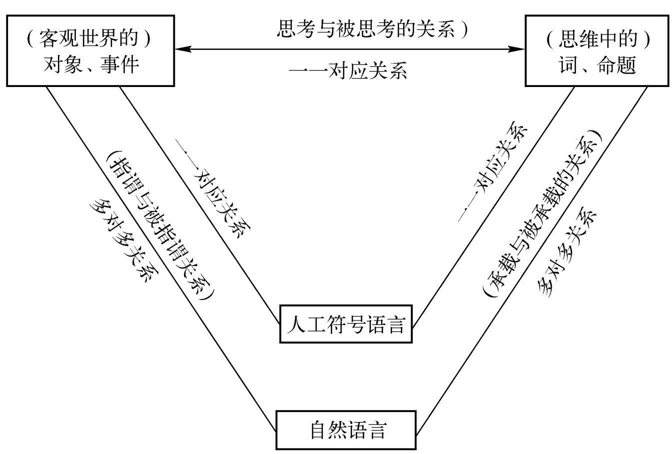


图 4. 1　逻辑思维、思维的对象、语言载体之间的关系

4.5　当代形式逻辑语义学、语构学、语用学

为了达到确定的目的,在一门科学中采用不同于自然语言的人工符号标志的系统称为符号语言。各门学科(如数学、物理、化学等)都有适合于自己的特殊的符号语言。符号语言的使用由来已久。在亚里士多德的逻辑学中就已经开始使用人工符号,尽管并未形成系统。严格意义的人工语言——对一门学科所研究的对象用一种人为的表意符号系统去加以描述或处理的语言,则是近代的产物。为了避免自然语言的同义或歧义现象,为了精确、简明、方便,更主要的是为了能进行严格而又灵巧的演算,在本书中系统地采用了适应其研究对象的符号语言。像自然语言一样,本书中的符号语言也具有指谓性:指谓现实世界的事物或规律。

关于为逻辑学所采用的符号语言,可以进行三个方面的研究:关于为符号语言所指谓的客观世界的以充分条件关系为核心的逻辑结构或逻辑规律的研究称为语义的(Semantic)研究;关于符号语言自身的排列结构和变形规则的研究称为语构的[①](Syntactic)研究;而关于以语义为中介的互相同义的符号语言和自然语言的互相转换的研究则称为语用的(Pragmatic)研究。这三者中,语义的研究是根本,语构的和语用的研究是为语义研究服务的。语构和语用的研究不仅是在语义的研究成果的基础上进行的,而且还回过头来为语义的研究服务。正由于符号语言自身的排列结构和变形规则精确地反映了客观世界的以充分条件关系为核心的逻辑结构和逻辑规律,这就决定了语构的研究的终极目标是清晰、透彻而又完备、无误地进行语义的研究;而语用的研究则是为了沟通理论和实际,使语义的研究深深地植根于和自然语言须臾不可离的普通逻辑思维实际,以便从中吸取丰富的养分,并把语义的研究成果应用于普通逻辑思维实际,借以不断提高使用一定自然语言的整个民族的理论思维水平。

关于当代形式逻辑中采用的符号语言的语义的、语构的、语用的研究就分别称为当代形式逻辑语义学、当代形式逻辑语构学、当代形式逻辑语用学(Contemporary Formal Logical Semantics, Contemporary Formal Logical Syntactics, Contemporary Formal Logical Pragmatics),在不致引起含混的情况下,可简称为逻辑语义学、逻辑语构学、逻辑语用学。这三者之间的关系可用图4.2给予形象的描绘。

---

① 也有译为语法的,或者,语形的。

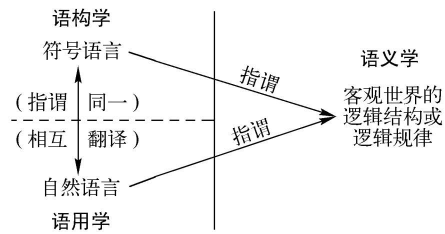


图 4.2　当代形式逻辑语义学、语构学、语用学三者之间的关系

4.6　当代形式逻辑语用学 1、2、3 准则

如果说,韩非在《韩非子·难一》里揭举的分析到客观的项且包含客观的 2 元关系的客观世界的逻辑规律"不自相矛盾律"堪称中国古代客体逻辑语义学的范例,那么,墨翟在《墨子·小取》中关于"侔"的"是而然"、"是而不然"等一系列讨论则开了中国古代客体逻辑语用学的先河。客观事件间的客观的刻画清楚后的充分条件关系就是必然关系。当代形式逻辑以辩证唯物主义为哲学指导,继承、发展以墨翟、韩非为杰出代表的中国古代自发的客体逻辑渊源,采用可按对客体指谓同一的准则与自然语言互相翻译(语用学)的符号语言的机械的排列结构和变形规则(语构学)来研究以客观事件间的充分条件关系为核心的客观世界的逻辑结构和逻辑规律(语义学),向人类在认识宇宙时提供普遍有效的从已知进入新知的逻辑工具。当代形式逻辑最显著的特征可归结为下述元逻辑思想:客观世界具有像化学结构、化学规律一样客观的逻辑结构、逻辑规律;宇宙不仅具有按一定的化学结构、化学规律从原有物质生成新物质的化学反应能力,还具有按一定的逻辑结构、逻辑规律从原有事件必然过渡到新事件的逻辑运演机制。当代形式逻辑就是以宇宙际客观的逻辑运演机制为研究对象的根本不同于思辨逻辑(以语言结构或"思维形式"为研究对象而不涉及客体)的真正的形式逻辑。当代形式逻辑由语义学(研究以事件间的充分条件关系为核心的客观世界的逻辑结构和逻辑规律)、语构学(研究刻画客观的逻辑结构和逻辑规律的表意的人工符号的机械的排列结构和变形规则)和语用学(研究在对客体指谓同一的原则下符号语言与自然语言的互相翻译)三者组成。在三位一体的体系中:语义学是根本;语构学是清晰透彻而又完备无误地进行语义研究的形式化工具;而语用学则是为了沟通语义理论和采用自然语言的人们的应用实际,向人们提供有效而可行的逻辑方法。当代形式逻辑语用学一、二、三准则是指:一个事实,两个区别,三个步骤。一个事实是指:自然语言中的语词、句子与被其指谓的客观世界的对象、事件之间是多对多的关系——一个语词、句子指谓多对象、事件,而一个对象、事件又可用多语词、句子表述,这是自然语言中司空见惯的歧

义、同义的语用现象。两个区别即:不是自称而是他称的语词、句子(一串声音或笔画)与被表述的思维(脑神经元的一种搭接)不同,与被其指谓的对象、事件(客体)不同。由其决定了从自然语言翻译为人工语言的三个步骤:①结合使自然语言单义化的语境,径直去考察为自然语言所指谓的客体,把握住客体后就撇开语言不管;②分析与语言结构根本不同、其间也无定准一一对应关系的客体的客观逻辑结构;③用其形成规则与客体的客观逻辑结构严格一一对应因而无歧义、同义现象的人工语言表示,从而实现了将自然语言翻译成指谓同一客体的人工语言。这三个步骤可简要地陈述为:撇开语言抓客体,分析客体出结构,刻画结构用符号。其语用学要旨是:在指谓同一客体的原则下自然语言与符号语言互相翻译。

这种当代形式逻辑语用学在古代中国自发的客体逻辑的渊源之一《墨子》中已见端倪。《墨子·小取》在关于"侔"中的"一是而一非"的讨论中说:"桃之实,桃也;棘之实,非棘也。"这里指出:语词"桃"至少有二义——"桃树"和"桃子";语词"棘"也至少有二义——"棘树"和"刺"。不仅如此,这里还揭示了两种不同层次的歧义:同一语词的不同出现具有对客体的不同指称,而不同指称的方式又可以不同(前例为"树"、"实"间的歧义,而后例则为"树"、"刺"间的歧义)。这前一种同一词语指称不同对象的低一层次歧义可称为对象歧义;这后一种关于不同对象的歧义方式不同的高一层次歧义可称为方式歧义。至于语词的同义现象,那就更其司空见惯了。如"实"、"果"同义,"棘"、"刺"同义,等等。上述语词与为其所指称的客观对象之间的两个不同层次的多对多,一旦进入句子,再加上句子的语法结构与为其所指谓的客观事件的当代形式逻辑结构之间的多对多——一句型指谓多事件结构,一事件结构由多句型陈述,句子这一层次的歧义、同义现象就更加变化多端、错综复杂了。《墨子·小取》在关于"侔"中的"是而然","是而不然"等系列讨论中,考察了通过"比辞"(在句子中附加同类语词)这种语法手段,从原句子 α_i、β_i(如白马,马也)变换到附加同类语词 γ_i(如:乘)后的新句子 $\gamma_i\alpha_i$、$\gamma_i\beta_i$(如乘白马,乘马也),相应地,分别由 α_i、β_i指谓的客观事件 $\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{B}_i$和分别由 $\gamma_i\alpha_i$、$\gamma_i\beta_i$指谓的客观事件 $\boldsymbol{A}'_i$、$\boldsymbol{B}'_i$之间的必然联系的存灭变迁。这里,被考察的两个客观事件($\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{B}_i$或 $\boldsymbol{A}'_i$、$\boldsymbol{B}'_i$)之间的客观的必然联系,在《墨子·经说上》中用"有之必然"来界说;当代形式逻辑语义学将其进一步刻画清楚后,就是继承、发展具有客体逻辑倾向的中国古代逻辑的当代形式逻辑中的最重要的联结关系充分条件关系。

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示事件。$\boldsymbol{A}(\mathrm{x})$、$\boldsymbol{A}(\mathrm{e})$分别表示个体变元 x、个体常项 e 在事件 $\boldsymbol{A}$ 中出现(当然可以不只一次)。以 $\boldsymbol{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)[\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n]$表示分别以 n 个常项 $\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n$依次代入 n 个个体变元 $\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n$后得出的闭事件 $\boldsymbol{A}(\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n)$,并以 $\boldsymbol{A}'$表示。$\boldsymbol{A}'$称为 $\boldsymbol{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$的例。若 $\boldsymbol{A}$ 原本是闭事件,则其例就是 $\boldsymbol{A}$ 本身。

鉴于含有个体变元的自由出现的开事件 $\boldsymbol{A}$ 是个体 - 有无函数,因此,只能讨论其闭例 $\boldsymbol{A}'$的有无。为了方便,不论 $\boldsymbol{A}$ 是开还是闭事件,当说"$\boldsymbol{A}$ 的有无"时指的是 $\boldsymbol{A}$ 的例 $\boldsymbol{A}'$的有无。若可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的有无(指的是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的任何例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$的有无)确定不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$(指的也是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的相应例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$的有无),则称 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间具有充分条件关系,以"$\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$"表示,读做"若 $\boldsymbol{A}$ 则 $\boldsymbol{B}$",其中的"$\rightharpoonup$" 称为充分条件号,表示充分条件关系。这包含在充分条件关系中的"可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的有无确定"称为"第一独立性",简称"一独"。从而,对 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 的界说可紧缩为:具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。通过有限可实施的步骤,依据为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所揭示的内涵,对不可逐一列举的有限或无限个体域确立 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间具有一独的方法称为内涵科学分析法。用内涵科学分析法确立一独时,依据的仅仅是有关不可逐一列举域的能有限可实施地把握和表述的内涵;由于一独是指"可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的任何例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$的有无确定",因此,对不可逐一列举域根本无须外延列举地去逐一考察数不清的例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$的有无(这是根本不可能实施的)。正由于充分条件事件 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 中含有一独这个重要的逻辑性质,从而决定了$\rightharpoonup$(充分条件关系)不是函数关系,从根本上不同于为数理逻辑所研究的蕴涵事件 $\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$ 中的二值函数关系$\rightarrow$(蕴涵关系)。若$\boldsymbol{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$、$\boldsymbol{B}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$均为开事件,含有且只含有互相不同的 n 个自由出现的个体变元 $\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n$(其中任一个都可以不只出现一次),则$\boldsymbol{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$作为充分条件事件,是个闭事件,具有不取决于其中任一个个体变元 $\mathrm{x}_i(i=1,\cdots,n)$在论域中的取值的确定的有无值(即,是且仅是有、无这二者中之一),即任意一个个体变元 $\mathrm{x}_i(i=1,\cdots,n)$在整个充分条件事件中的出现是约束的。这种约束不是通过不可能实施的逐一检验外延的方式实现的,而是通过可以实施的确立内涵一独的方式实现的。正由于充分条件关系能内涵一独(而不是外延检验)地约束共同自由出现在其前、后件中的个体变元,当代形式逻辑不仅无须而且不可采用为数理逻辑推崇备至的外延列举的"量词"。这是当代形式逻辑除了哲学指导思想、元逻辑思想这两个层次之外的在逻辑体系这个层次的重要特征。当代形式逻辑不仅是根本不同于思辨逻辑的客体逻辑,而且还是原则地区别于外延逻辑的外延(为辅,对可逐一列举域)兼内涵(为主,对不可逐一列举域)逻辑。不采用外延列举"量词"这个逻辑体系内的重要特征决定了当代形式逻辑不可能与任何采用量词的正统、非正统数理逻辑(如模态逻辑、相干逻辑等)等价。倘若有人说"当代形式逻辑是没有量词的相干逻辑",这就仿佛说"抗日将领冯玉祥是没有投靠日本的日伪汉奸。"对具有确定有无值的闭充分条件事件$\boldsymbol{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$来说,由于具有内涵一独,不会产生为崇奉数理逻辑从而将外延列举的"量词"奉为圭臬的人们所念念不忘的"究竟是对至少一个个体还是每一个个体成立?"这类问题(尽管这类问题对开蕴涵事件——个体 - 有无函数 $\boldsymbol{A}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)\rightarrow\boldsymbol{B}(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$是

会提出的)。那是因为,上述闭充分条件事件乃是“可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的任何例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$ 的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}'$ 而无 $\boldsymbol{B}'$”。这就是说,事实上不会发生有 $\boldsymbol{A}'$ 而无 $\boldsymbol{B}'$ 这样的事情,而这一点却可以内涵地(而不是外延列举地)从而可在不必去考察任何例 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$ 的有无的情况下确定。试以正统数理逻辑中著名的导出规则“概括规则”即“若 $\boldsymbol{A}$,则 $\forall x\boldsymbol{A}$”为例。这里的“若、则”就是通过内涵科学分析法确立的,从而是无需也不可带外延列举“量词”却具有内涵一独的“充分条件”,而决非带或不带“全称量词”的二值函数“蕴涵”($\boldsymbol{A}\rightarrow\forall x\boldsymbol{A}$ 或 $\forall x(\boldsymbol{A}\rightarrow\forall x\boldsymbol{A})$ 均不成立)。显然,具有 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$ 形的形式语言中的式有无限多个,不可能外延地逐一列举;然而,其内涵却可以有限可实施地把握和陈述;后者在前者之前缀以 $\forall x$。于是,正统数理逻辑的构造者依据上述内涵(不是去考察作为外延的任意一个具有 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$ 形的形式语言中的式),采取如下可在有限步内实施并确立其间的一独的内涵科学分析法(可称为“公理系统型”):写出一个被称为“导出规则的证明”的具有下述性质的式的有限序列 $\boldsymbol{\Gamma}$:$\boldsymbol{\Gamma}$ 中含有 $\boldsymbol{A}$ 且以 $\forall x\boldsymbol{A}$ 结尾;除 $\boldsymbol{A}$ 外,$\boldsymbol{\Gamma}$ 中的任一式或者是公理,或者是以在前面出现的式为假设使用一次规则后得出的结果。任何人一经写出 $\boldsymbol{\Gamma}$,他就确立了:$\boldsymbol{A}$ 成立而 $\forall x\boldsymbol{A}$ 不成立这样的事情事实上决不会发生;而这却是在根本不曾去考察任一具有 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$ 形的形式语言中的式是否成立,亦即,是在可独立于任意具有 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$ 形的式是否成立这种情况下确定的。而这正好就是具有内涵一独的“充分条件”。倘若热衷于外延列举量词的人冲着这个“若 $\boldsymbol{A}$,则 $\forall x\boldsymbol{A}$?”问:“这究竟是对每一对 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$,还是对至少一对 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$?”当代形式逻辑的回答是:“这个问题属于为数理逻辑所研究的外延列举的范围;然而,这里的‘若,则’却属于为客体逻辑所研究的内涵一独的领域;对于任何成对的 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$ 来说,事实上不会是 $\boldsymbol{A}$ 成立而 $\forall x\boldsymbol{A}$ 不成立,这一点事实上是通过内涵科学分析法从而是在并不考察任意一对 $\boldsymbol{A}$、$\forall x\boldsymbol{A}$ 本身是否成立的情况下于有限步内确定的。”难道不是这样吗?迫于客观的逻辑规律,正统数理逻辑在展开形式系统从已有定理去得出新定理时,不得不作为逻辑工具使用具有内涵一独从而既不是函数又无需量词的“充分条件”,然而并不研究它;而作为正统数理逻辑研究对象的二值函数“蕴涵”和与之配套的外延列举“量词”却在事实上不能作为逻辑工具使用。综上所述,“若 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}$”、“$\boldsymbol{A}$ 必然 $\boldsymbol{B}$”、“$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的充分条件”在一定的语境中这三者同义,其逻辑语义是:具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。

为了简明,对《墨子·小取》中的“侔”中涉及的有关当代形式逻辑语用学论述稍加整理后列成表4.1。

表中的原、新句子里,当有语词“非”时,皆指称客观的联结关系$\neg$(否定);去掉语词“非”后的留下部分 α_i、β_i 或 $\gamma_i\alpha_i$、$\gamma_i\beta_i$ 分别指谓客观的充分条件事件(请注意:可以为有也可以为无)$\boldsymbol{A}_i\rightharpoonup\boldsymbol{B}_i$ 或 $\boldsymbol{A}_i'\rightharpoonup\boldsymbol{B}_i'$。“类别”栏中的“是”或“不

是”、“然”或“不然”分别指谓原事件 $\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{B}_i$ 间、新事件 $\boldsymbol{A}'_i$、$\boldsymbol{B}'_i$ 间的客观的必然联系(即充分条件关系)的有或无。为了简明,概括为表 4.2。

表 4.1 “侔”的语用学实例(一)

	类　　别	原句子 α_i、β_i	附加同类词语 γ_i	附加 γ_i 后的新句子 $\gamma_i\alpha_i$、$\gamma_i\beta_i$	原句子指谓的事件	新句子指谓的事件
1	是而然	白马,马也	乘	乘白马,乘马也	$\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{A}'_1\to\boldsymbol{B}'_1$
2	是而不然	盗,人也	杀	杀盗,非杀人也	$\boldsymbol{A}_2\to\boldsymbol{B}_2$	$\neg(\boldsymbol{A}'_2\to\boldsymbol{B}'_2)$
3	不是而然	且入井,非入井也	止	止且入井,止入井也	$\neg(\boldsymbol{A}_3\to\boldsymbol{B}_3)$	$\boldsymbol{A}'_3\to\boldsymbol{B}'_3$
4	不是而不然	人之鬼,非人也	祭	祭人之鬼,非祭人也	$\neg(\boldsymbol{A}_4\to\boldsymbol{B}_4)$	$\neg(\boldsymbol{A}'_4\to\boldsymbol{B}'_4)$

表 4.2 “侔”的语用学实例(二)

	类　　别	原句子及其指谓的事件				新句子及其指谓的事件				客观必然联系的有、无	
		α_i	$\boldsymbol{A}_i$	β_i	$\boldsymbol{B}_i$	$\gamma_i\alpha_i$	$\boldsymbol{A}'_i$	$\gamma_i\beta_i$	$\boldsymbol{B}'_i$	$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_i$ 间	$\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{B}'_i$ 间
1	是而然	白马	$\boldsymbol{A}_1$	马也	$\boldsymbol{B}_1$	乘白马	$\boldsymbol{A}'_1$	乘马也	$\boldsymbol{B}'_1$	有	有
2	是而不然	盗	$\boldsymbol{A}_2$	人也	$\boldsymbol{B}_2$	杀盗	$\boldsymbol{A}'_2$	杀人也	$\boldsymbol{B}'_2$	有	无
3	不是而然	且入井	$\boldsymbol{A}_3$	入井也	$\boldsymbol{B}_3$	止且入井	$\boldsymbol{A}'_3$	止入井也	$\boldsymbol{B}'_3$	无	有
4	不是而不然	人之鬼	$\boldsymbol{A}_4$	人也	$\boldsymbol{B}_4$	祭人之鬼	$\boldsymbol{A}'_4$	祭人也	$\boldsymbol{B}'_4$	无	无

表 4.2 中,语句 α_3“且入井”中的“且”意“将要”。“且入井”——迈向井口;而“入井”则为跳进井口;上述二事件之间并无客观的必然联系(可以由于受人劝阻或自动改变主意等原因,在迈向井口的过程中止步)。然而,阻止了某人迈向井口则必然阻止他跳进井口。α_4 中的语词“鬼”的指称需处理成生者对逝者的缅怀,即所谓“活在心中”。这种“心中活”是确实存在的(尽管说不清生者在缅怀时哪几根脑神经元、以何种方式搭接起来的),而且确实不同于那被思念的逝者。为了进一步说明,将表中第 1、2 两行刻画原句子指谓事件和附加同类语词后新句子指谓事件的式分列如下。

$$\underset{\text{马}}{p_1(x)}\wedge \underset{\text{白}}{q_1(x)}\to p_1(x);\qquad \underset{\text{乘}}{r_1(y,x)}\wedge p_1(x)\wedge q_1(x)\to r_1(y,x)\wedge p_1(x)$$

$$\underset{\text{盗}}{p_2(x)}\to \underset{\text{人}}{q_2(x)};\qquad \underset{\text{非}}{\neg}(\underset{\text{杀}}{r_2(y,x)}\wedge p_2(x)\to r_2(y,x)\wedge q_2(x)\wedge \underset{\text{有犯罪动机}}{s_1(y)}\wedge \underset{\text{无该诛之罪}}{s_2(x)})$$

正由于“杀人”和“y 杀 x,且 x 是人,且 y 有犯罪动机,且 x 无该诛之罪”这两个句子指谓相同的客观事件 B'_2,故而,尽管“盗,人也”(事件 $\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{B}_2$ 间有必然联系),然而,“杀盗,非杀人也”(事件 $\boldsymbol{A}'_2$,$\boldsymbol{B}'_2$ 间无必然联系)。《小取》中还有一个更好的例子。

舟，木也；入舟，非入木也。

$$\underset{\text{舟}}{p_5(x)} \to \underset{\text{木}}{q_5(x)}; \qquad \underset{\text{非}}{\neg}(\underset{\text{入}}{r_5(y,x)} \land p_5(x) \to r_5(y,x) \land \underset{\text{死人}}{s_5(y)} \land \underset{\text{棺材}}{s_6(x)})$$

正由于“入木”、“入殓”、“y 入 x，且 y 是死人，且 x 是棺材”这三个句子指谓相同的客观事件 $\boldsymbol{B}'_5$（至于棺材，可以是但未必是木制的；即使是陶制的、石质的、铜的、水晶的、……，全都叫“入木”；即使是木制的器具，但只要不是棺材，如入木舟，则不可以称为“入木”）。这种体现了汉语语词的凝聚性、整合性（将单纯字面以外的含义凝聚到作为一个整合体的简练语词中去）的汉语语言习惯至今并未改变。倘若有人株守逻辑研究语言结构或“思维形式”而不涉及客体的思辨逻辑理论，他就会在逻辑理论上坚持句子“杀人”、“入木”与“乘马”具有相同的语言结构（这可以分析清楚）从而表达了相同的“思维形式”（形式逻辑从来不曾说清楚究竟什么是不同于语言结构或客体的逻辑结构的“思维形式”），并据此指责《墨子・小取》关于“侔”中的“是而然”、“是而不然”等（相同的语言结构指谓不同的客观逻辑结构）的当代形式逻辑语用学讨论是“诡辩”、“偷换概念”（这真是焚琴煮鹤）。不过，他既然作为从幼儿时起就一直承受稳固的汉语语用习惯熏陶的中国人，当他进入木舟时倘若有人冲着他说道：“先生，你入木了！”他一定会由于觉得受到诅咒而勃然大怒。那时，他会只注意勾起他的冲天怒火的话语“入木”所指谓的客观事件，而把为思辨逻辑所推崇备至的说得清楚的语言结构和说不清楚的“思维形式”抛到九霄云外。

为了便于讨论，用 $\boldsymbol{C}$ 表示“侔”中原句子 α_i、β_i所指谓的事件 $\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{B}_i$间的必然联系（即充分条件关系）的有无；用 $\boldsymbol{D}$ 表示附加同类语词 γ_i后的新句子 $\gamma_i\alpha_i$、$\gamma_i\beta_i$所指谓的事件 $\boldsymbol{A}'_i$、$\boldsymbol{B}'_i$之间的必然联系的有无。显然，$\boldsymbol{C}$ 为有时，$\boldsymbol{D}$ 未必为有也未必为无（“是而不然”、“是而然”）；$\boldsymbol{C}$ 为无时，$\boldsymbol{D}$ 未必为有也未必为无（“不是而不然”、“不是而然”）。$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 之间具有上述特征的客观的联结关系可称为“$\boldsymbol{C}$ 风马牛 $\boldsymbol{D}$”，或“$\boldsymbol{C}$ 彻底的偶然 $\boldsymbol{D}$”（“$\boldsymbol{C}$ 偶然 $\boldsymbol{D}$”是指“$\boldsymbol{C}$ 不必然 $\boldsymbol{D}$，且，$\boldsymbol{C}$ 不必然不 $\boldsymbol{D}$”）；无论把 $\boldsymbol{C}$ 或 $\neg\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 或 $\neg\boldsymbol{D}$ 放在前域还是后域，这之间的关系都是偶然。这就从“比辞”这种语言手段和与之相应的两个客观事件间的必然联系这个侧面说明了：语句的约定俗成的语言结构与取决于语用习惯的被其所指谓的事件的客观的逻辑结构之间，没有什么值得称道的内在联系，其间的关系不过是“风马牛”。故而，不能从分析语言结构去得出被其指谓的事件的客观的逻辑结构，这正像也不能由之去得出被其思考的物质的化学结构一样。因此，继承、发展《墨子・小取》中的“侔”中有关客体逻辑语用学渊源，当代形式逻辑客体语用学的根本任务之一是：尽量详尽地揭举词语和对象间、句型和事件结构间的多对多现象（这部分内容可称为“现象客体逻辑语用学”），并在此基础上去发现客体逻辑语用学规律。继往开来，任重道远，愿与有志于此的学界同仁共同努力。

第5章　概　　念

5.1　概念的概述

概念就是关于客观对象的思考。

所谓对象,就是可以对之思考的一切。从对象所处的领域看,又可分为三个方面可以对之思考的对象。第一,在自然界这个领域,山川草木、日月星辰、风云雷雨、电声热力等万事万物,都是对象。第二,在人类社会领域,阶级、国家、军队、警察、商品、货币、生产消费,也都是对象。第三,在人的精神领域,人们头脑里产生的各种各样的思考都是对象。本来,世界上并没有什么思考。在世界上出现思考之前,后来成为思考对象的客观事物就早已存在。在无始无终、无边无涯的宇宙发展过程中出现了人类,并产生了为人类所特有的思考时,世界上才增加了一种新的存在形态——思考。思考又称为意识、思维。至此,二分为正在进行的思考和此外可以对之思考的一切。需要特别说明的是,正在进行的思考不可能以自身为思考对象。这是事实上的不可能。我们称这个具有规律性的事实为思考的不自返律。自然,正在进行的思考一经完成,另起的正在进行的思考便可以以之为思考对象。

我们关于客观世界形形色色的对象的思考,在大脑中就形成形形色色的概念。例如,关于军人的思考,在大脑中就得到军人这个概念,对这个概念可以用汉语"军人"表达,也可以用其他语言如英语"soldier"表达。语词"军人"或"soldier"表达大脑中关于军人的概念,指称集(有军籍的人)中的任意个体(或者说,指称客观世界军人这类对象)。同样,关于国家的思考就在大脑中得到国家这个概念,可用汉语语词"国家"或者英语语词"country"表达。关于黄果树瀑布的思考就在大脑中得到黄果树瀑布这个概念,可用汉语词组"黄果树瀑布"或英语词组"Huangguoshu Waterfall"表达。关于红旗的性质"红"的思考,就在大脑中得到红这个概念,可用汉语语词"红"或者英语语词"red"表达。关于物体摩擦与物体生热之间的充分条件关系的思考,在大脑中就得到充分条件关系这个概念,可用汉语语词"充分条件关系"或英语语词"sufficient condition relation"表达。

提请注意的是,传统形式逻辑对于概念问题,实际上只研究 n 元关系概念中的1元关系概念。在传统形式逻辑中,概念的内涵只相当于1元关系;传统形式逻辑中概念的外延只相当于与1元关系相对应的论域上的1目组集的一个确定的子集。由于传统形式逻辑只研究1元关系概念,因而尽管从主导思想上说传

统形式逻辑是名副其实的逻辑科学，然而从研究范围来看至少是“挂1漏 $n-1$”的，因而顶多只能算 n 分之一的逻辑。当代形式逻辑研究 n 元关系概念，这里的 $n \geqslant 0$。亦即，当代形式逻辑研究0元关系概念、1元关系概念，以及多元关系概念。为了便于讨论，我们采用亚里士多德的传统叫法，称当代形式逻辑所研究的 n 元关系概念为“词”。在本书中，为了区分思考中的词（概念）和语言中的词（语词），我们用一个“词”字指称前者，而用“语词”或“词语”指称后者。传统形式逻辑所研究的概念只是一元关系概念，流行的传统形式逻辑称为“概念”。当代形式逻辑所研究的概念是 n 元关系概念（$n \geqslant 0$），称为“词”。在此说清楚后，在本书的语境中，也可称“词”为“概念”，当然也可称“概念”为“词”。但是，我们所研究的是 n 元关系概念。

关于概念的语言表达方式，为了叙述的方便，当我们用小写白正体拉丁字母a、b、c、d表示概念时，我们就在字母之前写上“概念”二字，如概念a；当我们用汉字表示概念时，我们就用圆括弧括上表达某概念的汉字，并在括弧之前加上“概念”二字，如概念（军人）就表示“军人”这个语词所表达的概念。为了行文简洁，我们在列举两个以上的概念时，把概念（中国人民解放军）、概念（舰艇）、概念（军种）表达为：概念（中国人民解放军）、（舰艇）、（军种）。

5.2　概念的内涵和外延

这里的概念指 n 元关系概念，就是词。概念的内涵和外延就是词的内涵和外延。为了方便，我们先讨论概念的外延。

5.2.1　概念的外延

概念的外延就是为概念所思考的论域上的 n 目组集的确定的子集。

前面，我们讨论过下述三种互有联系又有区别的内容：

（1）论域 U 上的 n 目组集 U^n 的一个确定的子集 P；

（2）P 的共仅属性：n 元关系 p；

（3）对集 P 及其共仅属性 p 的思考的 p。

请注意，这三种内容中最后的字母p是白正体小写拉丁字母。p表达的思考就是概念。p之前的拉丁字母都是斜体字母，指的是客观世界的论域 U、客观世界 U^n 的一个确定的子集 P、客观世界集 P 的共仅属性 p。

简洁地说，概念p的外延就是具有共仅属性 p 的集 P。

譬如，在论域（劳动产品）之上，有1目组集的一个确定的子集（商品）。集（商品）的共仅属性就是：为了交换而生产的。集（商品）就是由为了交换而生产的所有劳动产品构成的集，这个集就是概念（商品）的外延。

集（人）是论域（动物）上的一目组集的一个确定的子集。对于集（人），我们在 1.1 节中举出了下述几个互相对当的共仅属性：①能制造工具的；②具有第二信号系统的；③两手、胎生的；等等。在论域（动物）上的一目组集中，具有这些共仅属性的个体组成的一个确定的子集（人）就是概念（人）的外延。这个外延集的元可举：（孔丘）、（刘备）、（白居易）、（牛顿）、（希尔伯特）、（冯・诺依曼）等。

语词“父亲”表达论域人上的一个 2 元关系。对这个客观的 2 元关系的思考就是一个 2 元关系概念。这个概念的外延就是论域（人）上的 2 目组集的以“……是……的父亲”为共仅属性的一个确定的子集，即$\{x \mid x=(y,z), y$ 是 z 的父亲$\}$。概念（父亲）的外延集的元是一个一个 2 目组，如（曹操，曹植）、（康熙，雍正）、（毛泽东，毛岸英）、（苏洵，苏轼）、（李格非，李清照）等。

再如，“认识”这个概念的外延，就是在“人”这个论域上的 2 目组集的以“……认识……”为共仅属性的确定的子集：{（毛泽东，斯大林），（吴王，越王），（刘少奇，邓小平），等等。

5.2.2 概念的内涵

概念的内涵就是为概念所思考的论域上的 n 目组集的确定的子集的共仅属性。

在前一问题“概念的外延”归纳我们讨论过的三种互有联系又有区别的内容的文字中，概念 p 的内涵就是为概念 p 所思考的集 P 的共仅属性即 n 元关系 p。简洁地说，概念 p 的内涵就是集 P 共仅属性 p。

语词“父亲”表达论域（人）上的一个 2 元关系。对这个客观的 2 元关系的思考就是一个 2 元关系概念。这个概念的外延集是$\{x \mid x=(y,z), y$ 是 z 的父亲$\}$。其内涵则是这个外延集的共仅属性“……是……的父亲”，就是某某人和某某人具有某种血缘的或法律的关系。我们通常把这个共仅属性说成“……是……的父亲”。

再如，在论域（劳动产品）之上，有 1 目组集的一个确定的子集（商品）。集（商品）的共仅属性就是：为了交换而生产的。这个共仅属性就是概念（商品）的内涵。

集（人）是论域（动物）上的一目组集的一个确定的子集。集（人）的共仅属性（①能制造工具的；②具有第二信号系统的；③两手、胎生的；等等）就是概念（人）的内涵。

5.3 2 元关系概念

5.3.1 性质概念和关系概念

根据概念所思考的是 1 元关系还是大于 1 元的多元关系，我们把概念分为

性质概念和关系概念。

原本应该称这两种概念为 1 元关系概念和多元关系概念,但由于通常的习惯把 1 元关系称为“性质”,把 2 元或 2 元以上的多元关系称为“关系”,因而我们按通常的习惯,把这二者称为性质概念、关系概念。

性质概念就是关于 1 元关系的思考的概念。

所谓 1 元关系就是论域 U 上的 1 目组集 U^1 的子集 P 的共仅属性。“……是文学家”所指称的就是论域(人)上的 1 元关系。日常语言通常把这个 1 元关系说成“文学家”。具有文学家这个共仅属性的集是论域(人)上的 1 目组集的子集,即:{…,(但丁),(李白),(歌德),(曹雪芹),(高尔基),(鲁迅),…}。对 1 元关系“……是文学家”的思考得到的概念(文学家)就是一个性质概念。概念(军官)、概念(美国人)、概念(跑)、概念(红)都是性质概念。

关系概念就是关于 2 元或 2 元以上的多元关系的思考的概念。

所谓多元关系就是论域 U 上的 $n(n\geqslant 2)$ 目组集 U^n 的子集 P 的共仅属性。2 元或 2 元以上的 n 元关系就称为多元关系。“……和……是战友”、“……是……的上司”、“……和……是……的双亲”,等所表达的就都是多元关系。关于这些关系的思考的概念(战友)、概念(上司)、概念(双亲)都是关系概念。

提请注意:性质概念的外延是论域 U 上 1 目组集的一个确定的子集,而关系概念的外延则是论域 U 上 $n(n\geqslant 2)$ 目组集的一个确定的子集。关系概念(父亲)的外延是论域(人)上的 2 目组集的一个确定的子集{$z \mid z=(x,y)$,x 是 y 的父亲},而不是 1 目组集{ $z \mid z$ 是有子女的男人}。作为概念(父亲)的外延的论域(人)上的 2 目组集的一个确定的子集的元可举:(曹操,曹植)、(毛泽东,毛岸英)等。

在关系概念中,2 元关系概念是比较常见的一种。为其所思考的客观世界的 2 元关系是很普遍、很常见的关系。因此,我们专门予以讨论。

5.3.2　何谓 2 元关系概念

2 元关系概念就是关于客观世界的 2 元关系的思考。例如,下列语词所表达的概念就是 2 元关系概念。

父亲	侵略
认识	大于
支援	敬仰
帮助	梦见

2 元关系概念的外延就是论域上的 2 目组集的一个确定的子集。譬如:论域为“自然数”,2 元关系概念“小于”的外延就是论域“自然数”之上的 2 目组集{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)…,(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),

…,(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)…}的一个确定的子集{(1,2),(1,3),…,(2,3),(2,4),(2,5)…(3,4),(3,5),…}。

论域为“国家”,2元关系概念“侵略”的外延就是论域“国家”之上的2目组集{(中国,中国),(中国,美国),(中国,俄国),(中国,日本),…,(美国,美国),(美国,中国),(美国,朝鲜),…,(日本,日本),(日本,中国),…,(英国,英国),(英国,中国),…,(德国,美国),(德国,苏联),(德国,波兰),(德国,捷克斯洛伐克),…}的一个确定的子集{(美国,中国),(美国,朝鲜),…,(日本,中国),…,(英国,中国),…,(德国,苏联),(德国,波兰),(德国,捷克斯洛伐克),…}。

2元关系概念的内涵就是论域上的2目组集的一个确定的子集的共仅属性。譬如上面例子中:

2元关系概念“小于”的内涵就是论域“自然数”上的2目组集的那个确定的子集{(1,2),(1,3),…,(2,3),(2,4),(2,5),…,(3,4),(3,5),…}的共仅属性“……小于……”。

2元关系概念“侵略”的内涵就是论域“国家”之上的2目组集的那个确定的子集{(美国,中国),(美国,朝鲜),…,(日本,中国),…,(英国,中国),…,(德国,苏联),(德国,波兰),(德国,捷克斯洛伐克),…}的共仅属性“……侵略……”。

鉴于2元关系概念所思考的客观世界的2元关系具有一些需要引起注意的性质,因此,我们有必要介绍这些性质。

5.3.3 2元关系的性质

1. 2元关系的对称性

2元关系的对称性是指:在论域U中,对于任意两个对象$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$具有p关系(即,成立$p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$)时,$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}$是否具有$p$关系(即是否成立$p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$)。依据不同的情况就有下述三种关系。

(1) 对称关系

在论域U中,对于任意两个对象$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,如果$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$具有p关系则$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}$具有p关系(即,若成立$p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$则成立$p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$),那么就称$p$在论域$U$中为对称关系。例如:

在论域“人”中,“同学”关系就是对称关系;在论域“实数”中,“等于”关系就是对称关系;在论域“概念”中,“全同”关系、“交叉”关系也是对称关系。

(2) 反对称关系

在论域U中,对于任意两个对象$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,如果$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$具有p关系则$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}$不具有p关系(即,若成立$p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$则不成立$p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$),那么就称$p$在论域$U$中为反对

称关系。例如：

在论域“人”中，“父亲”关系就是反对称关系；在论域“实数”中，“大于”关系就是反对称关系；在论域“概念”中，“属种”关系、“种属”关系也是反对称关系。

(3) 非对称关系

在论域 U 中，对于任意两个对象 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 具有 p 关系，则 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 具有 p 关系或者不具有 p 关系（即，成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，则，或者成立 $p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ 或者不成立 $p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$），那么就称 p 在论域 U 中为非对称关系。例如：

在论域“人”中，“认识”关系、“帮助”关系、“梦见”关系都是非对称关系。

2. 2 元关系的传递性

2 元关系的传递性是指：在论域 U 中，对于任意三个对象 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 具有 p 关系，并且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 具有 p 关系（即，成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 且成立 $p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$）时，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是否具有 p 关系（即是否成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$）。依据不同的情况又有下述三种关系。

(1) 传递关系

在论域 U 中，对于任意三个对象 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 具有 p 关系并且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 具有 p 关系，则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 具有 p 关系（即，成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 且成立 $p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 则成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$），那么就称 p 在论域 U 中为传递关系。例如：

在论域“人”中，关系“……比……高”就是传递关系。在论域“实数”中，“大于”关系、“小于”关系、“等于”关系都是传递关系；在论域“概念”中，“全同”关系、“属种”关系、“种属”关系也是传递关系。

(2) 反传递关系

在论域 U 中，对于任意三个对象 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 具有 p 关系并且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 具有 p 关系，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不具有 p 关系（即，成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 且成立 $p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 则不成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$），那么就称 p 在论域 U 中为反传递关系。例如：

在论域“人”中，关系“……是……的父亲”、“……是……的爷爷”、“……比……大两岁”、“……比……高 2 厘米”都是反传递关系。

(3) 非传递关系

在论域 U 中，对于任意三个对象 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 具有 p 关系并且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 具有 p 关系，则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 具有 p 关系或者不具有 p 关系（即，成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 且成立 $p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，则，成立 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ 或者成立 $\neg p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$），那么就称 p 在论域 U 中为非传递关系。例如：

在论域“人”中，关系“……认识……”、“……帮助……”，在论域“国家”中，关系“……支援……”、“……和……相邻”都是非传递关系。

5.4 传统概念理论中存在的问题

传统形式逻辑所研究的概念其实仅相当于当代形式逻辑的1元名词。传统形式逻辑不过问在人的普通的逻辑思考实际中经常运用的多元名词(即大于1的n元名词),故而作为传统简单命题的主宾词的就只能是1元名词,传统简单命题就只能是所谓的“直言命题”。这就决定了早先建立的传统的命题体系只能从1元名词为主宾词的直言命题出发。近些年来,不少传统形式逻辑读物中增添了一些2元、3元关系命题。可是,尽管如此,那些新添的、依旧品种不全的关系命题犹嫌前无渊源、后无归宿——仍然不研究n元($n>1$)名词,不介绍真正有效的关系推理。可以说,传统形式逻辑至多只能算$\frac{1}{n}$的逻辑。

尽管传统形式逻辑在概念问题上只研究仅占n分之1的1元名词,可是在这n分之1的研究中仍然存在着不少弊端。下面仅略举一二。

5.4.1 关于概念的定义至今仍不能自圆其说

百余种传统形式逻辑读本对一些重要的逻辑术语的规定众说纷纭、莫衷一是,且各种说法都不甚清晰,甚至自相矛盾,不能自圆其说。譬如对概念的定义就是如此。

归结起来,传统形式逻辑读本给概念下的定义大致有两种类型。

1. 一类定义是:概念是反映事物的特有属性的思维形式

有的书称为“思维形态”。不管叫“思维形式”也好,还是叫“思维形态”也罢,皆众说纷纭、莫衷一是。究竟何谓“思维形式”或“思维形态”,至今谁也说不清楚。迄今,人类所知道的事实是:思维是由客体所决定的(唯物律),在人类的头脑中进行的(定位律)一种脑神经元的搭接(发生律)。这唯物律、定位律、发生律是关于思维的规律,因此,可以称为“思维规律”。除此之外,被称为“思维”的这一种高级运动形态,无论在基本粒子、原子、分子等微观的层次上,还是在细胞、神经元抑或人脑组织的更大的部件等宏观的层次上,究竟具有什么样的结构(或形式),遵循什么样的规律,迄今还几乎一无所知。逻辑科学无论在过去、现在还是可以预见的将来,都始终在事实上不曾研究过思维的不同层次的微观或宏观的结构(形式)或规律。思维洞察身外的巨细,然而对自身却所知甚微。这可称为思维的“灯下黑现象”。不管这“灯下黑现象”意味着什么,将来能否改变,首要的是,这是如今的现实。

我们姑且不管这作为被定义概念的属概念的莫衷一是的“思维形式”或“思

维形态”怎样,在这里我们仅剖析一下作为定义的种差的“反映事物的特有属性”究竟如何。

持这类观点的传统形式逻辑读本说:所谓特有属性就是某类事物都具有而别的事物不具有的那些属性。在事物的特有属性中,有些是本质属性,有些是固有属性(或称一般特有属性)。所谓本质属性就是某类事物的有决定性(决定该事物之所以为该事物)的特有属性。所谓固有属性就是某类事物的派生的特有属性。可见,这里所谓固有属性显然就是非本质的特有属性。这些读本举了如下实例:能制造和使用生产工具是人的本质属性,两足直立或两足无毛是人的固有属性。照这样的规定,反映事物的本质的特有属性的是概念,反映事物的非本质的特有属性的也是概念。

可是,这类逻辑读本又说:人们对客观事物的认识是一个不断深化的过程。人们的认识是发展的,是由生动直观到抽象思维、由感性认识到理性认识的过程。感觉、知觉与印象属于生动的直观,是感性认识阶段的认识形式。概念、判断与推理属于抽象思维,是理性认识阶段的认识形式。感觉、知觉与印象所反映的是事物的现象、片面、外部联系,而概念所反映的是事物的本质、全体、内部联系。照这样的规定,反映事物的非本质的特有属性的认识形式,不属于抽象思维,不是理性认识阶段的认识形式,因而不是概念。

于是这类形式逻辑读本出现下述两对矛盾。

α:有些反映事物非本质的特有属性的认识形式是概念(根据这类逻辑读本给概念下的定义);

α′:反映事物非本质的特有属性的认识形式不是概念(因为这类逻辑读本又说,概念是理性认识阶段的认识形式,它反映的是事物的本质、全体、内部联系)。

β:概念是理性认识阶段的认识形式(按这类逻辑读本关于两个认识阶段的论述);

β′:有些概念不是理性认识阶段的认识形式(根据这类读本给概念下的定义,有些概念反映的不是事物的本质而是事物的非本质的特有属性)。

在同一节内容里面,在三、五页文字之内,在同一思维过程中,在用不矛盾律来要求人们的逻辑读本中,对概念的定义发生了如此明显的矛盾,不能自圆其说,自然是很不合逻辑的。

2. 另一类定义是:概念是反映事物本质属性的思维形式

持这种观点的读本说,所谓本质属性就是决定一事物之所以成为该事物的属性。可是所列举的被称为本质属性的东西并非全是决定一事物之所以成为该事物的属性,被称为概念所反映的属性的并非都是决定一切事物之所以成为该事物的属性。有的书称“直立行走的动物”为人的本质属性,甚至有的书称“劳

动产品”是商品的“共同的本质的属性”(须知,共同的本质属性当然首先应该是本质属性),可是“直立行走的动物”并不能决定人之所以为人,“劳动产品”并不能决定商品之所以为商品。根据这类读本给概念下的定义可得,只有反映事物本质属性的“思维形式”才是概念;而根据其所举实例,又得其反。看得出来,这类读本承认,对能将一事物与其他事物区分开来的非本质属性(如“直立行走的动物)的认识或反映所得的应为概念(如“人”)。这是符合人的认识实际的。否则,按照这类读本给概念下的定义,远古人对事物的反映都不能形成概念。如果真是这样,远古人如何进行思维?

此外,一些传统形式逻辑教本一会儿说概念反映一类对象,一会儿又说概念反映一类对象的本质属性(或特有属性),一会儿说概念反映这二者。作为教科书,不应该这样游移不定。

5.4.2 有些概念种类划分不合理

现在流行的传统形式逻辑读本中都有“集合概念”、“非集合概念”的划分法。认为,“集合概念就是反映集合体的概念”。比较有代表性的读本对集合体的规定是,“事物的集合体是由若干个同类的个体有机组成的统一体。”照这种规定,显然一切实物都是所谓的“集合体”;如一株树,是由各器官(若干同类的个体)有机组成的统一体;树的一个器官如树干,是由许多细胞(若干个同类的个体)有机组成的统一体;一个细胞,是由许多分子(若干同类的个体)有机构成的统一体;一个分子,是由许多原子(若干同类的个体)有机构成的统一体……宇宙是无穷的,一切事物都是由更小的若干同类个体有机构成的统一体。可见,一切反映实物的概念都是所谓的“集合概念”。既然如此,何必特别划分出一类“集合概念”来?

究其原因,可能是由于人们有时往往容易只见树木,不见森林;不了解由同类个体有机构成的统一体,对构成统一体的各个同类个体反倒比较熟悉而造成的。有时人的思想像水一样,总是往阻力最小的地方流去。听到一声“森林”就以为说的是“树木”,看见“军队”二字却以为指的是“士兵”,而“老张是个工人阶级”这种说法就把“工人阶级”当做“工人”。为了防止这种自流的错误,人们便拿“集合概念”作为限流的堤坝,说“森林”、“军队”、“工人阶级”等是“集合概念”、说“树木”、“士兵”、“工人”等为“非集合概念”(尽管“树木”、“士兵”、“工人”等概念事实上也具有“集合概念”的内涵,符合对“集合概念”的规定)。至于像树木、树干、细胞之类的概念之所以不被这些逻辑读本称为“集合概念”,大概是因为人们对整体与部分了解得一样好,甚至对整体比对部分还知道得更清楚,因而不会发生这种自流错误,无须再费力气来堆造这道限流堤坝。堆造“集合概念”这道限流堤坝是不科学的,应当拆除。实际上,对于堆造这道堤坝所要想

解决的问题,重要的是要弄清楚某概念的内涵究竟是什么。某概念的内涵清楚了,其外延就清楚了(由全部具有此概念内涵的对象组成的),这样就不会将树木当做森林、把士兵当做军队、拿工人当做工人阶级了。要是不清楚这些,光靠"集合概念"这道不科学的限流堤坝仍然无济于事。引入"集合概念"的错误是流行的传统形式逻辑读本中经常出现的一系列错误中具有代表性的。这些错误,归结起来就是:为了防止一些错误,却又引进了另一种更难纠正的错误。有时,人们只顾着仰脸去采摘树枝上的李子,而脚却踩坏了落在地上成熟的桃子。

较为流行的传统形式逻辑读本还有所谓"正概念"、"负概念"的分类,一般的读本给出的定义是:

"正概念就是反映具有某种属性的事物的概念。"

"负概念就是反映不具有某种属性的事物的概念。"

这种规定显然是不科学的。任意事物都具有许多属性,又不具有此外的许多属性。因此,按照这种对概念分类的规定,很多概念,很难区分它们究竟是"正概念"还是"负概念"。大约就是这个原因,一般的读本都附加了区分正、负概念的语言标准。说表达负概念的词语往往带有"无"、"不"、"非"等字样。可是又说,带有"无"、"不"、"非" 等字样的词语,表达的并不都是负概念。附加的语言标准仍然难以贯彻。同一本书把带有"无"这个字样的"无产阶级"看做"正概念",而把"无核国家"看做"负概念"。符合所规定标准的却不看做"负概念"。

客观对象集合 P 与集合 $\sim P$ 互补,事实上根本无正负之分。因此,作为对客观对象的思考的概念(或词)亦无正负之分。只是在语言表述上有是否带有否定词语的不同,例如,客观对象奇数与偶数互补,并无正、负之分,作为对二者的思考的概念自然无正、负之别。可是,由于在语言表达上可以带否定语词,也可以不带否定语词,因此,对奇数、偶数的汉语言表述可以有如下四种组合情况:

奇数	偶数
奇数	非奇数
非偶数	偶数
非偶数	非奇数

左边一列词语所指称的客观对象的集合与右边一列词语所指称的客观对象的集合互补;左边一列词语所表达的概念和右边一列词语所表达的概念依然互补。作为客观对象集合(或作为概念)的奇数与偶数只有互补关系,而无正负之分。在语言表述上,对这互补的二者皆可带否定词语。有一本逻辑书说,"在语言表达方面,正概念前面加上'非'、'不'等限制就成为负概念。而且只有前面加上'非'、'不'等限制的,才是负概念"。我们在讲授传统形式逻辑时,有学生问:如果概念"核国家"是正概念,"无核国家"是负概念的话,同概念"核国家"所

反映的属性完全一样的“非无核国家”又是什么概念？亦即，在表达负概念的词语前面加上“非”后所表达的又是什么概念？

在此，顺便写上几句。在客观世界，或者在关于客观世界的思考中，补与否定是有区别的：客观对象集合，或者关于客观对象的思考——名词（或概念）是成对地互补的；而否定是一种真值函数，它只施加于事件或关于事件的思考——命题。我们称施加于事件的为否定关系，称施加于命题的为否定词。

5.4.3 “概念不明确”是一种自相矛盾或者模棱两可的提法

在一些传统形式逻辑读本中还流行这样一种说法：“这是一个不明确的概念”，“这个概念是含糊不清的”。这种说法要么与这些读本自己对概念所下的定义矛盾，要么在给“概念”下定义时的“概念”与上述流行说法中的“概念”具有不同的含义：前者指的是“事实上是概念的东西”；后者指的则是“可能会有人觉得是概念的东西”；概念一词的含义在这里是模棱两可的。这就是说，这种在传统形式逻辑读本中关于“概念不明确”的流行说法尽管几乎已经习以为常，但是严格地分析起来，不是自相矛盾就是模棱两可。可能是由于“习焉不察”，“入芝兰之室久而不闻其香”，长期的潜移默化使人们感觉不到这种自相矛盾或模棱两可。要是具有确定的内涵和外延，概念就是明确的，而模糊不清就是不明确的，那么，对于人类的认识来说，概念一定总是明确的，而不会是含糊不清的。一般的传统形式逻辑读本对概念的规定就反映了这种实际情况：任何概念都具有确定的内涵和外延（因而都是明确的）。根据这种对概念的规定，凡是没有确定的内涵与外延，即不明确的语词就不是概念。这当然是对人类的认识来说的。对于某些个人，可能会发生这样的情况：会在语言文字上使用一些语词，然而并不清楚这些语词究竟承载什么样的已为人类认识确定了的概念。一些逻辑读本往往批评犯有这种错误的人说，“你的这个概念不明确”。尽管被批评者确实有错误，然而批评者也是错误的，因为按规定，概念是不会不明确的，而不明确的就绝不是符合规定的概念。恰当的批评应该是“你并不懂得这个语词究竟承载什么样的概念”，或者，“你尽管会写会说这个语词，但是由这个语词所承载的概念你并不曾掌握”，或者，“你并不曾建立与这个语词相应的概念”。有一本传统形式逻辑教本这样写道：“仅有一千字的《哥达纲领》，马克思在批判时就列举出二十多个不明确的概念，并且一一加以剖析。”为了弄清这个问题，我国杰出的逻辑学家林邦瑾教授以其十分严谨的治学态度，认真查阅了《哥达纲领批判》。在《哥达纲领批判》中，马克思称“劳动的产品”、“产品的价值”等为“明确的经济概念”；而在称呼《哥达纲领》中的“不折不扣的劳动所得”、“公平的分配”、“平等的权利”、“自由国家”等时，所用的语词，除了“模糊观念”、“一语”、“空话”、“含义模糊就是现在也不能接受的用语”、“陈词滥调的见解”、“空洞的废话”、

“这个词”、“虔诚的信徒们借以互相识别的一个标记”、“不明确用语”以外，还有“一种虚构”、“空洞的遁词”、“含糊的要求”、“空洞的、虔诚的愿望”[①]，等等。然而，一次也不曾使用过“不明确的概念”这个提法。值得注意的是，“概念”这个语词只是在“明确的经济概念”中出现过一次。恩格斯在评论《哥达纲领》的信中，除了使用“这些要求是非常混乱和不合逻辑的”、“整个纲领都是杂乱无章、毫无联系、不合逻辑和丢丑的”等提法外，还使用了下述语词：“在理论上的胡诌和妄测”、“十足的谬论”、“含糊和混乱的词句”、“陈旧的含糊不清的术语”、“令人毛骨悚然的胡说”、“废话”、“无稽之谈”、“拉萨尔词句”[②]等，也是一次都不曾使用过“不明确的概念”这种提法。马克思主义经典著作家在这方面给我们树立了光辉的榜样。

以上我们说的是，流行的形式逻辑读本既然对“概念”一词做了不可能不明确的规定，就不应该再用“概念不明确”这种自相矛盾的提法。然而，在日常语言中，正像“逻辑”一词是多义的样，“概念”也是多义的。在日常语言中，说“你这个概念”往往是指“你所使用的这个语词的被你所能理解的含义”。这当然可以含糊不清或者模棱两可（也就是所谓的“不正确”）。显然，这种日常意义上的“概念”与传统形式逻辑书中对之下定义的“概念”有显著的不同。一词多义是日常语言中广泛存在的现象。《尹文子·大道》关于“周人怀璞”的故事说：“郑人谓玉未理者璞，周人谓鼠未腊者璞。”同样是“璞”这个词，郑人指的是未琢之玉，而周人指的却是未风干的死老鼠。事实上有郑人和周人，而且还会有一会儿是郑人一会儿是周人的人。可是，尽管如此，传统形式逻辑作为一门严谨的科学，总该在“玉”和“老鼠”之间做个选择才好。在“玉”的意义上定义，然后在“鼠”的意义上使用，这终究不是科学的态度，始终以“遵守同一律”来要求读者的传统形式逻辑读本（尤其是教本）不应该有这种游移。

5.4.4　值得推敲的其他问题

除上述两方面的问题外，传统形式逻辑在概念方面尚有许多问题值得推敲。下面提及的，有些是带普遍性的问题，有些则是某一读本的问题。

有一本在教材改革中出版的教材给概念的内涵下的定义是：“概念的内涵就是反映在概念中的类的本质属性的总和。”这里出现如下歧义：“类的本质属性”是指整个类的本质属性还是指类中每一个分子所共同具有的本质属性？从定义的表达上看，它指的是整个类的本质属性。然而教材中所举实例又都是类中分子所共同具有的本质属性。须知，“由猿进化而来的”是人这整个类的本质

① 马克思著《哥达纲领批判》，载《马克思恩格斯选集》（III）第 5 页～23 页.

② 马克思著《给奥·倍倍尔的信》，载《马克思恩格斯选集》（III）第 26 页～33 页.

属性,而“能思维”则是人这个类中每个分子所共同具有的本质属性。概念(人)的内涵究竟是“由猿进化而来的”还是“能思维”？按照这本逻辑教材给概念的内涵下的定义是很难确定的。

有一本很流行的传统形式逻辑教材给普遍概念下的定义是:“普遍概念是指反映某一类事物的概念。”而这本教材在给出这个定义的前两页上又说:“类可以由几个或许许多多个分子组成,也可以由一个分子组成,甚至可以不包括任何具体的分子。”于是出了一个问题:反映“由一个分子组成”或“不包括任何具体分子”的类的概念,符合上述关于普遍概念的定义,可是这本教材又不说它们是普遍概念。显然,这个关于普遍概念的定义“过宽”了。

顺便要说的是,这本教材给“空类”的界说是,“在客观现实中不存在任何具体的分子”的类。不知何为“具体的分子”？又何为不“具体的分子”？这个界说给人的错觉是:分子有两种,一种是具体的,另一种是不具体的。在这个界说中,“具体的”三个字显然是多余。

有些教材在概念章引进关于集合和集合的运算的知识,从传授知识的角度讲是无可非议的。可是有的书给集合的定义很令人费解。有一本教材下定义说,“所谓‘集合’就是指由直观上或思想上的一些确定的、彼此不同的对象组成的一个整体。”可是,何谓“直观上”的对象？何谓“思想上”的对象？教材没有做规定,读者很难理解作者的意思。譬如,照通常的理解,基本粒子不是“直观上”的对象,也不是“思想上”的对象。倘按照这本教材的定义,就不能由基本粒子组成集合。然而,谁都知道,宇宙间所有基本粒子就组成一个实实在在的集合{x|x 是基本粒子}。此外,何谓“确定的”对象？何谓“整体”？教材也没规定。按传统形式逻辑通常的理解,类和整体是有区别的:类具有的属性,其中的分子也具有;而整体具有的属性不为其中的部分所具有。可是,对集合做出上述定义的教材又把作为类的自然数说成是作为整体的集合。对这类问题,如果学生随便走马观花地翻翻书还可以,有些学生一深钻便反而不清楚了。

顺便要说及的是,这本传统形式逻辑教材把由科学家组成的集合表述为{科学家},把由女人组成的集合表述为{女人}。有些学生问:这类集合是单元集还是普遍集？学生产生这种疑问是由于这本教材对集合的表述不规范造成的。按表述集合的列举法,{科学家}、{女人}皆为单元集。倘由世界上一个一个的科学家作为元素组成的普遍集,则应采用一般元法表述为{x|x 是科学家}。同样,{x|x 是女人}才表述普遍集。

前面提到的一本在改革中出版的教材说,“种概念与属概念的关系和部分与整体的关系不同。前者是真包含于关系,后者是属于关系。属于关系用‘$\in$’表示”。属于关系 $\in$ 是集合中的元素与该集合的关系,或者说是类中的分子与该类的关系。但是,整体中的部分可以指一个分子,也可以指多个分子的组合。

假定以一辆车为一个整体，则其中的发动机可以叫部分，整个车头也可以叫部分，甚至发动机上的一颗螺钉也可以叫部分。因此，说“后者（指部分与整体的关系）是属于关系”的说法至少是不清楚、不确切的。

有一本法律专业用的传统形式逻辑教材在讲概念和词语的关系时写道：“一个单词或复杂词组都只表达一个概念。”在同一页上，仅隔数行，又写道：“同一个词语有时也可以表达不同的概念。”这种概括性的表述，其自相矛盾是很显然的。

流行的传统形式逻辑读本中，类似上述问题较多，在此不便一一述及。

第6章　原子命题　纯真值复合命题

6.1　命题的概述

6.1.1　命题就是关于事件的思考

事件作为一种客观的存在形态，具有客观的形成准则。是否符合这种形成准则，就成了鉴别任一对象究竟是否事件的客观标准。事件的客观的形成准则如下：

（1）任一原子事件 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 是事件；

（2）若 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 是事件，则 $\neg\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{u}\rightarrow\boldsymbol{v}$ 是事件；

（3）$\boldsymbol{w}$ 是事件，仅当 $\boldsymbol{w}$ 满足(1)或(2)。

这里，黑斜体小写拉丁字母 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 指称任意对象。以黑斜体大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$，加撇或下标指称任意事件。有什么样的事件就有什么样的命题。例如，下列语句所指谓的客体就是事件：

（1）台湾是中国不可分割的领土；

（2）日本侵略中国；

（3）如果要进行战争实践，那么首先应动员武装力量；

（4）战争不仅是军事和政治的竞赛，也是经济的角逐。

对这些事件的思考，就称为命题。(1)、(2)语句所指谓的事件称为原子事件。对这种原子事件的思考叫原子命题。(3)所表达的叫充分条件命题，(4)所表达的叫合取命题。

6.1.2　命题的真值

我们以黑斜体大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$，加撇或下标表示任意事件，以黑正体拉丁字母 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$，加撇或下标表示任意命题。如果命题 $\mathbf{A}$ 是关于事件 $\boldsymbol{A}$ 的思考，那么，当事件 $\boldsymbol{A}$ 为有时，命题 $\mathbf{A}$ 为真；当事件 $\boldsymbol{A}$ 为无时，即当事件 $\neg\boldsymbol{A}$ 为有时，命题 $\mathbf{A}$ 为假。命题的这种取决于被其所思考的事件的有无的属性通常叫做真假性，哲学中叫做真理性，逻辑科学中则称为真值。由于事件 $\boldsymbol{A}$ 的真值指事件 $\boldsymbol{A}$ 的有无，命题 $\mathbf{A}$ 的真值指为其所思考的事件 $\boldsymbol{A}$ 的有无，故而，自从有了人类的思考，有了命题之后，对于曾被人类思考的事件 $\boldsymbol{A}$ 来说，这二者是一回事。这就是我们把事件 $\boldsymbol{A}$ 的有无称为真值的缘故。由于事件 $\boldsymbol{A}$ 非有必无，不可能既

有且无,亦不可非有非无,故而,命题 **A** 必有真值,任一命题非真必假,不可既真又假,也不可不真不假。又由于命题 **A** 的真假与事件 ***A*** 的有无同义,因而,说“命题 **A** 非真必假”与说“事件 ***A*** 非有必无”同义。

可以存在无真假可言的思考,但这类思考必定不是命题,因为命题具有非真必假的属性。“永动机是铁制的”这个语句表达一个思考(这个思考是个空想,因为世界上根本就没有什么永动机),但并不表达一个命题。为什么?因为它无真假可言,它既不是真的也不是假的,即不是非真必假。如果它是真的,那么必定有为它所思考的客观事件,可是客观世界没有与之对应的事件;如果它是假的,那么为它的否定(用语句“永动机不是铁制的”表达)所思考的客观事件必定有(即必定有“永动机不是铁制的”这个语句所指谓的事件),可是客观世界仍然没有这样的事件。可见这个思考无真假属性,因而不是命题。所谓“永恒的说谎者悖论”中“写在此页上的这句话是假的”这个语句所表达的也是空想,并非命题,因为其无真假可言。这就是客观现实世界根本就不会出现永恒的说谎者悖论的辩证唯物论的铁的根据——基于当代形式逻辑的辩证唯物论真假观。

6.1.3　命题的分类

关于当代形式逻辑所研究的命题,其分类图如图 6.1 所示。

- 命题
  - 原子命题
  - 复合命题
    - 纯真值复合命题
      - 基本的纯真值复合命题
        - 否定命题
        - 合取命题(联言命题)
      - 导出的纯真值复合命题
        - 析取命题
        - 蕴涵命题
        - 等值命题
    - 非纯真值复合命题
      - 基本的非纯真值复合命题
        - ——充分条件命题
      - 导出的非纯真值复合命题
        - 必要条件命题
        - 充分必要条件命题
        - 尽举相容选择命题
        - 尽举反相容选择命题
        - 尽举不相容选择命题
        - 约合命题

条件命题

尽举选择命题

图 6.1　当代形式逻辑所研究的命题分类图

由于传统形式逻辑直言命题作为“命题形式”其逻辑语义没有规定清楚,逻辑结构尚未完全定型,因而至今还存在种种逻辑理论上的问题。被称为“传统名词逻辑”的直接推理及作为“传统名词逻辑”的核心的三段论,实际上只分析到原子命题,不分析到项词,因而理应称做命题逻辑。我们已经证明了:以三段论为代表的传统形式逻辑是当代形式逻辑命题逻辑的一部分。其中一部分对应

于当代形式逻辑的导出式,另一部分对应于当代形式逻辑的推理式。因此,我们不在这里讨论传统形式逻辑直言命题。

6.2 原子命题

所谓原子命题就是关于客观世界的原子事件的思考。客观世界的原子事件有闭原子事件与开原子事件,相应地,原子命题也分为闭原子命题和开原子命题。

6.2.1 闭原子命题

1. 何谓闭原子命题

闭原子命题就是关于客观世界的闭原子事件的思考。在闭原子命题中不出现个体变元。例如:

(1) 毛泽东是军事家。

这个语句表达的是一客观世界的闭原子事件。其逻辑结构为:$p_1(e_1)$(e_1——毛泽东,p_1——……是军事家)。对这一事件的思考,就是一个闭原子命题。用人工符号刻画这一命题就得到这一命题的式(也称符号表达式)$\mathrm{p}_1(\mathrm{e}_1)$。

又如:

(2) 中国与俄罗斯相邻。

这一语句表达的是一客观世界的闭原子事件 $q(e_3,e_0)$(e_3——中国,e_0——俄罗斯,q——……与……相邻)。对这一事件的思考就是一个闭原子命题,其符号表达式为 $\mathrm{q}(\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_0)$。

再如:

(3) 秦桧通过赵构杀害岳飞。

这一语句表达的是客观世界的闭原子事件 $r(e_3,e_4,e_5)$(e_3——秦桧,e_4——赵构,e_5——岳飞,r ——……通过……杀害……)。对这一事件的思考就是一个闭原子命题,其符号表达式为 $\mathrm{r}(\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_5)$。

闭原子事件是客观世界的常 n 目组($a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n$)满足 n 元关系 p (上述例(1)是常 1 目组(毛泽东)满足 1 元关系 p_1(……是军事家),例(2)是常 2 目组(中国,俄罗斯)满足 2 元关系 q(……与……相邻),例(3)是常 3 目组(秦桧,赵构,岳飞)满足 3 元关系 r(……通过……杀害……)],即 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$。对其思考的闭原子命题的符号表达就是:$\mathrm{p}(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\cdots,\mathrm{a}_i,\cdots,\mathrm{a}_n)$(每一个 a_i 为常项符)。

提请注意,由于约定俗成的自然语言具有随意性,其语言结构事实上与事件

的逻辑结构不一致,因而当代形式逻辑科学规定了一系列人工符号,其形式和机械的排列结构正好同相应的事件的客观的逻辑结构相一致,并以此作为承载命题的人工语言载体。对于上述两者,即命题的人工符号式(也称命题的式)和事件的客观逻辑结构关系是:后者决定前者,是前者的物质原型;前者指称后者,是后者的意识映像的语言载体。

2. 闭原子命题的补闭原子命题

客观世界还存在闭原子命题的补闭原子命题。如:

(1) 毛泽东不是军事家—— $\sim p_1(e_1)$

就是

毛泽东是军事家—— $p_1(e_1)$

的补闭原子命题。

(2) 中国与俄罗斯不相邻—— $\sim q(e_0,e_3)$

就是

中国与俄罗斯相邻 —— $q(e_0,e_3)$

的补闭原子命题。

(3) 并非赵构通过秦桧杀害岳飞—— $\sim r(e_3,e_4,e_5)$

就是

赵构通过秦桧杀害岳飞 —— $r(e_3,e_4,e_5)$

的补闭原子命题。

事实上,p 和 ~p 互补,故我们也可以称 $p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 为 $\sim p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的补闭原子命题。

6.2.2　开原子命题

开原子命题就是关于客观世界的开原子事件的思考。开原子命题中含有一个或一个以上的个体变元。例如:

(1) x 国支援 y 国

这一语句表达的是一客观世界的开原子事件。其逻辑结构为:$p_1(x,y)$(x——个体变元,y——个体变元,x、y 为论域"国家"中的任意个体,p_1——……支援……)。对这一事件的思考就是一个开原子命题。其符号表达式为:$p_1(x,y)$。

(2) x_1能被 2 整除

这一语句表达的是一开原子事件。其逻辑结构为:$q(x_1,e_2)$(x_1——个体变元,x_1为论域"自然数"中的任意个体;e_2——2,q——……能被……整除)。对这一事件的思考就是一个开原子命题。其符号表达式为:$q(x_1,e_2)$。

上述 $p_1(x,y)$ 是一个关于 2 元关系 p_1 和变 2 目组(x,y)的开原子命题,

$q(x_1,e_1)$是一个关于2元关系q和变2目组(x_1,e_1)的开原子命题。关于n元关系p和变n目组$(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$的$n$元开原子命题的表达式即为$p(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$(至少有一个$a_i$为变项符)。

6.2.3 1元原子命题和多元原子命题

1元原子命题就是关于客观世界的1元原子事件的思考。

2元原子命题就是关于客观世界的2元原子事件的思考。

n元原子命题就是关于客观世界的n元原子事件的思考。

2元或2元以上的原子命题称为多元原子命题。

例如:

(1) 中国是发展中国家;

(2) 吴国被越国打败;

(3) 老李把小王推荐给吴排长。

以上三语句所承载的依次为1元原子事件、2元原子事件、3元原子事件。其逻辑结构依次为$p_1(e_1)$、$q(e_2,e_0)$、$r(e_4,e_5,e_6)$。p、q、r分别为1元关系、2元关系、3元关系。

对以上事件(1)、(2)、(3)的思考就分别是一个1元原子命题、一个2元原子命题、一个3元原子命题。其符号表达式分别为$p_1(e_1)$、$q(e_2,e_0)$、$r(e_4,e_5,e_6)$。其中,$q(e_2,e_0)$和$r(e_4,e_5,e_6)$是多元原子命题。

1元原子命题的一般表达式为:$p(a)$。

多元原子命题的一般表达式为:$p(a_1,\cdots,a_n)$($n>1$,n为有限自然数)。

2元原子命题是出现较多的一种多元原子命题,是一种较为特殊的多元原子命题。

6.2.4 原子命题的真值

如前所述,我们以黑正体大写拉丁字母**A**表示任意的原子命题,以黑斜体大写拉丁字母***A***表示为命题**A**所思考的事件。当事件***A***为有时,命题**A**为真;当事件***A***为无时,亦即,当事件$\neg$***A***为有时,命题**A**为假。例如,语句"地球绕太阳转"表达一个事件。我们用p表示2元关系"……绕……转",用e_3、e_0分别表示个体地球、太阳,则(e_3,e_0)表示由地球、太阳组成的论域上的一个2目组。于是,所谓"地球绕太阳转这个事件为有"是指有下述事实:

(1) 有地球e_3这个个体;

(2) 有太阳e_0这个个体;

(3) 有地球为前项、太阳为后项的2目组(e_3,e_0);

(4) 有2元关系p;

（5）有2目组(e_3,e_0)满足2元关系p,即有事件$p(e_3,e_0)$(或者$(e_3,e_0)\in P$)。

因为事件$p(e_3,e_0)$为有,所以我们就说命题$\mathrm{p}(\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_0)$为真。

语句“太阳绕地球转”表述一个事件。我们用p表示2元关系“……绕……转”,$\sim p$则表示p的补关系“……不绕……转”,e_3、e_0同前,(e_0,e_3)表示由太阳、地球组成的2目组。于是,所谓“有事件太阳不绕地球转”就是指:

（1）有太阳e_0这个个体;

（2）有地球e_3这个个体;

（3）有太阳为前项、地球为后项这个2目组(e_0,e_3);

（4）有2元关系p的补关系$\sim p$;

（5）有2目组(e_0,e_3)满足2元补关系$\sim p$,即,有事件$\sim p(e_0,e_3)$(或者$(e_0,e_3)\bar{\in} P$,或$(e_0,e_3)\in\ \sim P$)。

鉴于补事件$\sim p(e_0,e_3)$与否定事件$\neg p(e_0,e_3)$互为充要条件,即事件$\sim p(e_0,e_3)$为有,当且仅当事件$\neg p(e_0,e_3)$为有,由于事件$\neg p(e_0,e_3)$为有,故我们说命题$\mathrm{p}(\mathrm{e}_0,\mathrm{e}_3)$为假。

6.3　纯真值复合命题

6.3.1　基本的纯真值复合命题

复合命题就是关于客观世界的复合事件的思考。为了进一步介绍复合命题,我们先介绍子命题、基础命题。

若命题**B**在命题**A**中出现,则称**B**为**A**的子命题。**A**是自身的子命题。**B**是**A**的子命题时,**A**可以是也可以不是**B**的子命题。若**B**是**A**的子命题,而**A**不是**B**的子命题,则称**B**是**A**的真子命题。真子命题又叫支命题,并简称为支。例如,$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$为一命题。显然,**A**、**B**、**C**、$\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$和$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$都为$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$的子命题。其中,**A**、**B**、**C**、$\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$为$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$的真子命题。

任一命题都有子命题,但未必任一命题都有真子命题,亦即未必每一命题都有支命题。原子命题是没有支的命题,是0层命题,没有本身也是命题的更小的组成部分;复合命题是有支的命题,是$m(m>0)$层命题,有本身也是命题的更小的组成部分。

不管**A**是不能分解出支命题的原子命题还是能分解出支命题的复合命题,只要我们不对**A**进行分解,**A**就称为基础命题。亦即,不对其进行分解的命题,就是基础命题。

复合事件分为纯真值复合事件和非纯真值复合事件。相应地,复合命题也分为纯真值复合命题和非纯真值复合命题。

纯真值复合命题就是关于客观世界的纯真值复合事件的思考。纯真值复合命题可分为基本纯真值复合命题和导出纯真值复合命题两种。基本的纯真值复合命题又分为否定命题和合取命题。

1. 否定命题

否定命题就是关于客观世界的否定事件的思考。例如：

并非“美国侵略英国”。

这语句表达的是一个客观世界的否定事件，是对事件“美国侵略英国”的否定。对这一否定事件的思考就是一个否定命题。其符号表达式为：$\neg p(e_1, e_2)$。其中 $p(e_1, e_2)$ 为基础命题（即关于事件“美国侵略英国”的思考），$\neg$ 为否定词号。

以 **A** 表示在命题中出现的基础命题，则否定命题写做：$\neg$**A** 或 $\overline{A}$。读做：非 **A**。如前所述，命题必有真值，原子命题有真值，复合命题亦有真值。**纯真值复合命题的真值取决于在其中出现的基础命题的真值，这是由纯真值联结关系联结基础命题构成的纯真值复合命题最根本的特征。**这就是著名的弗雷格原理。

与否定事件的真值相对应，否定命题 $\neg$**A** 的真值取决于其基础命题 **A** 的真值。其真假特征（真值）是：当 **A** 真时，$\neg$**A** 假；当 **A** 假时，$\neg$**A** 真。否定命题 $\neg$**A** 的真值表与否定事件的真值表完全一致，它指谓客观世界第 3 号 1 元真值函数关系 f_3^1。

其真值表为：

A	$\neg$**A**
1	0
0	1

$\neg$**A**（或 $\overline{A}$）是否定命题的人工符号表达式。自然语言表达否定命题的语句句型则较为灵活。在汉语里，表达否定命题的语句句型有“并非 **A**”、“不 **A**”、“并不是 **A**”、“**A** 的否定”、“**A** 假”，等等。例如：

并非不是法律系的老师就不懂得法律；

并不是军事院校的学生都能成为军事理论家；

不入虎穴；

等等。

2. 合取命题

合取命题就是关于客观世界的合取事件的思考。例如：

核能给人类以发展又给人类以灾难。

这一语句表达的即为客观世界的一个合取事件。其含义是：事件“核能给

人类以发展”(用 $\boldsymbol{A}$ 表示)与事件“核能给人类以灾难”(用 $\boldsymbol{B}$ 表示)同有。即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同有。对上述合取事件的思考就是一个合取命题。以 **A**、**B** 分别表示两个基础命题(即关于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的思考),合取命题的符号表达式即为:$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$。其中,∧为合取词号。$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ 读做“**A** 合取 **B**”。

与合取事件的真值相对应,合取命题 $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ 的真值取决于其基础命题 **A**、**B** 的真值。其真假特征(真值)是:只有当 **A**、**B** 均为真时,$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ 为真;其余情况下(即 **A**、**B** 中至少有一假),$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ 皆为假。合取命题 $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ 的真值表与合取事件的真值表完全一致,它指谓客观世界第 8 号 2 元真值函数关系 f_8^2。∧是 2 元联结号。

其真值表为:

A	**B**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

在汉语里,表达合取命题的语句句型有“**A** 并且 **B**”、“**A** 且 **B**”、“**A** 而 **B**”、“**A** 与 **B**”、“**A** 和 **B**”、“既 **A** 又 **B**”、“不但 **A**,而且 **B**”、“虽然 **A**,但是 **B**”等。例如:

国防动员潜力的总体储备水平,既要依赖国家经济的发展和社会的进步,又要靠相应的措施加以发展和提高;

吴连长膀大腰圆;

人来马往;

等等。

以上否定命题和合取命题的联结词(符号为¬、∧),称为基本的纯真值联结词。由这两种基本的纯真值联结词可导出(或定义出)另外三种纯真值联结词(称为导出或被定义联结词):∨(析取词)、→(蕴涵词)、↔(等值词)。由此,可得到另外三种纯真值复合命题,称为导出的纯真值复合命题。

6.3.2 导出的纯真值复合命题

导出的纯真值复合命题由导出(或被定义)联结词联结基础命题构成,有以下三种。

1. 析取命题

析取命题就是关于客观世界的析取事件的思考。析取命题由析取词联结两个基础命题构成。例如:

李明或者是军人,或者是医生。

这语句表达的就是客观世界的一个析取事件。对这一事件的思考就是析取命题。

析取命题的符号表达式为:**A∨B**。读做“**A** 析取 **B**”。∨为析取词号,可由否定词和合取词导出。**A∨B** 被定义为:¬(¬**A**∧¬**B**)。

析取命题 **A∨B** 的真假特征(真值)是:当基础命题 **A**、**B** 至少有一为真时,**A∨B** 为真;当 **A**、**B** 均为假时,**A∨B** 为假。析取命题 **A∨B** 的真值表与析取事件的真值表完全一致,它指谓客观世界第 2 号 2 元真值函数关系 f_2^2。∨也是 2 元联结号。

其真值表为:

A	**B**	**A∨B**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

在汉语里,表达析取命题的语句句型有“并非既不 **A** 又不 **B**”、“不是‘非 **A** 且非 **B**’”、“**A** 或者 **B**”、“**A** 或 **B**”、“**A**、**B** 至少是其中之一”、“或者 **A**,或者 **B**,二者兼而有之”等。例如:

老张或者乘飞机,或者乘火车去上海;

各个国家根据本国的需要,或通过进口先进的武器装备以提高国防现代化水平,或通过出口武器装备为国家创汇;

引发战争的原因或者是由于海域划界、海洋资源权益争端问题得不到合理、公正的解决,或者由于历史的原因国家的统一大业尚未定成;

等等。

2. 蕴涵命题

蕴涵命题就是关于客观世界的蕴涵事件的思考。蕴涵命题由蕴涵词联结两个基础命题构成。例如:

甲国向乙国挑起战争,蕴涵,丙国支援丁国。

此语句表达的就是一客观世界的蕴涵事件,对这一事件的思考就是一个蕴涵命题。

蕴涵命题的符号表达式为:**A→B**。读做“**A** 蕴涵 **B**”。“→”为蕴涵词号,可由否定词和合取词导出。**A→B** 被定义为:¬(**A**∧¬**B**)。

蕴涵命题 **A→B** 的真假特征(真值)是:当 **A** 真、**B** 假时,**A→B** 为假;其余情况下(即 **A** 假或者 **B** 真),**A→B** 为真。蕴涵命题 **A→B** 的真值表与蕴涵事件的

真值表完全一致,它指谓客观世界第 5 号 2 元真值函数 f_5^2。“→”是 2 元联结号。其真值表为:

A	B	A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

在汉语里,表达蕴涵命题的语句句型有“并非 **A** 而不 **B**”、“不是 **A** 而非 **B**”、“非 **A** 或者 **B**”、“至少是非 **A**、**B** 中之一”、“**A** 蕴涵 **B**”等。例如:

并非“甲国向乙国挑起战争,而丙国不支援丁国”;

张三不是军人,或者美国具有强大的军事实力;

2008 年北京举办奥运会,蕴涵,《孙子兵法》是中国军事史上最早的军事书;

等等。

3. 等值命题

等值命题就是关于客观世界的等值事件的思考。等值命题由等值词联结两个基础命题而成。等值命题又称互蕴命题。例如:

军事家蒙哥马利是英国人与巴黎是法国的首都同真假。

这语句表达的就是一客观世界的等值事件,对这一事件的思考就是等值命题。

等值命题的符号表达式为:**A↔B**,读做“**A** 等值 **B**”。“↔”为等值词号,可由否定词和合取词导出。**A↔B** 被定义为:¬(**A**∧¬**B**)∧¬(**B**∧¬**A**)。

等值命题 **A↔B** 的真假特征(真值)是:当 **A** 真 **B** 真或者 **A** 假 **B** 假时,**A↔B** 为真;当 **A** 真 **B** 假或者 **A** 假 **B** 真时,**A↔B** 为假。换句话说,当 **A**、**B** 同真假时,**A↔B** 为真,否则 **A↔B** 为假。等值命题 **A↔B** 的真值表与等值事件的真值表完全一致,它指谓客观世界第 7 号 2 元真值函数 f_7^2。“↔”是 2 元联结号。其真值表为:

A	B	A↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

在汉语里,表达等值命题的语句句型有“既非‘**A** 而不 **B**’,又非‘**B** 而不

A'"、"A 和 B 同真假"、"A 等值 B"、"不会是 A 但非 B,也不会是 B 但非 A"等。例如:

拿破仑是法国人,蕴涵,火药是中国古代四大发明之一;火药是中国古代四大发明之一,蕴涵,拿破仑是法国人。

并非糖是甜的而黄连不苦,也并非黄连是苦的而糖不甜。

广州雪花大如席等值于南极酷暑难当。

等等。

6.4 重言式的判定

判定重言式的方法有:真值表方法、归谬赋值法(这二者是语义的判定方法)、反演分解图法、合取范式法(这后二者是语构的判定方法)等。我们只介绍前三种判定方法。若需要了解最后一种方法,请参阅龚启荣著《逻辑斯谛——又称"数理逻辑"的二值数学》(贵州教育出版社,1998)。

6.4.1 真值表方法

真值表方法为美国数学家、哲学家皮尔斯(Charles Sanders Peirce,1839—1914)所创立。运用真值表可以计算出纯真值复合式的真值,可以判定一纯真值复合式是否重言式、矛盾式、协调式。真值表方法是一种语义方面的判定方法。

在介绍真值表方法之前,我们先介绍纯真值复合式的形成过程。纯真值复合式的形成过程反映了纯真值复合事件的形成过程。它是由基础式和联结号按照形成规则经过有限次联结而逐步形成的。例如:

由一个基础式 A 组成的纯真值复合式 $A \vee \neg A$ 的形成过程是:

$$A$$
$$\neg A$$
$$A \vee \neg A$$

由两个基础式 A、B 组成的式$(A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$的形成过程是:

$$A, B$$
$$\neg A, \neg B$$
$$A \to B$$
$$\neg A \to \neg B$$
$$(A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$$

从图论的观点看,一纯真值复合式的形成过程可用倒树形图表示。在倒树形图中,树的节点对应于联结号,而枝对应于纯真值复合式的子式,叶则对应于子式中的基础式。例如,表示纯真值复合式$((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$ 的倒树形

图如图6.2所示。

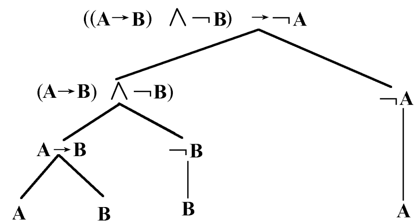


图6.2　纯真值复合式形式过程的倒树形图

真值表方法和纯真值复合式的形成过程有密切联系。其作法分为三步。

第一步,按照纯真值复合式的形成过程,将给定的纯真值复合式 **A**、**B** 的子式由简单到复杂地从左至右写出。

例如,设给定的纯真值复合式为(**A→B**)∧(¬**A** →¬**B**)。要画它的真值表,则首先将其子式由简单到复杂地从左至右写出,并在其下画一长横线:

A　**B**　¬**A**　¬**B**　**A→B**　(¬**A→**¬**B**)　(**A→B**)∧(¬**A→**¬**B**)

第二步,从上至下写出给定的纯真值复合式的所有基础式 **A**、**B** 的真假组合情况,并在其右边画一长竖线。如:

A	**B**	¬**A**	¬**B**	**A→B**	(¬**A→**¬**B**)	(**A→B**)∧(¬**A→**¬**B**)
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

第三步,再根据五个联结号的真值表,依次计算出每个子式的真值并将真值写在子式和基础式的真假组合的坐标点上。我们继续完成上例的真值表:

	A	**B**	¬**A**	¬**B**	**A→B**	(¬**A→**¬**B**)	(**A→B**)∧(¬**A→**¬**B**)
Ⅰ	1	1	0	0	1	1	1
Ⅱ	1	0	0	1	0	1	0
Ⅲ	0	1	1	0	1	0	0
Ⅳ	0	0	1	1	1	1	1
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

这样,便完成了关于(**A→B**)∧(¬**A** →¬**B**)的真值表。在这个真值表中,我们用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ标出横排的排数,这横排称做真值表的行。我们用(1)、(2)、(3)等阿拉伯数字标出竖排的排数,这竖排称做真值表的列。真值表的行数为2^n(n 为基础式的个数)。真值表的列数则与该纯真值复合式的子式的

数目相同。

从上面这个真值表我们清楚地看出,最后一列($A \to B$)$\wedge$($\neg A \to \neg B$)的值是2真2假,亦即,该复合式的值是可真可假的,因而它是一个协调式,不是重言式。

由此,我们得出关于重言式的真值表判定定理:一个纯真值复合式是重言式,当且仅当在该纯真值复合式的真值表上最后一列的值均为1。

这个定理的正确性是显然的。

例:用真值表判定下面的表达式是否重言式:

$$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$$

解:列真值表如下:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge \neg A$	$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

鉴于这个真值表最后一列皆为1,因而此纯真值复合式是重言式。

真值表的判定功能,对于无论什么样的纯真值复合式都是有效的,都能在有限步内做出判定。但是,真值表方法的判定程序常常是烦琐的。如果一纯真值复合式含有四个不同的基础式,为了显示它所有的可能的真假组合,我们不得不画一张十六行的真值表。为了解除这种烦琐的缺陷,我们有以下方法。

6.4.2 归谬赋值法

归谬赋值法又称简化真值表法。它是建立在真值表方法基础上的一种判定重言式的有效方法,也是语义方面的判定方法。

归谬赋值法所依据的原则称为归谬赋值原则。归谬赋值原则可表述为:要判定式 **A** 是否重言式,先假定式 **A** 可假,由 **A** 可假出发,如果导致其中的某一基础式 A_i 的真值既出现真又出现假(即出现赋值矛盾),则证明 **A** 的真值不可假,据排中律,得 **A** 恒取值真,因而是重言式;如果由 **A** 可假出发,不会导致其中的任一基础式 A_i 的真值既出现真又出现假的赋值矛盾,则 **A** 的真值可出现假值,即 **A** 并非恒取值真,因而不是重言式。

据此,归谬赋值法总的可分三步进行。

第一步,假定被判定的纯真值复合式的真值可假;

第二步,从这一假定出发,严格按照五个真值联结号的真值表定义,依式的长度递减的次序,对该纯真值复合式中各层真子式赋以相应的值,直到所有基础

式取得确定的值为止；

第三步，检查所有基础式的真值，如果其中至少有一个基础式的真值既是真的又是假的，那么即可断定被判定的纯真值复合式为重言式；否则，不是重言式。

我们看如下几个例子。

例1 试用归谬赋值法判定（**B**→**C**）∧（D→**C**）→（**B**∨D→**C**）是否为重言式。

解：画简化真值表如下。

	(B	→	C)	∧	(D	→	C)	→	(B	∨	D	→	C)
(1)								0					
(2)				1								0	
(3)		1				1				1			0
(4)			0				0						
(5)	0*				0								
(6)									1*		0		

我们用（1）、（2）、（3）等表示归谬赋值的步骤。本简化真值表结果出现 **B** ＝1 且 **B** ＝0，产生赋值矛盾，因而第（1）步的假设不成立，即这个纯真值复合式不可能出现假值，故而它是重言式。我们用星号＊标出赋值矛盾。

这个简化真值表的最后一步，可以采取另外两种赋值法：①**B** 取0，**D** 取1，这时出现 **D** ＝1 且 **D** ＝0，矛盾；②**B**、**D** 皆取1，这时，既出现 **B** ＝1 且 **B**＝0，又出现 **D** ＝1 且 **D** ＝0，仍然矛盾。无论采取哪种赋值，都能证明该纯真值复合式是重言式。

在做简化真值表时，否定号要写在式（复合式或基础式）的前面，便于赋值的书写。

例2 试用归谬赋值法判定（**B**→**C**）→（¬**C**→¬**B**）是否为重言式。

解：做简化真值表如下。

	(B	→	C)	→	(¬	C	→	¬	B)
(1)				0					
(2)		1					0		
(3)					1			0	
(4)						0*			1
(5)	1								
(6)			1*						

检查所有基础式的赋值，**C** ＝1 且 **C** ＝0，出现赋值矛盾，故而该纯真值复合式是重言式。

此例的第（5）、（6）行赋值还可以有另一种赋值法：第（5）行可赋予 **C** 为假值0，则第（6）行必赋假值0 于 **B**，于是 **B** ＝1 且 **B** ＝0，同样出现矛盾，原式为重言式。

当我们熟练地掌握简化真值表后，为了更简便，也为了节省，可以将多行真

值赋值压缩为一行。

例 3 试判定 $\mathbf{B}\to(\mathbf{C}\to\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})$ 是否为重言式。

解:先作出压缩为一行真值赋值的简化真值表。

(2)	(1)	(3)	(2)	(4)	(3)	(4)
B	→	(**C**	→	**B**	∧	**C**)
1	0	1	0	0	0	1
*				*		

鉴于出现赋值矛盾 $\mathbf{B}=1$ 且 $\mathbf{B}=0$,故该式为重言式。

最后第(4)步的赋值还可以有两种赋值法:第一种,$\mathbf{B}=1,\mathbf{C}=0$,这样便出现 $\mathbf{C}=1$ 且 $\mathbf{C}=0$ 的矛盾;第二种,$\mathbf{B}=0,\mathbf{C}=0$,这样便出现两对矛盾:① $\mathbf{B}=1$ 且 $\mathbf{B}=0$;② $\mathbf{C}=1$ 且 $\mathbf{C}=0$。这两种赋值结果同样证明该纯真值复合式为重言式。

这样,我们可得到下面关于重言式的归谬赋值法判定定理:一纯真值复合式是重言式,当且仅当它的归谬赋值结果至少出现一对赋值矛盾。

这个定理的正确性也是显然的。

归谬赋值法主要用于判定多重纯真值蕴涵式或多重纯真值析取式是否为重言式。

6.4.3 反演分解图法

反演分解图法是应用求一式的否定的反演运算法,将要检验的纯真值复合式逐步分解出其子式从而判定其是否为重言式的方法。这种方法是一种语构的方法。为了便于陈述,我们简称为分解图法。用这种方法得出的图形称为分解图。

一个分解图就是一个半序集,我们称它的元为结。各个结都是一个有限的纯真值复合式之集。每个结属于一个确定的层,层用非负的整数加括号标明。0 层的结只有一个,称做该分解图的始结,也称为起点。$i+1$ 层的结各是唯一的属于 i 层的一个结的后继。在画分解图时,我们把给定的某个结的后继(新的结)写在它的下面,而且用线段把它们联结起来,一个没有后继的结就是终结,又称终点。如果一个分解图的各个支中最高的层数为 k,我们就称 k 为该分解图的高。一个分解图的一个分支就是结的一个有限序列 $u_0,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_k$;$u_0$ 为该分解图的始结,对于 $i=1,2\cdots,k$,u_i 是 u_{i-1} 的一个后继,u_k 是终结;如此,我们称这个分支了结于 u_k。显然,对于各个终结都有唯一的一个了结于它的分支。

下面,我们讨论怎样构造反演分解图判定一纯真值复合式为重言式,并举例加以说明。

当我们得到一个命题表达式 **C** 时,先在 **C** 前加上一个否定号得 $\neg\mathbf{C}$,然后根据下面三条规则对 $\neg\mathbf{C}$ 一层层进行分解。这种分解其实就是对 **C** 进行反演

运算。正是这个缘故,我们将这种方法称为反演分解图法。三条规则如下所述。

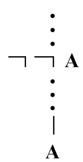
(1)¬¬规则:如果在分解图的一个了结于终结 u_i 的分支的纯真值复合式集之中有一个式为¬¬**A**,我们就在结 u_i 之下附加一个新的结{**A**}作为 u_i 的后继。

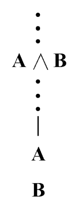
(2)∧规则:如果在分解图的一个了结于终结 u_i 的分支的纯真值复合式集之中有一个式为 **A**∧**B**,就在结 u_i 之下附加一个新的结{**A**,**B**}作为 u_i 的后继。

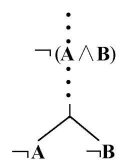
(3)¬∧规则:如果在分解图的一个了结于终结 u_i 的分支的纯真值复合式集之中有一个式为¬(**A**∧**B**),我们就在结 u_i 之上附加两个新的结{¬**A**}和{¬**B**}作为 u_i 的后继。这时,结{¬**A**}和结{¬**B**}又构成两个新的分支。

我们将这三条规则图示如下:

(1)¬¬规则　　(2)∧规则　　(3)¬∧规则

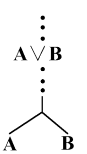


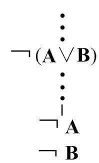


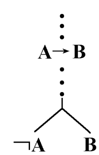


在理论研究中,我们只要这三条规则就足够了。但在实际应用时,为了方便,我们根据纯真值复合式的恒等式,增加下面六条规则:

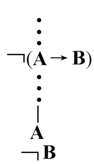
(4)∨规则　　(5)¬∨规则　　(6)→规则

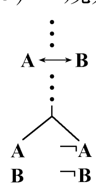


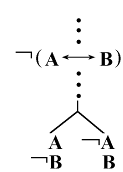




(7)¬→规则　　(8)←→规则　　(9)¬→规则







在运用任何一条规则时,相应的纯真值复合式称做该次运用过的纯真值复合式。在一个分解图中,对于一个特定的分支,按照上述(1)、(2)、(5)、(7)条规则,将分解成一个更长的分支;按照(3)、(4)、(6)、(8)、(9)条规则,将分解成两个更长的分支;而其他分支则保持不变。

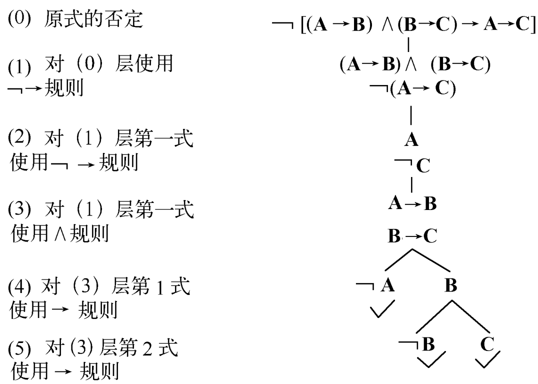
如果在分解图的一个分支出现一对矛盾的表达式 **A** 和¬**A**,则称这个分支是完成的。如果在一个纯真值复合式 **C** 的分解图中所有分支都是完成的,则 **C** 就是重言式。如果一个分支中出现 **A** 和¬**A**,即使 **A** 是复合式,该分支也无异

于完成的。在实际分解时,一个完成了的(或无异于完成了的)分支无须做进一步分解,即使规则允许也不必再分解。我们在画反演分解图时,经常碰到的一个问题是,在一个支上同时可以运用两条或更多条规则。在这种情况下,为了处理方便,先运用那些不会分解成两个分支的规则。

例 1 试用反演分解图法判定下面的纯真值复合式是否为重言式:

$$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C}$$

解:为了清楚起见,我们用数码(0)、(1)、(2)等标明分解图的层。自(1)起可称做分解图的步骤。在每一步骤中,紧接数码注明该步所使用的规则(对第几层使用什么规则)。当一个分支完成(或无异于完成)时,我们在它的底部画上符号"√",表示该分支已完成。分解图如下。



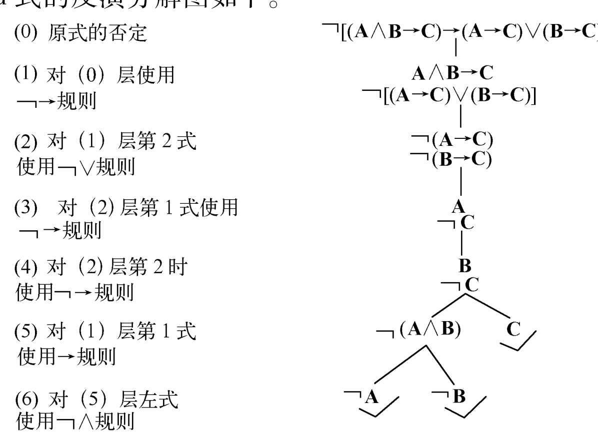
由于所有分支都是完成的,可见,该纯真值复合式是重言式。

例 2 试用分演分解图法证明下面两个纯真值复合式是否为重言式:

$$u:(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})\vee(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})$$

$$v:(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C}$$

解:先画 u 式的反演分解图如下。



再画 v 式的反演分解图如下。

(0) 原式的否定

(1) 对（0）层使用 $\neg\to$规则

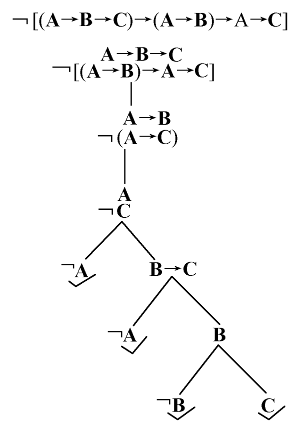
(2) 对（1）层第 2 式使用$\neg\to$规则

(3) 对（2）层第 2 式使用$\neg\to$规则

(4) 对（1）层第 1 式使用$\to$规则

(5) 对（2）层第 1 式使用$\to$规则

(6) 对（4）层右支结使用$\to$规则



显然，在 u、v 二式的反演分解图中所有支都是完成的，故而，u、v 二式都是重言式。

6.5　对纯真值有效式的剖析

我们把纯真值有效式（即重言式）同传统命题逻辑的表达式对照起来，对纯真值有效式分三大类进行讨论。

6.5.1　对应于传统命题逻辑推理式的纯真值有效式

假若把纯真值重言式中出现的联结号和在与其对应的传统命题逻辑推理式中出现的联结词做下述对应：

（1）$\wedge$ —— 与；　　（2）$\vee$ —— 或者；

（3）$\to$ —— 若……则……；　　（4）$\neg$ —— 非；

（5）恒真式的主联结号$\to$ —— 所以。

那么，纯真值的一类（或部分）蕴涵重言式（以蕴涵号为主联结号的部分重言式）就被称为传统命题逻辑推理式的真值形式。作为真值形式的纯真值蕴涵重言式和与其相对应的传统命题逻辑推理式之间的对照如表 6.1 所示。

表 6.1　纯真值蕴涵重言式和与其相对应的传统逻辑推理式之间的对照

序　号	纯真值蕴涵重言式	传统逻辑推理式	
		陈　　述	名　　称
1	$(A\vee B)\wedge\neg A\to B$	**A** 或者 **B**，与，非 **A**，所以，**B**	尽举相容选择推理否定肯定式
2	$(A\to B)\wedge A\to B$	若 **A** 则 **B**，与，**A**，所以，**B**	充分条件推理肯定式

续表

序　号	纯真值蕴涵重言式	传统逻辑推理式	
		陈　述	名　称
3	(**A**→**B**)∧¬**B**→¬**A**	若 **A** 则 **B**,与,非 **B**,所以,非 **A**	充分条件推理否定式
4	(**A**→**C**)∧(**B**→**C**)∧(**A**∨**B**)→**C**	若 **A** 则 **C**,与,若 **B** 则 **C**,与,**A** 或者 **B**,所以 **C**	二难推理简单构成式
5	(**A**→**C**)∧(**B**→**D**)∧(**A**∨**B**)→**C**∨**D**	若 **A** 则 **C**,与,若 **B** 则 **D**,与,**A** 或者 **B**,所以,**C** 或者 **D**	二难推理复杂构成式
6	(**A**→**B**)∧(**A**→**C**)∧(¬**B**∨¬**C**)→¬**A**	若 **A** 则 **B**,与,若 **A** 则 **C**,与,非 **B** 或者非 **C**,所以,非 **A**	二难推理简单破坏式
7	(**A**→**C**)∧(**B**→D)∧(¬**C**∨¬D)→¬**A**∨¬**B**	若 **A** 则 **C**,与,若 **B** 则 **D**,与,非 **C** 或者非 **D**,所以,非 **A** 或者非 **B**	二难推理复杂破坏式
8	(**A**→**B**)∧(**B**→**C**)→(**A**→**C**)	若 **A** 则 **B**,与,若 **B** 则 **C**,所以,若 **A** 则 **C**	纯假言推理肯定式
9	(**A**→**B**)∧(**B**→**C**)→(¬**C**→¬**A**)	若 **A** 则 **B**,与,若 **B** 则 **C**,所以,若非 **C** 则非 **A**	纯假言推理否定式
10	(**A**→**B**)→(¬**B**→¬**A**)	若 **A** 则 **B**,所以,若非 **B** 则非 **A**	充分条件易位推理式
11	(**A**→**C**)∧(**B**→D)∧(**A**∧**B**)→**C**∧**D**	若 **A** 则 **C**,与,若 **B** 则 **D**,与,**A** 与 **B**,所以,**C** 与 **D**	假言联言推理肯定式(1)
12	(**A**→**C**)∧(**B**→**D**)→(**A**∧**B**→**C**∧**D**)	若 **A** 则 **C**,与,若 **B** 则 **D**,所以,若 **A** 与 **B** 则 **C** 与 **D**	假言联言推理肯定式(2)
13	(**A**→**C**)∧(**B**→**D**)∧(¬**C**∧¬**D**)→¬**A**∧¬**B**	若 **A** 则 **C**,与,若 **B** 则 **D**,与,非 **C** 与非 **D**,所以,非 **A** 与非 **B**	假言联言推理否定式(1)
14	(**A**→**B**)∧(**A**→¬**B**)→¬**A**	若 **A** 则 **B**,与,若 **A** 则非 **B**,所以,非 **A**	强归谬推理式

从这个对照表我们可以清楚地看出,就语言方面而言,纯真值有效式中的一类蕴涵重言式和传统命题逻辑推理式之间有着下述对应关系:→(蕴涵)对应着“若,则”,恒真的→(即有效蕴涵)对应着“所以”。可是,这仅仅是语言上的对应而已。从语义上看,它们各自所指谓的客观世界的普遍存在事件的结构却根本不相同。我们试分析表 6.1 中序号 2 之例:互相对应的(**A**→**B**)∧**A**→**B** 和充分条件推理肯定式。前者指谓¬{[¬(**A**∧¬**B**)∧**A**]∧¬**B**},是个含 2 个变元的恒真的真值函数,是对由¬、∧迭合而成的 $k+5$ 层的纯真值复合事件的表述,同充分条件迥然不同;而后者指谓(**A**⇀**B**)∧**A**⇀**B**,是对 $k+3$ 层的非纯真值的充分条件事件的刻画,是关于经验的充分条件和逻辑的充分条件关系的表述,同真值函数绝然两样。这二者是互为同基异构的普遍存在事件——基础事件相同,结构殊异。正由于它们所指谓的普遍存在事件的结构完全不同,便决定了重

言式和推理式具有完全不同的性质。我们在此仅举出它们的一系列不同性质中的一项。

要确定蕴涵重言式（**A→B**）∧**A→B** 的前件（**A→B**）∧**A** 为真，根据联结号的真值表定义，需确定 **A** 为真和 **B** 为真，而 **B** 正是这个重言式的后件。

要确定推理式“若 **A** 则 **B**，与，**A**，所以，**B**”的前提“若 **A** 则 **B**，与，**A**”为真，需确定“若 **A** 则 **B**”为真、“**A**”为真，但无须确定 **B** 为真，亦即，无须确定结论为真。

对这一例的分析所得的结果，可以推广到任意的与传统推理式相对应的蕴涵重言式中去。

确定蕴涵重言式的前件为真需以确定其后件为真作为必要条件，正因为这样，原意为“同语反复”的“重言式”这个名称正是完全名副其实的。

与此相反，确定推理式的前提为真则无须确定结论为真。这是理所当然的，否则怎么能据以从已知获取新知，据以进行不循环论证呢？

6.5.2　对应于传统命题逻辑导出式的纯真值有效式

前、后件之间满足逻辑的充分条件关系，可是，确定前件为真需要以确定后件为真作为必要条件的有效充分条件式 **A⇀B** 称为导出式：从 **A** 导出 **B**。由于传统逻辑坚持要求论证不许循环，即，要求在确定前提为真时无须确定结论为真（否则，论证就将失去原有的意义），而传统推理式又都可以用来据以进行不循环论证，因此，明显循环的导出式（只有在确定后件为真的情况下才能确定前件为真）理所当然地未被列入传统的推理式的行列。但是，尽管如此，传统逻辑实际上是承认导出式的前、后件之间的导出关系的：前件为真时后件必为真。不过只是我们不让它们混入能据以进行不循环论证的推理式之中而已。为了把纯真值中的另一类蕴涵重言式和传统逻辑中相应的导出式做对照，我们列出表 6.2（在自然语言中，没有专门用来指称充要条件的词语，为了简便，我们用“当且仅当”表述传统逻辑中的“逻辑的充要条件”，这里是指“互相导出”；与之相对应的是纯真值复合式中的恒真的“互相蕴涵”）。

表 6.2　纯真值蕴涵重言式与传统逻辑导出式之间的对照

序　号	纯真值蕴涵重言式	传统逻辑导出式	
		陈　　述	名　　称
1	**A∧B→A**	若 **A** 与 **B**，则 **A**	联言导出式
2	**A↔A**	**A** 当且仅当 **A**	同一式
3	**A→A∨B**	若 **A**，则 **A** 或者 **B**	增或式
4	**A∧A↔A**	**A** 与 **A**，当且仅当，**A**	与的吸收式
5	**¬¬A↔A**	非非 **A**，当且仅当，**A**	双重否定消去式
6	**A∧B↔B∧A**	**A** 与 **B**，当且仅当，**B** 与 **A**	与的交换式

续表

序　号	纯真值蕴涵重言式	传统逻辑导出式	
		陈　述	名　称
7	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$	**A** 或者 **B**,当且仅当,**B** 或者 **A**	或的交换式
8	$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$	(**A** 与 **B**)与 **C**,当且仅当,**A** 与(**B** 与 **C**)	与的结合式
9	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$	(**A** 或 **B**)或 **C**,当且仅当,**A** 或(**B** 或 **C**)	或的结合式
10	$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \leftrightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vee \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$	**A** 与(**B** 或 **C**),当且仅当(**A** 与 **B**)或者(**A** 与 **C**)	与对或的分配式
11	$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$	**A** 或者(**B** 与 **C**),当且仅当(**A** 或 **B**)与(**A** 或 **C**)	或对与的分配式
12	$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$	非(**A** 与 **B**),当且仅当,非 **A** 或非 **B**	与的反演式
13	$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$	非(**A** 或 **B**),当且仅当,非 **A** 与非 **B**	或的反演式
14	$\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$	**A** 或 **A**,当且仅当,**A**	或的吸收式

从表6.2中所列的相互一一对应的另一类纯真值蕴涵重言式和传统命题逻辑导出式可以看出,从语言上说,它们之间存在着下述对应关系:恒真的↔(即有效的互相蕴涵)对应着表述“互相导出”的“当且仅当”,恒真的→(即有效的蕴涵)对应着表述导出关系的“若,则”。可是,这只不过是语言上的对应而已。从语义上看,它们各自所指谓的客观世界的普遍存在事件的结构截然不同。我们试分析表中序号1之例:互相对应的 $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ 和联言导出式 $\mathbf{A} \wedge \mathrm{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$。前者指谓 $\neg[(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \neg\mathbf{A}]$ 所刻画的事件,这事件是有两个变元的恒真的真值函数,是个由¬、∧组合而成的 $k+3$ 层的纯真值复合事件,同充分条件迥然不同;而后者却指谓由 $\mathbf{A} \wedge \mathrm{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$ 所刻画的 $k+2$ 层的非纯真值的充分条件事件,和真值函数完全不同。这二者也互为同基异构的普遍存在事件。

6.5.3　作为蕴涵怪论的纯真值重言式

事实上,并非任意的纯真值重言式都有与之同基异构的关于传统逻辑中的“若,则”的普遍存在事件相对应。尽管,上述两类纯真值重言式中的蕴涵对于传统逻辑推理式、导出式中的“若,则”来说已经是十分古怪的事,可是,表6.3所列的第三类纯真值重言式中的蕴涵由于没有与之对应的关于“若,则”的同基异构的普遍存在事件,从充分条件关系的角度来看,就显得更加荒诞了。

表6.3　作为蕴涵怪论的纯真值重言式

序　号	纯真值重言式	对其中古怪的蕴涵的说明
1	$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$	真命题为任意命题所蕴涵
2	$\neg\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$	假命题蕴涵任意命题
3	$\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	不可能命题蕴涵任意命题

续表

序　号	纯真值重言式	对其中古怪的蕴涵的说明
4	$\mathbf{B \to A \vee \neg A}$	任何命题蕴涵必然命题
5	$\mathbf{\neg(A \to B) \to (B \to A)}$	任意两个命题,至少有一个命题蕴涵另一个命题
6	$\mathbf{(A \to B) \vee (B \to A)}$	
7	$\mathbf{\neg(A \to B) \to (B \to C)}$	任意三个命题 **A**、**B**、**C**,不是 **A** 蕴涵 **B** 就是 **B** 蕴涵 **C**
8	$\mathbf{(A \to B) \vee (B \to C)}$	
9	$\mathbf{(A \wedge B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)}$	**A** 与 **B** 蕴涵 **C**,蕴涵,(**A** 蕴涵 **C**)或(**B** 蕴涵 **C**)

表6.3中所列纯真值重言式中的蕴涵和普通逻辑思考中表示充分条件关系的“若,则”几乎是毫不相干的。从普通逻辑思考中的“若,则”的角度来考察,上述种种蕴涵是荒诞不经、不可思议的。可是,一些读本却又硬要把这种稀奇古怪的蕴涵读做“若,则”,于是,表中所列的第三类重言式就被称为“蕴涵怪论”(paradoxes of implication)。在表6.3中9个蕴涵怪论的例子中,前8个较为明显,第9个不那么明显。但是,对这个最不明显的怪论也不难举出一系列实例来验证它的“怪”。例如,在物理学中成立下述命题:“若气压为1个大气压并且温度为0℃,则水结冰。”可是,既不成立“若气压为1个大气压,则水结冰”,也不成立“若温度为0℃,则水结冰”。又如,在数学中成立“若 $a \ngtr b$,且 $a \nless b$ 则 $a = b$”,可是,“若 $a \ngtr b$ 则 $a = b$”和“若 $a \nless b$ 则 $a = b$”都不成立。即使是在研究纯真值函数的数理逻辑中使用的“若,则”也不是纯真值的蕴涵,而是传统逻辑中的充分条件。数理逻辑中非常著名的分离规则是:“若 $\vdash \mathbf{A}$,与,$\vdash \mathbf{A \to B}$,则 $\vdash \mathbf{B}$”。可是,数理逻辑既不承认“若 $\vdash \mathbf{A}$,则 $\vdash \mathbf{B}$”,又不承认“若 $\vdash \mathbf{A \to B}$,则 $\vdash \mathbf{B}$”。可见,在数理逻辑的分离规则等元规则中使用的“若,则”也不是纯真值的蕴涵。与之相类似,在数理逻辑的元语言中使用的“当且仅当”也不是纯真值的互相蕴涵。既然如此,数理逻辑怎么能要求别的学科把“若,则”理解为蕴涵呢?

重言式是恒真的真值函数,是对客观世界的重言律的认识和表述。因此,它们是数理逻辑真理,在一定范围内适用。如果偏要强行扩大其适用范围,偏要用蕴涵取代充分条件,那么,在一定范围内适用的真理在不恰当地人为地扩大了的范围内就会变成谬误。不仅取代的目的在事实上不可能达到,而那不自量力的取代者数理逻辑自身反而会因此受到严重的损害。

纯真值有效式(即重言式)有无穷多个,不可能逐一列举。不过,从对上述三类重言式的剖析中已经可以看出:数理逻辑中作为纯真值联结词的蕴涵和传统逻辑中表述充分条件关系的命题联结词“若,则”的语义全然不同;任一重言

式都不是能据以进行不循环论证的传统推理式;正统的数理逻辑命题演算取代不了传统的命题逻辑,也“改造”不了传统的命题逻辑;但是,尽管如此,正统的数理逻辑命题演算却给鉴别传统的命题逻辑推理式、导出式的有效性提供了作为必要条件的简便的数学工具(其相应的真值形式不是重言式者必定不是推导式,然而,其相应的真值形式是重言式者却未必是推导式),并给传统的命题逻辑的充分发展提供有力的可借鉴的数学方法。

第7章　非纯真值复合命题

7.1　基本的非纯真值复合命题——充分条件命题

7.1.1　何谓充分条件命题

充分条件命题就是关于客观世界的充分条件事件的思考。例如,为下面的语句所表达的思考就是一个充分条件命题:

若某人作案,则某人有作案时间。

这个充分条件命题是由充分条件联结词(在此为“若……,则……”所承载)联结两个命题“某人作案”和“某人有作案时间”而构成的。它就是关于客观世界相应的充分条件事件的思考。

充分条件命题的符号表达式为:

$$\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$$

读做“如果**A**,那么**B**”。其中,“⇀”为充分条件号,**A**、**B**为基础命题。**A**称为前件,**B**称为后件。

充分条件命题**A**⇀**B**具有两个独立性:可独立于**A**、**B**的真假确定(第一独立性)不会是**A**真而**B**假;前件**A**为真可独立于后件**B**的真假确定(第二独立性)。两个独立性为逻辑推理从已有知识获取新知识铺平了道路。

在汉语里,表达充分条件假言命题的语句句型有“**A**必然**B**”、“若**A**,则**B**”、“如果**A**,那么**B**”、“**A**是**B**的充分条件”、“只有**B**,才**A**”等。例如:

有国必有防。

若某行为是犯罪行为,则某行为是违法行为。

如果甲发烧,那么甲生病。

某人作案是某人有作案时间的充分条件。

7.1.2　充分条件命题前后件真假关系的特征

充分条件命题为真,当且仅当,具有一独的不会是前件真而后件假。即,不管**A**、**B**是否为真,亦不管**A**、**B**是否为假,**A**真必定**B**真,绝不会出现**A**真而**B**假的情况。当出现下述情况之一时,充分条件命题**A**⇀**B**为假:①**A**真但**B**假;

②**A** 真 **B** 可以假；③必须依据 **A**、**B** 本身的真假，才能确定不是 **A** 真而 **B** 假。例如，下列语句表达的充分条件命题皆为假：

强国必定有核武器。

若 $2+2=5$，则李白是军事家。

若华罗庚是数学家，则他是诺贝尔奖获得者。

总之，对于具有一独的确实为真的充分条件命题来说：

- **A** 真，必然 **B** 真；
- **A** 假，**B** 未必假也未必真；
- **B** 假，必然 **A** 假；
- **B** 真，**A** 未必真也未必假。

充分条件关系是极其重要的逻辑关系。充分条件命题是基本的非纯真值复合命题，在它的基础上，我们将逐一分析导出的非纯真值复合命题。

7.2 导出的非纯真值复合命题（1）——必要条件命题、充分必要条件命题

7.2.1 必要条件命题

1. 何谓必要条件命题

必要条件命题就是关于必要条件事件的思考。例如，为下列语句所表达的思考就是必要条件命题。

只有熟练掌握以电子信息技术为核心的军事高技术，才能在现代战争中立于不败之地。

这个语句所表达的必要条件命题就是由必要条件联结词（在此为“只有……，才……”所承载）联结两个命题“熟练掌握以电子信息技术为核心的军事高技术”和“能在现代战争中立于不败之地”而构成的。它就是关于客观世界相应的必要条件事件的思考。

必要条件命题的符号表达式为：

$$\mathbf{A} \leftharpoondown \mathbf{B}$$

读做“只有 **A**，才 **B**”，或者“**A** 是 **B** 的必要条件”。其中必要条件号“$\leftharpoondown$”可由充分条件号“$\rightharpoonup$”导出。$\mathbf{A} \leftharpoondown \mathbf{B}$ 可被定义为 $\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$。即：

$$\mathbf{A} \leftharpoondown \mathbf{B} =\mathrm{df} \quad \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}。$$

必要条件命题 $\mathbf{A} \leftharpoondown \mathbf{B}$ 也具有两个独立性：可独立于 **A**、**B** 的真假确定（第一

独立性）不会是**A**假而**B**真；前件**A**为假可独立于后件**B**的真假确定（第二独立性）。

在汉语里，表达必要条件命题的句型有"只有**A**，才**B**"、"没有**A**就没有**B**"、"除非**A**，否则不**B**"等，例如：

只有运用电子计算机，才能进行信息化战争。

只有在相互信任和共同利益联系的基础上，通过对话与合作，才能营造真正的和平。

除非有军事才能，否则不能成为军事家。

有量的积累，才有质的飞跃。

2. 必要条件命题前后件真假关系的特征

必要条件命题为真，当且仅当，具有一独的不会是前件假而后件真。即不管**A**、**B**是否为真，亦不管**A**、**B**是否为假，**A**假必定**B**假，绝不会出现**A**假而**B**真的情况。当出现下列情况之一时，必要条件命题**A**←**B**为假：①**A**假但**B**真；②**A**假**B**可以真；③必须依据**A**、**B**本身的真假才能确定不是**A**假而**B**真。例如，下列语句表达的必要条件命题皆为假：

只有侦查卫星才是军事卫星。

只有军人才能保家卫国。

$2+2=5$是中国是小国的必要条件。

总之，对于具有一独的确实为真的必要条件命题来说：

- **A**假，必然**B**假；
- **A**真，**B**未必真也未必假；
- **B**真，必然**A**真；
- **B**假，**A**未必假也未必真。

7.2.2　充分必要条件命题

1. 何谓充分必要条件命题

充分必要条件命题就是关于充分必要条件事件的思考。例如，为下列语句所表达的思考就是充分必要条件命题：

x大于y当且仅当y小于x

这个语句所表达的命题是由充分必要条件联结词（在此为"当且仅当"所承载）联结两个命题"x大于y"和"y小于x"而构成的。它就是关于客观世界相应的充分必要条件事件的思考。

充分必要条件命题的符号表达式为：

$$\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B}$$

读做“**A**、**B** 互为充分必要条件”或者“**A** 当且仅当 **B**”。其中，充分必要条件号“$\rightleftharpoons$”可由充分条件号“$\rightharpoonup$”和合取词号“$\wedge$”导出，$\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B}$ 可被定义为($\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)$\wedge$($\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$)。即：

$$\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B} = \mathrm{df}(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A})$$

充分必要条件命题 $\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B}$ 也具有两个独立性：可独立于 **A**、**B** 的真假确定（第一独立性）不会是 **A**、**B** 不同真假；前件 **A** 的真假可独立于后件 **B** 的真假确定，后件 **B** 的真假可独立于前件 **A** 的真假确定（第二独立性）。

在汉语里，可表达充分必要条件命题的句型有“**A** 与 **B** 互为充分条件”、“**A** 与 **B** 等价”、“**A** 与 **B** 必定同真假”、“**A** 当且仅当 **B**”、“**A**，只有 **A**，才 **B**”等。例如：

三角形等角与三角形等边互为充分条件。

前件是后件的充分条件与后件是前件的充分条件等价。

某人是单身汉与某人是成年无偶的男子必定同真假。

x 为负数，当且仅当，x 小于零。

2. 充分必要条件命题前后件真假关系的特征

充分必要条件命题为真，当且仅当，具有一独的 **A**、**B** 同真假，即，不管 **A**、**B** 是否为真，亦不管 **A**、**B** 是否为假，**A** 真必定 **B** 真，**A** 假必定 **B** 假。若 $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$、$\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$ 中至少有一个为假，则 $\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B}$ 为假。例如，下列语句所表达的充分必要条件命题皆为假：

某人是军人当且仅当某人读过某军事院校。

甲是军人，当且仅当甲懂得所有的军事操作。

甲是乙的哥哥，当且仅当乙不是甲的哥哥。

总之，对于具有一个独的确实为真的充分必要条件命题来说：

- **A** 真，必然 **B** 真；
- **A** 假，必然 **B** 假；
- **B** 真，必然 **A** 真；
- **B** 假，必然 **A** 假。

7.3 导出的非纯真值复合命题（2）——尽举选择命题、约合命题

7.3.1 尽举选择命题

尽举选择命题也是非纯真值复合命题，它是关于客观世界尽举选择事件的

思考。它包括尽举相容选择命题、尽举反相容选择命题和尽举不相容选择命题。

1．尽举相容选择命题

尽举相容选择命题就是关于客观世界的尽举相容选择事件的思考。下面语句所指谓的事件就是一个尽举相容选择事件，所表达的思考就是尽举相容选择命题：

胜者不是因其强就是因其指挥无误。

这个尽举相容选择命题是由尽举相容选择联结词（在此为“不是……，就是……”所承载）联结两个命题“因其强”和“因其指挥无误”而构成的。它就是关于客观世界相应的尽举相容选择事件的思考。

尽举相容选择命题的符号表达式为：

$$\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$$

读做“不是 **A** 就是 **B**”或者“**A** 尽举相容选择 **B**”，还可简化地读做“**A** 尽举相容 **B**”。**A**、**B** 分别称为尽举相容选择命题的左、右选言肢。“$\upharpoonright$”称为尽举相容选择号，它可由否定号“$\neg$”和充分条件号“$\rightharpoonup$”导出。$\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$ 可被定义为 $\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$。即：

$$\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B} =\mathrm{df}\ \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$$

根据上述定义，显然，尽举相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$ 也具有两个独立性。

尽举相容选择命题为真，当且仅当，具有一独的不会是 **A**、**B** 同假。即可在既不需确定 **A** 真又不需确定 **B** 真的情况下确定 **A**、**B** 不同假。显然，**A**、**B** 可以同真。当出现下述情况之一时，尽举相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$ 为假：①**A**、**B** 同假；②当 **A** 假时，**B** 可以假；③必须依据 **A** 真或 **B** 真才能确定不是 **A**、**B** 同假。例如，下列语句所表达的尽举相容选择命题皆为假：

在贵州人武学院工作的人，不是教师就是学生。

航天技术不是用来侵略别国，就是用来危害本国人民的社会生活。

不是 $2+2=4$，就是中国是个大国。

总之，对于具有一独的确实为真的尽举相容选择命题来说：

- **A** 假，必然 **B** 真；
- **A** 真，**B** 未必真也未必假；
- **B** 假，必然 **A** 真；
- **B** 真，**A** 未必真也未必假。

在汉语里，可表达尽举相容选择命题的语句句型有“若不 **A**，则 **B**”、“除非 **A**，不然 **B**”、“**A** 或者 **B**”、“如果不 **A**，就 **B**”等。例如：

某军夺下一个堡垒，不是强攻就是智取。

一个成绩拔尖的学生不是具有过人的聪明才智，就是具有勤奋刻苦的

精神。

这份军事统计表格的错误,或者因为材料不可靠,或者计算有错误。

生产成本没有降低或者是由于没有节约原材料,或者是由于没有提高劳动生产率。

2. 尽举反相容选择命题

尽举反相容选择命题就是关于客观世界的尽举反相容选择事件的思考。下列语句所指谓的事件就是一个尽举反相容选择事件,所表达的思考就是尽举反相容选择命题。

或者武松打死老虎,或者老虎吃掉武松,二者不可兼得。

这个尽举反相容选择命题是由尽举反相容选择词(在此为“或者……,或者……,二者不可兼得”所承载)联结两个命题“武松打死老虎”和“老虎吃掉武松”而构成的,它就是关于客观世界相应的尽举反相容选择事件的思考。

尽举反相容选择命题的符号表达式为:

$$\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$$

读做“**A** 或者 **B**,二者不可兼得”、“若 **A** 则不 **B**”或者“**A** 尽举反相容选择 **B**”,还可简化地读做“**A** 尽举反相容 **B**”。**A**、**B** 分别是尽举反相容选择命题的左、右选择肢。“$\upharpoonleft$”称为“尽举反相容选择号”,它可由否定号“$\neg$”和充分条件号“$\rightharpoonup$”导出。$\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 可被定义为 $\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$。即:

$$\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} =\mathrm{df}\ \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$$

当然,尽举反相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 也具有两个独立性。

尽举反相容选择命题为真,当且仅当,具有一独的不会是 **A**、**B** 同真。显然,**A**、**B** 可以同假。当出现下列情况之一时,尽举反相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 为假:①**A**、**B** 同真;②当 **A** 真时,**B** 可以真;③必须依据 **A**、**B** 的真假才能确定不会是 **A**、**B** 同真。例如,下列语句所表达的尽举反相容选择命题皆为假:

和平与发展不可兼得。

一篇军事文章或者有军事价值,或者有资料价值,二者不可兼得。

或者 $2+2=5$,或者中国是个小国,二者不可兼得。

总之,对于具有一独的确实为真的尽举反相容选择命题来说:

- **A** 真,必然 **B** 假;
- **A** 假,**B** 未必假也未必真;
- **B** 真,必然 **A** 假;
- **B** 假,**A** 未必假也未必真。

在汉语里,可表达尽举反相容选择命题的语句句型有“**A** 或者 **B**,二者不可兼得”、“要么 **A** 要么 **B**”“有 **A** 就不会有 **B**”、“**A** 与 **B** 不可同时存在”等。例如:

二人对弈,或者甲胜乙,或者乙胜甲,二者不可兼得。

要么武松打死老虎,要么老虎吃掉武松。

明天不是星期四就是星期五,二者不可兼得。

日食和月食不会同时出现。

3. 尽举不相容选择命题

尽举不相容选择命题就是关于客观世界的尽举不相容选择事件的思考。下面语句所指谓的事件就是一个尽举不相容选择事件,所表达的思考就是尽举不相容选择命题:

要么实行正确的政策,要么实行错误的政策。

这个尽举不相容选择命题就是由尽举不相容选择词(在此为"要么……,要么……"所承载)联结两个命题"实行正确的政策"和"实行错误的政策"而构成的。它就是关于相应的客观世界的尽举不相容选择事件的思考。

尽举不相容选择命题的符号表达式为:

$$\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$$

读做"要么 **A** 要么 **B**"或者"**A** 尽举不相容选择 **B**",还可简化地读做"**A** 尽举不相容 **B**"。**A**、**B** 分别称为尽举不相容选择命题的左、右选言肢。"↑"称为不相容选择号。它可由否定号"¬"和充分条件号"⇀"导出。**A**↑**B** 可被定义为($\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$)∧($\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)。即:

$$\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B} = \mathrm{df}(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B});$$

并可被定义为 $\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \mathbf{B}$。即:

$$\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B} = \mathrm{df}\ \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \mathbf{B}$$

显然,尽举不相容选择命题 **A**↑**B** 也具有两个独立性。

尽举不相容选言命题为真,当且仅当具有一独的不会是 **A**、**B** 同真假。亦即,可在既不需要确定 **A** 的真假,又不需确定 **B** 的真假的情况下确定 **A**、**B** 不同真假。当出现下列情况之一时,尽举不相容选择命题 **A**↑**B** 为假:①**A**、**B** 同真假;②**A**、**B** 可以同真假;③必须依据 **A**、**B** 的真假才能确定不是 **A**、**B** 同真假。例如,下列语句表达的尽举不相容选择命题皆为假:

中国要么是非洲国家,要么是欧洲国家。

甲要么是炮兵,要么是通信兵。

要么2+2=4,要么雪是黑的。

总之,对于具有一独的确实为真的尽举不相容选择命题来说:

- **A** 真,必然 **B** 假;
- **A** 假,必然 **B** 真;
- **B** 真,必然 **A** 假;

- **B** 假,必然 **A** 真。

在汉语里,可表达尽举不相容选择命题的语句句型有:“要么 **A**,要么 **B**”、“**A**、**B** 不同真假”、“不 **A** 就 **B**,**A** 就不 **B**”等。例如:

贵州人民武装学院的南大门此刻要么开着,要么关着。

逆水行舟,不进则退。

对待前进道路上的困难,或者战而胜之,或者被困难吓倒。

要么“吾矛能陷吾盾”,要么“吾矛不能陷吾盾”。

7.3.2 约合命题

约合命题就是关于客观世界的约合事件的思考。例如,为下面的语句所表达的思考便是一个约合命题:

下雨可以出太阳。

这个约合命题是由约合词(在此为“可以”所承载)联结两个命题“下雨”和“出太阳”而构成的。它就是关于客观世界的约合事件“下雨可以出太阳”的思考。

约合命题的符号表达式为:

$$\mathbf{A} ! \mathbf{B}$$

读做“**A** 约合 **B**”或“**A** 可以 **B**”。“!”为约合号,它由否定号“$\neg$”和充分条件号“$\rightharpoonup$”导出。**A**! **B** 被定义为$\neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B})$。即:

$$\mathbf{A} ! \mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B})$$

约合命题 **A**! **B** 为真,当且仅当,并非具有一独的不会是有 **A** 而无非 **B**。这就是说,**A**! **B** 为真,当且仅当,“若 **A** 则非 **B**”为假。约合命题 **A**! **B** 为假,当且仅当,假言命题“若 **A** 则非 **B**”为真。例如,下列语句所表达的约合命题便是假的:

虽然战士甲比战士乙高,战士乙也可以比战士甲高。

并非若地球绕太阳转则太阳不绕地球转。

人死可以复生。

在汉语中,可表达约合命题的语句句型有“**A** 可以 **B**”、“并非‘**A** 必不 **B**’”、“**A** 未必不 **B**”、“**A** 仍然可以 **B**”、“可能既 **A** 又 **B**”等。例如:

并非好人必不长寿。

今天下雨未必明天不下雨。

弱国仍然可以打败强国。

提请注意,与纯真值复合命题相反,非纯真值复合命题的真值不是其支命题的真值的真值函数。即,非纯真值复合命题的真值不取决于其支命题的真值。这是非纯真值复合命题最根本的特征。

7.4　外延命题和内涵命题

当代形式逻辑将复合命题区分为外延命题和内涵命题。

7.4.1　外延命题

设集 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_m\}$,其中,$m$ 为大于0的确定的自然数,并且,从 e_1 到 e_m 可逐一列举。若命题 **A** 所思考的是集 S 中的个体全都具有属性 p 或至少有一个体具有属性 p,则称 **A** 为外延命题。外延命题包括外延合取命题和外延析取命题两种。

外延合取命题就是关于集 S 中可逐一列举的个体全都具有属性 p 的思考。例如,下列语句所表达的命题皆为外延合取命题。

(1) 贵州人武学院2007级一区队的学生都是南方人。

(2) 鲁迅的所有小说都不超过三万字。

例(1)所思考的是集(贵州人武学院2007级一区队的学生)中的每一个都具有南方人的属性。或者说,例(1)思考的该区队学员的第一位是南方人、第二位是南方人、……、第 m 位是南方人的合取。例(2)思考的是集(鲁迅的小说)中的每一篇都具有不超过三万字的属性。也就是说,例(2)思考的是鲁迅的小说中第一篇不超过三万字、第二篇不超过三万字、……、第 m 篇不超过三万字的合取。

外延合取命题的逻辑表达式为:

$$\mathrm{p}(\mathrm{e}_1)\wedge\mathrm{p}(\mathrm{e}_2)\wedge\cdots\wedge\mathrm{p}(\mathrm{e}_i)\wedge\cdots\wedge\mathrm{p}(\mathrm{e}_m)$$

读做“e_1 是p,并且,e_2 是p,并且,……,并且,e_i 是P,并且,……,并且,e_m 是p”。

外延析取命题就是关于集 S 的可逐一列举的个体至少有一个具有属性 p 的思考。例如,下列语句所表达的便是外延析取命题:

(1) 这本军事刊物上有的作品是短篇小说。

(2) 在座有人不会操作传感器。

这里(1)所思考的是集(这本军事刊物上的作品)中至少有一篇具有短篇小说的属性。换言之,(1)所思考的是这本军事刊物上的作品第一篇是短篇小说、第二篇是短篇小说、……第 m 篇是短篇小说的析取。(2)所思考的是集(在座的人)中至少有一个具有不会操作传感器的属性,即,(2)所思考的是在座的人中第一个不会操作传感器、第二个不会操作传感器、……、第 m 个不会操作传感器的析取。

外延析取命题的逻辑表达式如下:

$$\mathrm{p}(\mathrm{e}_1)\vee\mathrm{p}(\mathrm{e}_2)\vee\cdots\vee\mathrm{p}(\mathrm{e}_i)\vee\cdots\vee\mathrm{p}(\mathrm{e}_m)$$

读做"e_1是 p,或者,e_2是 p,或者,……,或者,e_i是 p,或者,……,或者,e_m是 p"。

我们知道,要确定合取命题为真,只有逐一确定每一个合取肢为真;要确定析取命题为假,必须逐一确定每一个析取肢为假。因此,外延命题只能是对其个体可逐一列举的有限集的思考。对其个体不能逐一列举的有限集或无限集或空集的思考的命题不是外延命题,而是内涵命题。

7.4.2 内涵命题

设 S 为其元不可逐一列举的有限集、无限集或空集。若命题 **A** 思考的是集 S 中的个体具有属性 p 必定具有属性 q 或具有属性 p 未必不具有属性 q,则称 **A** 为内涵命题。内涵命题包括内涵充分条件命题和内涵约合命题两种。

内涵充分条件命题就是关于不可逐一列举的有限集、无限集或空集 S 中的个体具有属性 p 必定具有属性 q 的思考。例如,下列语句表达的命题皆为内涵充分条件命题。

(1) 植物都有生命。

(2) 杀人犯都是罪犯。

(3) 哥德巴赫猜想的解决者是数学家。

例(1)所思考的是集(物体)中的个体具有植物的属性必定具有有生命的属性。例(2)所思考的是集(人)中的个体具有杀人犯的属性必定具有罪犯的属性。例(3)所思考的是集(哥德巴赫猜想的解决者)中的个体若具有解决了哥德巴赫猜想的属性则必定具有数学家的属性。或者说,例(1)所思考的是某物体是植物则必定有生命,例(2)所思考的是某人是杀人犯则必定是罪犯。例(3)所思考的是:x 是哥德巴赫猜想的解决者则必定 x 是数学家。

内涵充分条件命题的逻辑表达式为:

$$p(x) \rightharpoonup q(x)$$

读做"若 x 是 p,则 x 是 q"。

内涵约合命题就是关于不可逐一列举的有限集、无限集或空集 S 的个体具有属性 p 未必不具有属性 q 的思考。例如,下列语句表达的命题便是内涵约合命题。

(1) 哥德巴赫猜想的解决者可以是中国人。

(2) 乌鸦可以是白色的。

例(1)所思考的是集(哥德巴赫猜想的解决者)中的个体具有解决哥德巴赫猜想的属性未必不具有中国人的属性,例(2)所思考的集(鸟)中的个体具有乌鸦的属性未必不具有羽毛白色的属性。

内涵约合命题的逻辑表达式如下:

$$p(x)!\ q(x)$$

读做"x 是 p 约合 x 是 q"。

内涵命题是对其个体不能逐一列举的有限集、无限集或空集中的个体具有属性 p 必定具有属性 q 或者具有属性 p 未必不具有属性 q 的思考。因此,内涵命题的真假是不可能通过外延的逐一列举来确定的,只能通过对内涵的科学分析才能确定。这一点也正是内涵命题与外延命题的根本区别。

7.5　复合命题的自然语言载体

复合命题作为对客观事件的思考,离不开一定的物质载体。复合命题的人工语言载体是其符号表达式,其结构与复合命题所思考的事件的逻辑结构具有一一对应的关系。复合命题的自然语言载体是语句,而语句的句型结构与复合命题所思考的事件的逻辑结构却不具有一一对应的关系。不仅不同的语句句型可以表达同一类复合命题,而且,相同的语句句型也可以表达不同类的复合命题。下面,我们通过实例说明这种关系。

下列语句皆表达充分条件假言命题。

(1) 如果张三是杀人犯,那么张三是罪犯。

(2) 当人得肺炎时,便要发烧。

(3) 金属必然导电。

(4) 作案定有作案时间。

(5) 哪里有压迫,哪里就有反抗。

(6) 甲是党委书记不可能不是党员。

(7) 既然铜是金属,铜就是导体。

(8) 有春夏秋冬,就有花开花落。

(9) 栽什么树苗结什么果。

(10) 人皆有死。

(11) 月晕而风。

下列语句皆表达合取命题。

(1) 毛泽东是军事家,并且是思想家。

(2) 小红又高又漂亮。

(3) 鲁迅既是文学家又是革命家。

(4) 老张和老赵都是军事教官。

(5) 有的人为活着而吃饭,有的人为吃饭而活着。

(6) 中国是社会主义国家,也是第三世界国家。

(7) 边说话边做事。

（8）学员王琼认识教官老洪，而教官老洪不认识学员王琼。

（9）他白而胖。

（10）有说有笑。

下列语句皆表达必要条件假言命题。

（1）只有通过电子对抗的实施夺取电磁优势进而掌握信息优势，才能达成信息战的目的。

（2）只有降温到零界温度，才能使气体液化。

（3）除非有军事才能，否则不能成为军事家。

（4）必须努力，才能攀登到顶峰。

（5）学习先进，才能赶超先进。

（6）有量的积累，才有质的飞跃。

（7）氧气是燃烧的必要条件。

（8）只有诚实谦逊、坚韧不拔，才能真正学到系统的知识。

上述实例充分说明，不同句型的语句可以表达同一类复合命题。如“如果张三是杀人犯，那么张三是罪犯”和“人皆有死”，其句型很不相同，但都表达充分条件假言命题。又如“毛泽东是军事家，并且是思想家”与“有说有笑”，其句型差异也很大，然而都表达了合取命题。“除非有军事才能，否则不能成为军事家”和“有量的积累，才有质的飞跃”，表面上句型差别很大，却都表达了必要条件假言命题。通过上述实例我们还可以看出，句型相同的语句亦可表达不同类的复合命题。如“月晕而风”和“他白而胖”，其句型完全相同，但前者表达充分条件假言命题，后者却表达合取命题。

鉴于复合命题与其自然语言载体之间存在上述复杂关系，因此，想通过语句句型来确定语句所表达的复合命题类型，显然是办不到的。事实上，当一个语句表达复合命题时，它究竟表达什么样的复合命题，不取决于语句本身，而取决于语句在其语境中所指谓的客观事件究竟是什么事件。因此，要确定一个语句表达何种复合命题，只有结合语境确定该语句所指谓的复合事件才能办到。关于这方面的研究就叫“当代形式逻辑语用学”。

7.6　关于命题与判断的讨论

判断是关于事件存在的断定。与命题一样，判断也按被断定的事件实际上是否存在而分为真假。判断可以认为就是对命题的断定，而命题可以认为是尚未断定的还处在考虑中的将来也许能成为判断的前身。命题只是考虑中的，而判断则是断定了的。可以有未断定的考虑，但是，不可能有未考虑的断定。已经考虑过的未必被断定，而已经断定了的则必定曾经考虑过。因此，从形成的先后

顺序来说,判断可以与命题同时产生也可以晚于命题产生,但不会先于命题出现。“这只苹果能吃”对原始人来说,判断和命题可能是同时产生的,因为,苹果本来就是猿猴的食物。然而,“这只螃蟹能吃”对人类远古的祖先来说,就是先有命题,然后才断定的。而伴随这个命题的断定则是一番勇敢的尝试:剥开长相吓人的螃蟹来闻闻,挺香;拿下一块蟹肉尝尝,很鲜;吃下去再说,结果十分养人。鲁迅在盛赞第一批试吃螃蟹的人类祖先的勇气的同时,还揣想曾经也有人考虑过“这只蜘蛛能吃”这个命题,又经过一番勇敢的尝试,证实了这个命题并不符合实际,因而为假。于是,这个命题本身未被断定,而被断定了的却是它的否定“这只蜘蛛不能吃。”

在普通的逻辑思考实际中,那种“只是考虑并未断定”的事情是大量存在的:医生在诊查病情的过程中起初只是考虑各种可能的病因;司法人员对被审讯的供词也往往是“听而不信”;即使是顾客在商店里挑选货物这种日常小事,人们通常也须经过一段“谋而不断”的考虑过程;至于科学史上的种种猜想、假设,那更是“只考虑,不断定”。譬如,数学中的著名的“四色问题”——“如果要求地图的相邻区域着色不同,那么,至多用四种颜色就足够了。”在美国数学家阿佩尔等于1976年用计算机做出证明以前,就是个未断定的命题;而更加著名的“哥德巴赫猜想”——“任意大于4的偶数必定是两个奇素数之和。”自从200年前提出来后,迄今还是个有待断定的命题。只要那些作为关于某个事件的思考的命题始终未断定,那就只有命题而无相应的判断。“哥德巴赫的猜想”就是一个这种没有相应判断的命题,等待着有志者前去断定。

显然,命题发展为判断与命题真实性是两回事,尽管,对命题的断定需要有一定的根据,而且,这种根据的获得往往并不是轻而易举的。如果说,考虑中的命题对人们的实践来说还只是一种尚有待于进一步分析、考核的初步的信息,伴随着这种初步信息的获得有时也会做出一些试探性的行动;那么,经过一番试探,获得了一定的根据后,一经断定而成为判断,做出判断的人对它的真实性就会具有信心,信息就往往转变成需要坚定地执行的指令,伴随着的将是果断的行动:医生采取重大的医疗措施;法官对罪犯进行判决;顾客付款购买货物;数学家将已获证明的定理纳入数学体系;等等。然而,尽管如此,那种对命题做出断定的根据有时未必充分、属实,因此,断定了的判断仍然会不符实际,判断仍然可能是虚假的:医生可能误诊;法官有时错判;顾客也会买来不合用的商品;而数学家以为已经“证明”了的“定理”其实并不正确。在这里,检验判断的真理性的标准归根结底要靠社会实践。

除了上面所说的理由外,必须严格区分考虑中的命题与断定了的判断,对于逻辑科学来说,还有更加重要的理由。那就是,一系列复合判断的组成部分往往只能是命题,而不能是判断。也就是说,一系列复合判断只能由命题组成,不能

由判断组成。就拿“充分条件判断”来说,它的前、后件就仅仅是命题,而并非判断。断定了“如果 q,那么 p”的人,只是考虑而不曾断定 p、q。譬如,断定了“如果语言能创造财富,那么夸夸其谈者就成为富翁了。”的人虽然断定了整个条件关系;然而,他是不会去分别地断定它的前件“语言能创造财富”,和它的后件“夸夸其谈者成为富翁”的。此时,断定了的是:考虑着的前、后件之间具有充分条件关系;而不是:断定了的前、后件之间具有充分条件关系。再拿“尽举选择判断”来说,它的选择支也仅仅是命题,而并不是判断。断定了“p,或者,q”的人,只是考虑而不曾断定 p、q。譬如,断定了“我今天动身,或者,明天动身”的人,通常是不曾断定这两个选择支“我今天动身”、“我明天动身”中的任意一个的,至少不会同时断定两个。这时,断定了的是:从考虑着的选择支中选取一个。因此,尽举相容的选择判断是:考虑两个断定至少选取其中一个;而尽举不相容的选择判断则是:考虑两个,断定只选取其中一个;尽举反相容的选择判断则是:考虑两个,断定至少不选取其中一个。这就是说,至少复合判断中的充分条件判断的前、后件,尽举选择判断的选择支只是考虑中的命题,并非断定了的判断(当然,也可以有考虑中的复合命题,如充分条件命题、选择命题等)。因此,作为逻辑科学,倘若只讲判断,不讲命题,那就会产生严重的问题:不是回答不了充分条件判断的前、后件、尽举选择判断的选择支究竟是什么,就是把它们强行当做判断。这二者都是不可以的。

十分奇怪的是,现行的一些形式逻辑读本又开始对判断津津乐道起来,对命题却默默无言。在这些读本里,从头到尾是断定了的判断,只字不提考虑着的命题。这样一来,对这些读本来说,像“哥德巴赫猜想”这一类科学设想就只能一厢情愿地纳入判断的行列,虽然从来不曾有人断定过它们;而像“充分条件判断”的前、后件,“尽举选择判断”的选择支,也只得硬着头皮称它们为“前件判断”、“后件判断”和“支判断”,尽管只有唯心论者才会对它们进行断定。因此,形式逻辑作为一门科学,倘若依旧只论判断不提命题,无论从普通的逻辑思考实际还是从逻辑科学理论上来看,都是行不通的。要是在逻辑科学内不讲判断只讲命题,那至少在理论上是可行的。

第 8 章　逻 辑 定 理

8.1　逻辑定理概述

逻辑定理是关于客观世界逻辑规律的思考。鉴于此,从一个逻辑系统的逻辑定理的数量、规格,以及得出逻辑定理的方法,就可以鉴别一个逻辑系统的水平。

根据逻辑规律的种类,作为对逻辑规律的思考的逻辑定理可做相应的分类。逻辑规律可分为逻辑定律和逻辑法则,相应地,作为关于逻辑规律思考的逻辑定理可二分为逻辑有效命题和逻辑规则。在本书中,我们对逻辑定理做如图 8.1 所示的分类。

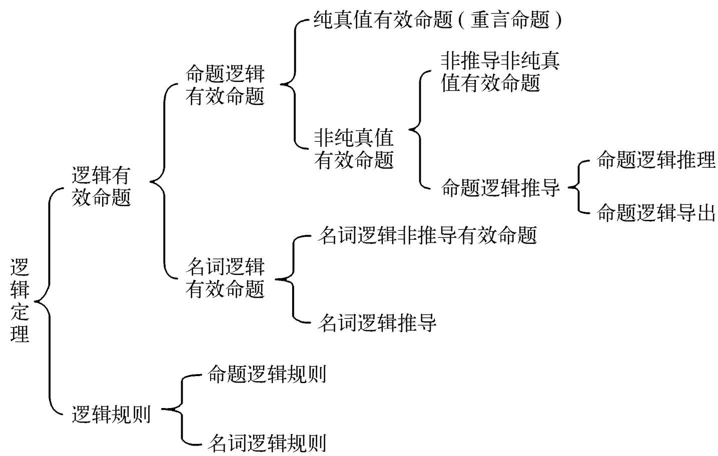


图 8.1　逻辑定理分类

在本章,我们将讨论一系列为传统形式逻辑所无力问津的定理。我们所讨论和介绍的,仍不过是当代形式逻辑定理的沧海一粟,而此外的浩如烟海的逻辑定理,也都可以用当代形式逻辑的语构学将其一网打尽。当代形式逻辑正是一座拥有无数逻辑定理的宏伟宝殿。我们将在本书的第 11 章到第 20 章看到这座宏伟宝殿。

8.1.1　命题逻辑和名词逻辑

1. 命题逻辑

命题逻辑是关于以基础事件为最小单位的纯真值逻辑定律和非纯真值事件逻辑定律及事件逻辑法则等客观世界的事件逻辑规律的思考。事件逻辑规律是

不同于项、事件的一类客观存在。命题逻辑规律则是研究这类客观存在得出的理论结果。命题逻辑主要特点在于:它在通过基础命题去研究客观世界的事件逻辑规律时,无须对基础命题的内部结构和组成因素进行分析、研究,而是以基础命题为最小单位。

所谓基础命题,是关于基础事件的思考。鉴于基础事件在思考时不分析其内部逻辑结构,因而,基础命题是不分析其思考对象内部逻辑结构的命题。如基础命题 $\mathbf{A}$,可以是 p(e)这种原子命题,也可以是 $\mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}$ 这样的复合命题。$\mathbf{A}$ 本身可能是很复杂的命题,只是在思考时,把那些很复杂的事件当做一个整体,而不分析其内部结构。

关于客观世界纯真值的事件逻辑定律的思考,在命题逻辑里称为纯真值有效命题。其形式化表达式称为重言式(重言式是一类有效式),是纯真值有效命题的式,如 $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$、$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B}$ 等。关于客观世界非纯真值的事件逻辑定律的思考,在命题逻辑里称为非纯真值有效命题。其形式化表达式称为命题逻辑含充分条件式,如 $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \rightharpoondown \mathbf{B}) \rightharpoondown \mathbf{B}$。所谓命题逻辑规则,是关于事件逻辑法则的思考。如从有效式 $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A} \rightharpoondown \neg (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{A})$,就可得出有效式 $\neg (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{A})$。这里所运用的命题逻辑规则是“分离规则”,它是关于客观世界的事件逻辑法则——“分离法则”的思考。

2. 名词逻辑

名词逻辑是关于项逻辑定律及项逻辑法则等客观世界的项逻辑规律的思考。与事件逻辑规律一样,项逻辑规律也是不同于项、事件的一类客观存在。名词逻辑就是研究这类客观存在得出的理论结果。名词逻辑的主要特点在于:它在研究客观世界的项逻辑规律时,要深入到命题的内部结构去,把原子命题分析到 n 元名词和项词。

关于客观的项逻辑定律的思考,在名词逻辑里称为名词逻辑有效命题,其形式化表达式称为名词逻辑有效式,如 $s(e) \wedge [s(x) \rightharpoondown p(x)] \rightharpoondown p(e)$。名词逻辑规则则揭举一些名词逻辑有效式和一个名词逻辑有效式之间的充分条件关系,是逻辑科学关于客观的项逻辑法则的思考。

3. 关于命题逻辑和名词逻辑的规则

命题逻辑规则和名词逻辑规则统称为逻辑规则,并且简称为规则。若以 $\mathbf{\Gamma}$、$\mathbf{A}$ 分别表示一些和一个有效式,以 $\vdash$ 表示“可从……得出……”,则 $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}$ 表示规则,读做“可从 $\mathbf{\Gamma}$ 得出 $\mathbf{A}$”。这里,$\vdash$ 是$\rightharpoondown$(若……,则……)的特殊情况,因为 $\vdash$ 的前后件是关于有效式的,而 $\rightharpoondown$ 的前后件不一定是有效式,可以是任意的式。如从 $\mathbf{C} \vee \neg \mathbf{C}$ 与 $\mathbf{C} \vee \neg \mathbf{C} \rightharpoondown \neg (\neg \mathbf{C} \wedge \mathbf{C})$ 得出 $\neg (\neg \mathbf{C} \wedge \mathbf{C})$,$\mathbf{\Gamma}$ 就是 $\mathbf{C}$

$\vee\neg\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{C}\vee\neg\mathbf{C}\rightarrow\neg(\neg\mathbf{C}\wedge\mathbf{C})$,$\mathbf{A}$ 就是$\neg(\neg\mathbf{C}\wedge\mathbf{C})$,这里的前件 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和后件 $\mathbf{A}$ 都是有效式。由于 $\vdash\!\!-$ 是$\rightarrow$的特殊情况,因此,当成立 $\mathbf{A}\vdash\!\!-\mathbf{B}$ 时,未必成立 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$。成立$(\mathbf{A}_1\rightarrow\mathbf{B}_1)\vdash\!\!-(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}_1)\wedge(\mathbf{A}_1\rightarrow\mathbf{B}_1)$时,就不成立$(\mathbf{A}_1\rightarrow\mathbf{B}_1)\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}_1)\wedge(\mathbf{A}_1\rightarrow\mathbf{B}_1)$,之所以如此,这是由于不成立$(\mathbf{A}_1\rightarrow\mathbf{B}_1)\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}_1)$。

$\boldsymbol{\Gamma}\vdash\!\!-\mathbf{A}$ 是规则,当且仅当,为 $\boldsymbol{\Gamma}$、$\mathbf{A}$ 所思考的关于一些、一个普有事件之间的充分条件关系确实存在。这里所说的规则不是人为的约定,不是可以违反的规范,而是逻辑科学所刻画的关于客观世界的不以人的意志为转移的铁的逻辑法则——一种特殊的逻辑规律。当某个陈述不是某条规则的引用时,我们只能说“这个陈述不是规则”,而不能说“这个陈述是犯了违反某条规则的逻辑错误”,因为,“违反某条逻辑规则”这样的“逻辑错误”是不可能存在的。规则是不可能“违反”的,可以“违反”的就不可能是什么规则。提醒注意,逻辑规则是关于客观世界逻辑法则的思考,而逻辑法则是客观世界的逻辑规律;逻辑规律是规律,规律是不以人的意志为转移的;因此,规则是不可能“违反”的。这是辩证唯物论的常识。

对于向人们提供从已知进入未知的工具的逻辑科学来说,按能否得出新知,可将有效充分条件命题二分为推理和导出两类。推理和导出统称推导。

在 $\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 中,若可独立于 $\mathbf{B}$ 为真确定 $\mathbf{A}$ 为真,则称 $\mathbf{B}$ 对 $\mathbf{A}$ 来说是新知。

8.1.2　推理和推理式

若 $\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$,且从逻辑内容上说可在未确定 $\mathbf{B}$ 为真的情况下确定 $\mathbf{A}$ 为真,则称 $\mathbf{A}$ 推出 $\mathbf{B}$,并称 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 为推理式。以$\vDash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 为推理式。$\vDash$ 中的两个短横表示 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 具有两个独立性。其中 $\mathbf{A}$ 称为前件、前提或假设,$\mathbf{B}$ 称为后件、结论或结果。例如,$\vDash(\mathbf{C}\rightarrow\neg\mathbf{C})\rightarrow\neg\mathbf{C}$(归谬式),$\vDash\mathbf{C}\wedge(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{D}$(充分条件推理肯定式),$\vDash p(e)\wedge[p(x)\rightarrow q(x)]\rightarrow q(e)$(内涵三段论式),前二者为命题逻辑推理式,后者为名词逻辑推理式。

这里,把“从逻辑内容上说可在未确定 $\mathbf{B}$ 为真的情况下确定 $\mathbf{A}$ 为真”简化为“可独立于 $\mathbf{B}$ 确定 $\mathbf{A}$”,并称此为第二独立性,简称二独。由上述可见,推理式不仅具有一独,而且具有二独。一独和二独合称为两个独立性。$\vDash$ 为两独有效号,表示不仅有效而且具有两独,两短横就表示具有两个独立性。推理式$\vDash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 是有两独的有效式,是具有两个独立性的逻辑真理:仅仅依据其逻辑内容即可独立于 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 确定不会是 $\mathbf{A}$ 真而 $\mathbf{B}$ 假,且可独立于 $\mathbf{B}$ 确定 $\mathbf{A}$ 为真。

例如,下面用竖式表示的推理式就具有两个独立性:

$$\begin{array}{c}\text{如果 }\mathbf{C}\text{,那么 }\mathbf{D}\text{;}\\ \underline{\qquad\mathbf{C}\qquad}\\ \text{所以,}\mathbf{D}\end{array}$$

相应的横式为：$\models \mathbf{C} \wedge (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{D}$

下面就是这个推理式的实例：

例 1：

如果敌军发动攻击，则敌军必有攻击时间；
敌军确实发动攻击了；
所以，敌军有攻击时间。

由于可独立于 **D** 为真确定 $\mathbf{C} \wedge (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D})$ 为真，因此，结论 **D** 对于前提 $\mathbf{C} \wedge (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D})$ 来说是新知。实例中，结论“敌军有攻击时间”对于“如果敌军发动攻击，则敌军必有攻击时间”和“敌军确实发动攻击了”这两个前提来说就是新知。

8.1.3　导出和导出式

若 $\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$，且从逻辑内容上说不可在未确定 **B** 为真的情况下确定 **A** 为真，即，只有在确定 **B** 为真以后才能确定 **A** 为真，则称 **A** 导出 **B**，并称 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 为导出式。以 $\Vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 是导出式。$\Vdash$ 中的一短横表示 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ 具有第一独立性，左边一竖表示不具有第二独立性。

下面的实例就是不出新知的导出：

例 2：

贵州旅游资源丰富，并且，能源丰富；
所以，贵州旅游资源丰富。

要确定前提“贵州旅游资源丰富，并且，能源丰富”为真依赖确定结论“贵州旅游资源丰富”为真。在未确定“贵州旅游资源丰富”为真之前，根本不可能确定“贵州旅游资源丰富，并且，能源丰富”为真。因此，此例的结论对前提来说不是新知。这称为导出。表达导出的符号式称为导出式。上例的表达式为：

$$\Vdash \mathbf{C} \wedge \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$$

写成竖式就是：

$$\frac{\mathbf{C}\ \text{并且}\ \mathbf{D}}{\text{所以，}\mathbf{C}}$$

显然，导出式是不能从已知得出新知的有效式。必须在确定结论为真后才能确定前提为真；结论对前提来说不是新知。但是，导出式的前提和结论之间具有充分条件关系，满足第一独立性。

8.2　尽举选择命题的逻辑性质及其推理

我们这里要探讨的尽举选择命题是非纯真值复合命题，不是纯真值复合命题。尽举选择命题的真值，不取决于出现在其中的肢命题的真值，前者不是后者的真值的真值函数。尽举选择联结词不能从纯真值复合命题的联结词导出，而

只能从非纯真值复合命题的充分条件联结词导出。

8.2.1　不同的尽举选择命题及其逻辑性质

请看下面两个语句所表达的实例：

例 1. 某军夺下一个堡垒，或者是强攻或者是智取。

例 2. 张教授到清华大学讲学，或者乘飞机去，或者乘火车去。

从语言表述上看，此二例似乎完全相同。可是，用当代形式逻辑的哲学指导思想辩证唯物论仔细分析，就有实质性区别。

（1）虽然两例的两个肢都可以同真，然而，例 1 的两个肢不可以都假，而例 2 的两个肢却可以都假；

（2）例 2 的真值是其中两个肢的真值的真值函数；例 1 的真值却不是其中两个肢的真值的真值函数；

（3）例 2 的性质可用第 2 号 2 元真值函数关系 f_2^2 析取关系 $A \vee B$ 的真值表给予刻画；例 1 的性质却是正统数理逻辑所无力问津的作为从已知进入新知的工具的逻辑科学的基石的两个独立性；

（4）例 1 所表达的是非纯真值复合命题的尽举选择命题——尽举相容选择命题，以例 1 为前提可进行能从已知获取新知的推理；例 2 所表达的是纯真值复合命题的析取命题，以例 2 为前提不能进行能从已知获取新知的推理。

根据尽举选择命题的肢命题所思考的客观事件有无的关系不同，尽举选择命题可分为以下三种。

1. 尽举相容选择命题

尽举相容选择命题可简称“尽举相容命题”。请先看下面的实例。

例 3. 一份统计表有错误，或者因为材料不可靠，或者计算有错误。

这语句表达一个非纯真值的尽举相容选择命题。从语言习惯上看，还可以表述为：

一份统计表有错误，不是材料不可靠，就是计算有错误。

尽举相容选择命题由自然语词“或者，或者”、“不是，就是”表达。我们用符号“↾”表示尽举相容选择命题的联结词，简称为尽举相容词，其符号称为尽举相容号。以 **A**、**B** 表示基础命题，尽举相容选择命题就表示为：

$$\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$$

读做“**A** 尽举相容 **B**”、“不是 **A**，就是 **B**”。**A** ↾ **B** 由充分条件（→）和否定（¬）导出：

$$\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B} =\mathrm{df}\ \neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

A ↾ **B** 不能由纯真值的实质蕴涵导出。用充分条件词能客观地、准确地刻

画尽举相容选择命题。自然语词"不是,就是"最能表达尽举相容选择命题的逻辑性质。任意的经验的尽举相容选择命题都具有经验的两独;任意的逻辑的尽举相容选择命题都必然具有逻辑的一独,有些具有逻辑的两独。例3是经验的尽举相容选择命题,具有经验的两独:一份统计表有错误,不管它的材料可靠不可靠,也不管计算有没有错误,但是,我们知道,这份有错误的统计表的材料可靠而计算没有错误的事情永远不会发生——这就是经验的一独;不管计算有没有错误(即,可独立于后件"计算有错误")而单独地确定前件"不是材料不可靠"为真(即"存在")——这就是经验的二独。(**C**∨**D**)↾(¬**C**∨¬**D**)是一个逻辑的尽举相容选择命题,必定具有逻辑的一独。我们把(**C**∨**D**)↾(¬**C**∨¬**D**)恒等变形为¬(**C**∨**D**)⇀(¬**C**∨¬**D**),再恒等变形为(¬**C**∧¬**D**)∨(¬**C**∨¬**D**)后,其第一独立性就非常显然了:不管(¬**C**∧¬**D**)是真是假,也不管(¬**C**∨¬**D**)是真是假,(¬**C**∧¬**D**)真而(¬**C**∨¬**D**)假的事永远不会发生。亦即,在(**C**∨**D**)↾(¬**C**∨¬**D**)中,不管(**C**∨**D**)是真是假,也不管(¬**C**∨¬**D**)是真是假,(**C**∨**D**)假而(¬**C**∨¬**D**)也假的事永远不会发生。(**C** ! **D**)↾(**C** ! ¬**D**)、(**U**(x)! **D**(x))↾(**U**(x) ! ¬**D**(x))等也都是逻辑的尽举相容选择命题,也必定具有逻辑的一独。第一独立性是尽举相容选择命题必定具有的本质的逻辑属性。

至此,我们得到尽举相容选择命题的真假属性:尽举相容选择命题**A**↾**B**为真,当且仅当,具有一独的不会是**A**、**B**同假。即可在既不需确定**A**真又不需确定**B**真的情况下确定**A**、**B**不同假。当出现下述情况之一时,尽举相容选择命题**A** ↾**B**为假:①**A**、**B**同假;②当**A**假时,**B**可以假;③必须依据**A**真或**B**真才能确定不是**A**、**B**同假。

提请注意,纯真值析取命题**C**∨**D**不是非纯真值的尽举相容选择命题。**C**∨**D**中的**C**与**D**虽然可以同真却也可以同假。其所表达的是第2号2元真值函数关系f_2^2。因而**C**∨**D**具有一个依赖性——第一依赖性:**C**∨**D**的真值依赖于**C**与**D**的真值。**C**∨**D**的真值表就证实了这一点。这与**A** ↾**B**的第一独立性形成鲜明的对比。

2. 尽举反相容选择命题

例4. 要么武松打死老虎,要么老虎吃掉武松。

这表达一个非纯真值的尽举反相容选择命题。从语言习惯上看,也可以表述为:

要是武松打死老虎,那么老虎就吃不掉武松。

尽举反相容选择命题由自然语词"要么,要么"、"要是,就不是"表达。我们用符号"↿"表示尽举反相容选择命题的联结词,简称为尽举反相容词,其符号称为尽举反相容号。以**A**、**B**表示基础命题,尽举反相容选择命题就表示为:

A ↿ **B**

读做“**A** 尽举反相容 **B**”、“是 **A**,就不是 **B**”。$\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 可由充分条件和否定导出:

$$\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} =\mathrm{df}\ \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$$

$\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 不能由纯真值的实质蕴涵导出。由充分条件词能客观地、如实地、准确地刻画尽举反相容选择命题。自然语词“要是,就不是”最能表达尽举反相容选择命题的逻辑性质。任意的经验的尽举反相容选择命题都具有经验的两独;任意的逻辑的尽举反相容选择命题都必然具有逻辑的一独。例 4 是经验的尽举反相容选择命题,具有经验的两独,这十分显然。$(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \upharpoonleft (\neg \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{D})$ 是一个逻辑的尽举反相容选择命题,必定具有逻辑的一独。我们把 $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \upharpoonleft (\neg \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{D})$ 恒等变形为 $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \rightharpoonup \neg(\neg \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{D})$,再恒等变形为 $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \rightharpoonup (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$ 后,其第一独立性就非常显然了:不管 $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ 是真是假,也不管 $(\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$ 是真是假,$(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ 真而 $(\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$ 假的事情永远不会发生。即,在 $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) \upharpoonleft (\neg \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{D})$ 中,不管 $(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ 是真是假,也不管 $(\neg \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{D})$ 是真是假,$(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ 真而 $(\neg \mathbf{C} \wedge \neg \mathbf{D})$ 也真的事情永远不会发生。$(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{D}) \upharpoonleft (\mathbf{C} \rightharpoonup \neg \mathbf{D})$、$(\mathbf{U}(x) \rightharpoonup \mathbf{D}(x)) \upharpoonleft (\mathbf{U}(x) \rightharpoonup \neg \mathbf{D}(x))$、$(\mathbf{U}(x) \rightharpoonup \mathbf{D}(x)) \upharpoonleft \neg(\mathbf{U}(x) ! \mathbf{D}(x))$ 等也都是逻辑的尽举反相容选择命题,也必定具有逻辑的一独。第一独立性是尽举反相容选择命题必定具有的本质的逻辑属性。

至此,我们得到尽举反相容选择命题的真假属性:尽举反相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 为真,当且仅当,具有一独的不会是 **A**、**B** 同真。即可在既不需要确定 **A** 假又不需要确定 **B** 假的情况下确定 **A**、**B** 不同真。当出现下述情况之一时,尽举反相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 为假:①**A**、**B** 同真;②当 **A** 真时,**B** 可以真;③必须依据 **A** 假或 **B** 假才能确定不是 **A**、**B** 同真。

提请注意,纯真值不相容析取命题 $\mathbf{C} \veebar \mathbf{D}$ 不是非纯真值的尽举反相容选择命题。$\mathbf{C} \veebar \mathbf{D}$ 中的 **C** 与 **D** 虽然不能同真却也不能同假。其所表达的是第 10 号 2 元真值函数关系 $f_{10}{}^{2}$。因而 $\mathbf{C} \veebar \mathbf{D}$ 具有一个依赖性——第一依赖性:$\mathbf{C} \veebar \mathbf{D}$ 的真值依赖于 **C** 与 **D** 的真值。$\mathbf{C} \veebar \mathbf{D}$ 的真值表就证实了这一点。这与非纯真值的尽举反相容选择命题 $\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ 的第一独立性截然不同。

3. 尽举不相容选择命题

我们还是看看下面的实例:

例 5. 贵阳花溪公园的大门此刻要么开着,要么关着。

这一语句表达了一个非纯真值的尽举不相容选择命题。从语言习惯上看,也可以表述为:

贵阳花溪公园的大门此刻要是开着就不是关着,要不是开着就是关着。

尽举不相容选择命题由自然语词“要么,要么”、“要是就不是,要不是就是”表达。我们用符号“↑”表示尽举不相容选择命题的联结词,简称为尽举不相容词,其符

号称为尽举不相容号。以 A、B 表示基础命题,尽举不相容选择命题就表示为:

A ↑ B

读做“A 尽举不相容 B”“是 A 就不是 B,不是 A 就是 B”。A↑B 可由充分条件、否定和合取导出:

A ↑ B =df (A→¬B)∧(¬A→B)

A↑B 不能由纯真值的蕴涵导出。由充分条件词能客观地、如实地、准确地刻画尽举不相容选择命题。自然语词“要是就不是,要不是就是”最能表达尽举不相容选择命题的逻辑性质。任意的经验的尽举不相容选择命题都具有经验的两独;任意的逻辑的尽举不相容选择命题都必然具有逻辑的一独。例 5 是经验的尽举不相容选择命题,具有经验的两独,这是显然的。(C ∧ D)↑(¬C ∨¬D)是一个逻辑的尽举不相容选择命题,必定具有逻辑的一独。我们把(C ∧ D)↑(¬C ∨¬D)恒等变形为[(C ∧ D)→¬(¬C∨¬D)]∧[¬(C ∧ D)→(¬C ∨ ¬D)],再恒等变形为(C ∧ D)⇌(C ∧ D)后,其第一独立性就昭然若揭了。即,在(C ∧ D)↑(¬C∨¬D)中,不管(C ∧ D)是真是假,也不管(¬C ∨¬D)是真是假,(C∧ D)和(¬C∨¬D)同真假的事情永远不会发生。(C →D)↑(C ! ¬D)、(U(x)→ D(x))↑(U(x)! ¬D(x))、(U(x)→¬D(x)↑(U(x)! D(x))等也都是逻辑的尽举不相容选择命题,也必定具有逻辑的第一独立性。第一独立性是尽举不相容选择命题必定具有的本质的逻辑属性。

至此,我们又得到尽举不相容选择命题的真假属性:尽举不相容选择命题 A ↑ B 为真,当且仅当,具有一独的不会是 A、B 同真假。即可在既不需要确定 A 的真假又不需要确定 B 的真假的情况下确定 A、B 不同真假。当出现下述情况之一时,尽举不相容选择命题 A ↑B 为假:①A、B 同真或同假;②A、B 可以同真也可以同假;③必须依据 A、B 的真假才能确定不是 A、B 同真假。

提请注意,纯真值不相容析取命题 C∨̇D 不是非纯真值的尽举不相容选言命题。C∨̇D 中的 C 与 D 虽然不能同真也不能同假,然而其所表达的是第 10 号 2 元真值函数关系 $f_{10}{}^{2}$,因而 C∨̇D 具有第一依赖性:C∨̇D 的真值依赖于 C 与 D 的真值。这就是说,要确定 C∨̇D 为真,必须逐一考察 C 与 D 究竟是真还是假。这与 C↑D 的第一独立性殊异。

在此还需要指出的是,依据基础命题 C、D 的取值,纯真值析取命题 C∨D 取得三真一假的结果,纯真值不相容析取命题 C∨̇D 取得两真两假的结果,而非纯真值的尽举选言命题 A ↾B 和 A ↿B 却都取得三真四假的结果,A↑B 取得两真四假的结果。

8.2.2 不同的尽举选择推理及其逻辑性质

无论以哪一种尽举选择命题为前提都可以构成能从已知获取新知的推理。

试以尽举相容选择命题作为前提为例：

$$\neg A \wedge (A \upharpoonright B) \rightharpoonup B$$

在此表达式中，¬**A**、（**A**↾**B**）为两个前提（为了方便，我们称¬**A**为左前提，称（**A**↾**B**）为右前提），**B**是结论，⇀是前提与结论之间的逻辑充分条件关系（即逻辑的必然关系，具有逻辑的两独）。第一，依据前面论述的（**A**↾**B**）的第一独立性，我们无须依据**A**、**B**的真值（即不用考察**A**、**B**是真是假），就可独立地确定（**A**↾**B**）为真。提请注意，在（**A**↾**B**）的这个第一独立性基础上，就升华为关于右前提（**A**↾**B**）对结论**B**的第二独立性：可独立于结论**B**的真值确定右前提（**A**↾**B**）为真。第二，再由右前提（**A**↾**B**）——即（¬**A**⇀**B**）中后件**B**对其前件¬**A**的第二独立性，升华为关于左前提¬**A**对结论**B**的第二独立性：可独立于结论**B**的真值确定左前提¬**A**为真。由此两点就得到关于前提¬**A**和（**A**↾**B**）对结论**B**的第二独立性，即可独立于结论**B**的真值确定前提¬**A** ∧（**A**↾**B**）为真。至此，我们就证明了在表达式¬**A** ∧（**A**↾**B**）⇀**B**中，结论**B**对前提¬**A** ∧（**A**↾**B**）来说是逻辑新知。因此，表达式¬**A** ∧（**A**↾**B**）⇀**B**是推理式。

可是，请看，以纯真值析取命题**C**∨**D**或纯真值不相容析取命题**C**$\dot{\vee}$**D**为前提得不出新知，不能构成推理式。我们以纯真值析取命题**C**∨**D**作为前提为例进行阐述：

$$\neg C \wedge (C \vee D) \rightharpoonup D$$

在此表达式中，右前提（**C** ∨ **D**）无独立性，而只具有第一依赖性，即，（**C** ∨ **D**）的真值依赖于其肢命题**C**与**D**的真值（因为（**C** ∨**D**）的真值是**C**与**D**的真值的真值函数）。换个更明白的说法，也就是说，要确定（**C** ∨**D**）为真，必须逐一考察**C**是否为真、**D**是否为真。既然在前提中已经考察了结论**D**为真，就无须推导**D**！如此，结论**D**对前提¬**C** ∧（**C** ∨ **D**）来说，怎么会是新知！

至此，纯真值析取命题或纯真值不相容析取命题与尽举选择命题（无论哪一种尽举选择命题）的实质性区别已昭然若揭。事实上，任意的纯真值复合命题都具有依赖性，以它们为前提都得不出新知，都不能构成推理式。

下面，我们就可以较轻松地讨论各种尽举选择推理了。

根据作为前提的尽举选择命题的不同，尽举选择推理可分为尽举相容选择推理、尽举反相容选择推理和尽举不相容选择推理三种。

1. 尽举相容选择推理

根据尽举相容选择命题的真假属性和真假关系，尽举相容选择推理有两条规则：

① 否定一个肢，就能肯定另一个肢；

② 肯定一个肢，不能肯定也不能否定另一个肢。

尽举相容选择推理的有效式有：

(1) $\models \neg\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$

(2) $\models \neg\mathbf{B} \wedge (\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}$

2. 尽举反相容选择推理

根据尽举反相容选择命题的真假属性和真假关系，尽举反相容选择推理有两条规则：

① 肯定一个肢，就能否定另一个肢；

② 否定一个肢，不能否定也不能肯定另一个肢。

尽举反相容选择推理的有效式有：

(1) $\models \mathrm{A} \wedge (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{B}$

(2) $\models \mathrm{B} \wedge (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}$

3. 尽举不相容选择推理

根据尽举不相容选择命题的真假属性和真假关系，尽举不相容选择推理有两条规则：

① 肯定一个肢，就能否定另一个肢；

② 否定一个肢，就能肯定另一个肢。

尽举不相容选择推理的有效式有：

(1) $\models \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{B}$

(2) $\models \mathbf{B} \wedge (\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}$

(3) $\models \neg\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$

(4) $\models \neg\mathbf{B} \wedge (\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}$

8.3 关于流行的传统形式逻辑读物中命题逻辑推理式的几点讨论

8.3.1 所谓反三段论

有一本形式逻辑书提出："具有下列形式的推理，习惯上叫做反三段论：如果(p 且 q)则 r，所以，如果(p 且不 r)则不 q。"(诸葛殷同等著《形式逻辑原理》，人民出版社 1982 年版，第 157 页)

这种"反三段论"，当 p、q、r 为传统直言三段论中那样的命题时，确实成立。可是在一般情况下则不然。为了使初学者阅读方便，我们将这个所谓"反三段

论”写成竖式：

$$\frac{\text{如果(p 且 q)则 r}}{\text{所以,如果(p 且不 r)则不 q}}$$

用 p 替换式中的 r 后立即得到这个所谓“反三段论”的特例：

$$\frac{\text{如果(p 且 q)则 p}}{\text{所以,如果(p 且不 p)则不 q}}$$

其结论就是说,“p 且不 p”是“不 q”的充分条件。可是,“p 且不 p”永假,而“不 q”中的 q 可以用任意命题替换,故而,结论等于说:永假的命题是任意命题的充分条件。这显然是不成立的。

所谓“反三段论”,按该书所用的数理逻辑的联结词符号,其表达式为：

$$(p\wedge q\to r)\to p\wedge\neg r\to\neg q \qquad ①$$

用当代形式逻辑严格的逻辑思想来看,这是个蕴涵怪论的式子,称做涵衍式。它在人们的普通逻辑思考中是古怪的、无效的。必须从符合人的普通逻辑思考实际的当代形式逻辑体系中排除出去。当代形式逻辑称之为除外式。我们只需在①式中出现 r 之处代入 p,便可显示出所谓“反三段论”中所包含的蕴涵怪论来。

(1) 以 p 代入 r 处,得：

$$(p\wedge q\to p)\to p\wedge\neg p\to\neg q \qquad ②$$

(2) ②式中的左式是：

$$p\wedge q\to p \qquad ③$$

③ 式在数理逻辑中为有效式,在现行传统形式逻辑中称为联言推理式,亦为有效式。

(3) ②式与③式进行分离(或者说,按现行传统形式逻辑的充分条件假言推理肯定式)可得：

$$p\wedge\neg p\to\neg q \qquad ④$$

④ 式是众所皆知的蕴涵怪论(却是数理逻辑的所谓重言式)。可见,所谓“反三段论”的①式是与人的普通逻辑思维实际格格不入的。反三段论要进入推理式的行列,只有当其中的命题变元 p、q、r 为传统直言命题时才是真正有效、符合人的普通逻辑思维实际的。例如：

$$\frac{\text{如果(m}\mathbf{A}\text{p 且 s}\mathbf{A}\text{m)则 s}\mathbf{A}\text{p}}{\text{所以,如果(m}\mathbf{A}\text{p 且并非 s}\mathbf{A}\text{p)则并非 s}\mathbf{A}\text{m}}$$

8.3.2　所谓选言推理式 $\neg\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\to\mathbf{B}$ 等

纯真值复合式 $\neg\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\to\mathbf{B}$ 在流行的传统形式逻辑读物中被称为“相容选言推理式”。可是,在人的普通逻辑思维实际中,这是一个蕴涵怪论式。请看如下恒等变换：

$$\neg \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$$
$$= (\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}) \vee (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$$
$$= (\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B})$$

而　$(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}$

故而　$(\neg \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}$

因为 $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 是蕴涵怪论(从假命题 $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ 可以推出任意命题 $\mathbf{B}$),所以在当代形式逻辑中,$\neg \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ 为涵衍式,它与人的普通逻辑思维实际不相容,因而不是什么推理式。人的普通逻辑思维中的“尽举相容选择推理式”中的“或者”实际上是↾而不是∨。当然同其他所有推理式一样,前提与结论之间的关系是⇁而不是→。

其实,在流行的传统形式逻辑读物中,除联言推理和假言易位推理外,与其他复合命题推理相对应的数理逻辑符号表达式都全是涵衍式。试再举一例,如纯假言推理(又叫条件连锁推理):

如果 **A** 那么 **B**
如果 **B** 那么 **C**
———————
所以,如果 **A** 那么 **C**

这个表达式的有效性是显然的,而且符合人的普通逻辑思维实际。可是流行的传统形式逻辑读本用数理逻辑的符号表达为:

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$$

此式与人的普通逻辑思考实际相悖,其中含有蕴涵怪论。请看如下恒等变换:

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$$
$$= (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$$
$$= \neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \vee \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$$
$$= [\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \wedge [\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{C} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \wedge [\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \wedge [\mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})]$$

而　$[\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \wedge [\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{C} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \wedge [\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \wedge [\mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})] \to [\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})]$

故　$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to [\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})]$

因为 $\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ 是蕴涵怪论(从恒假命题 $\mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B}$ 可以推出任意命题 $(\mathbf{A} \to \mathbf{C})$,因而 $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ 是涵衍式,与人的普通逻辑思维实际不相容,故而用数理逻辑符号表达的 $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ 根本不是什么推理。这个表达式显然背离了传统形式逻辑假言连锁推理的本意。

我们在前面已经讨论过,经验的充分条件关系和逻辑的充分条件关系(即推理的前提与结论间的关系)都是充分条件关系⇁,而不是纯真值函数的蕴涵

关系→。出现蕴涵怪论的原因就在于把纯真值函数的蕴涵关系 →当成经验的充分条件关系或逻辑的充分条件关系(即推理的前提与结论间的关系)⇀。

由此可以看出,用数理逻辑“改造”或“取代”传统形式逻辑是行不通的。

8.3.3　真值表方法不是命题逻辑推理式有效性的判定方法

有一本形式逻辑书提出:“有一个机械的方法,经过有穷步骤,可以断定关于联结词的任何推理形式 $\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_n$,所以,$\mathbf{B}$ 是否有效。这个方法也就是判定(($\mathbf{A}_1$且 $\mathbf{A}_2$)且……)且 $\mathbf{A}_n$与 $\mathbf{B}$ 之间是否有蕴涵关系的方法。这个方法是借助真值表的方法来完成的。先给出如果(($\mathbf{A}_1$且 $\mathbf{A}_2$)且……)且 $\mathbf{A}_n$则 $\mathbf{B}$ 的真值表,无论 $\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_n,\mathbf{B}$ 的真假情况怎样,只要如果($\mathbf{A}_1$且 $\mathbf{A}_2$)且……)且 $\mathbf{A}_n$则 $\mathbf{B}$ 总是真的,那么,$\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_n$,所以,$\mathbf{B}$ 就是一个有效的推理式,即一个演绎推理形式。”(诸葛殷同等著《形式逻辑原理》,人民出版社 1982 年版,第 158 页)

我们略举两三例便可得出与此相反的结论。

例如,设 $n=3$, $\mathbf{A}_1$为 p,$\mathbf{A}_2$为 q,$\mathbf{A}_3$为 p,$\neg\mathbf{B}$ 为 r。严格按照这本形式逻辑书给定的上述方法,并根据这本书关于联结词的真值表定义,先给出“若(p 且 q)且非 p,则 r”的真值表如下:

p q r	¬p	p 且 q	(p 且 q)且非 p	若(p 且 q)且非 p,则 r
1 1 1	0	1	0	1
1 1 0	0	1	0	1
1 0 1	0	0	0	1
1 0 0	0	0	0	1
0 1 1	1	0	0	1
0 1 0	1	0	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 0 0	1	0	0	1

显然,无论 p、q、r 的真假情况怎样,“如果(p 且 q)且¬p 则 r”总是真的。于是,遵照这本形式逻辑书的上述规定,应该得出:“p,q,¬p,所以 r”就是一个“有效推理式”。用这本书的联结词符号表达,这个所谓“有效推理式”就是:

$$(p\wedge q)\wedge\neg p\rightarrow r \qquad ①$$

同理,由于下述表达式是永真式(在此省略了真值表):

$$(p \land q) \land \neg p \to \neg r \qquad ②$$

因而,照这本书的前述规定,此式也应该是“有效推理式”。可是,从(p 且 q)且¬p 能推出 r(据①式),又能推出¬r(据②式),对于人的普通逻辑思维实际来说,显然是离奇古怪的。

另一类更有说服力的例子是:设 $n=3$,$\mathbf{A}_1$ 为(((要么 p 要么 q)要么 r)要么 s),A_2 为 p,A_3 为 q,B 为(r 或者 s)。我们按照这本形式逻辑书给定的方法,并根据这本书关于联结词的真值表定义,先给出:

如果((((要么 p 要么 q)要么 r)要么 s)且 p)且 q 则(r 或者 s)

的真值表。在这里,我们采用简化的真值表方法,并且按流行的形式逻辑读本通常的习惯,将这个式子符号化。这样,便有如下的真值表。

	((((p	$\dot\vee$	q)	$\dot\vee$	r)	$\dot\vee$	s)	$\land$	p)	$\land$	q	$\to$	(r	$\lor$	s)
(1)												0			
(2)										1				0	
(3)								1			1		0		0
(4)						1			1 *						
(5)				1			0								
(6)		1			0										
(7)	0 *		1												

显然,无论$((p \dot\vee q) \dot\vee r) \dot\vee s$、p、q、$r \lor s$ 的真假情况怎样,表达式③的值总是真的:

$$((((p \dot\vee q) \dot\vee r) \dot\vee s) \land p) \land q \to (r \lor s) \qquad ③$$

于是,按这本书的规定,这个表达式应该是“有效推理式”。可是,没有一个有正常的普通的逻辑思维能力的人会承认它是有效推理式。

我们再来看下面这个表达式。

若((((要么 p 要么 q)要么 r)要么 s)且非 p)且非 q 则(r 或者 s) ④

为了验证的方便,我们仍然按流行的形式逻辑读物通常的习惯将这个表达式符号化,然后给出其简化真值表,用(1)、(2)……、(7)表示制作真值表的步骤。

(7)	(6)	(7)	(5)	(6)	(4)	(5)	(3)	(4)	(5)	(2)	(3)	(4)	(1)	(3)	(2)	(3)
((((p	$\dot\vee$	q)	$\dot\vee$	r)	$\dot\vee$	s)	$\land$	$\neg$	p)	$\land$	$\neg$	q	$\to$	(r	$\lor$	s)
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
*									*							

显然,这是个永真式,可是它根本就不是什么推理式。

非常古怪的是,根据式③、式④两个表达式,以“(((要么 p 要么 q)要么 r)要么 s)”为前提,无论是肯定 p 且肯定 q 还是否定 p 且否定 q 都可以得出

“r或者s”。如果这些东西都是“有效推理式”、“演绎推理式”的话,那么包含这种“有效推理式”、“演绎推理式”的逻辑就太远离人们的普通逻辑思维实际,太古怪了。

据上述实例,我们可以得出如下结论:真值表法不是命题逻辑推理式(或称“联结词的推理式”)有效性的判定方法。所谓真值表是刻画 n 元真值函数关系的方阵。它在正统数理逻辑命题演算中是判定重言式的方法之一。鉴于重言式不等于“推理式”(提请注意,这本形式逻辑著作错误地将“推理式”称做“有效推理式”——难道推理式还分为有效推理式和无效推理式吗!推理式必有效,无效的必定不是推理式),蕴涵重言式也不等于所谓“有效推理式”;退一步说,如果我们将符合人的普通逻辑思维实际的推理式中的联结词非、且、或者……或者……、要么……要么……、如果……那么……、只有……才……、……当且仅当……,翻译成数理逻辑的$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\dot{\vee}$、$\rightarrow$、$\leftarrow$、$\leftrightarrow$,那么,所谓“有效推理式”与重言式之间也只是真包含于的关系,所谓“有效推理式”与蕴涵重言式之间也只是真包含于的关系。因此,真值表不能判定推理式的有效性。

8.4 逻辑领域中的狐假虎威

流传着一个“狐假虎威”的寓言故事:狐狸没有老虎的力量大,心里害怕。为了使老虎不伤害它,狐狸便想出了一个欺骗老虎的办法,就是让老虎相信自己是百兽之王。一天,它叫老虎跟在自己身后到森林里走一圈。众兽被老虎吓跑了,老虎还以为众兽怕狐狸,于是对狐狸肃然起敬,俯首称臣。人们创造了这只狡诈的狐狸,于是留给我们一个成语——狐假虎威。

当蕴涵关系欲以取代传统形式逻辑中的充分条件关系而居为“逻辑之王”时似乎也有和上述寓言中所说的狐狸与老虎相仿的关系,我们称之为“逻辑领域中的狐假虎威”。

也就是说,狐假虎威的寓言在逻辑科学中也可以找到“模型”,那就是“蕴假充威”:有人将事实上充分条件在起作用的逻辑充分条件定律误以为是蕴涵在起作用的蕴涵重言定律。就拿历史悠久的“充分条件推理肯定式” $\vdash \mathbf{A}\wedge(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}$ 来说,此式之所以是推理式,具有逻辑的两个独立性,完全取决于在其前件中出现的经验或逻辑的充分条件($\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$);有人却把它分析成蕴涵重言式 $\vdash\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{B}$。这就是典型的“蕴假充威”。事实是,这个蕴涵重言式依次等值于下述重言式:

$$\vdash\mathbf{A}\wedge(\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{B}$$

$$\vdash(\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{A})\vee(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{B}$$

$$\vdash(\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{B})$$

而这等价于：

$$\vdash \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

和

$$\vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$$

显然，其中的蕴涵重言式 $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 是个蕴涵怪论；另一个蕴涵重言式 $\vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ 的前、后件之间不满足第一独立性，因此，原蕴涵重言式 $\vdash \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ 的前件 $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ 和后件 **B** 之间没有充分条件关系。有意思的事实是：同基异构事件 $\vdash \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \rightharpoondown \mathbf{B}) \rightharpoondown \mathbf{B}$ 就是这一场狐假虎威式的“蕴假充威”的误会的“客观基础”。蕴涵重言式 $\vdash \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ 的前、后件之间不满足第二独立性是非常明显的：要确定 $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ 为真必须预先确定 **A** 为真；在 **A** 为真的情况下要确定 $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 为真就必须预先确定 **B** 为真；这就是说，只有在确定后件 **B** 为真以后才能确定前件为真——这叫做→的第二依赖性。既然如此，还“推导”它干什么？在逻辑思维实际中，当人们使用“充分条件推理肯定式”进行推理时，前件为真总是可以独立于后件为真确定的，因此，这前件中的“条件命题”事实上必定只能是非正统的充分条件命题，而不会是正统的蕴涵命题。譬如说，**A** 为“太阳是圆的”，“ $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$”为“太阳是圆的蕴涵刘备喜欢赵云”，由这二者去“推出”“刘备喜欢赵云”，这有什么意思呢？人们是不会去做这种无谓的“推出”的。对于这个例子来说，前后件只满足蕴涵，不满足充分条件（跟在狐狸身后的老虎走开了），于是，这时，被一些人当做“条件推理肯定式”的没有两个独立的蕴涵重言式是不可能成为从已知进入新知的工具的（孤零零的狐狸是吓不跑百兽的）。正由于此，人们在普通逻辑思维实际中不会去使用这种同语反复的蕴涵重言式。当人们希望推出 **B** 为真时，居然要预先确定：① **A** 为真；② **B** 为真；③ $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 为真；④ $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ 为真；⑤ $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ 恒真！这不仅仅是事倍功半，而是“事 5 倍于功”啊！顺便说及的是：→还有第一依赖性，即，整个蕴涵式的真值依赖于其子式的真值，蕴涵式的真值表就是这第一依赖性的铁的证明。

从逻辑语用学的角度来看，蕴涵重言式

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{B} \qquad ①$$

根本不能读做：

“**A**，并且，若 **A** 则 **B**，所以，**B**”　　②

因为，在普通逻辑思维的推理论证中出现的语词“若，则”、“所以”是用来表达“充分条件关系”、“能确保不循环的逻辑充分条件关系”的。把①读做②，那是在变戏法。当对①做出逻辑学解释时，①表述 2 元的恒真的真值函数。完全忠于此时的①的语义，①理应：

“不是：{[**A** 和(不是 **A** 真而 **B** 假)]都真} 真而 **B** 假”　　③

为了让③具有单义性,我们不得不在应为自然语句的③中加入了很不自然的大中小括号。即使如此,没有经过专门训练的人仍然会不明白③究竟说的是什么。在③中不再出现表述充分条件(我们比做老虎)的语词“若,则”、“所以”,取而代之以能确切地表述蕴涵(我们比做狐狸)的语词“不是(前)真而(后)假”。这仅仅只有狐狸而后面不再跟着老虎的语句③,99.99999999%以上的人是决不会说的。

第9章　逻辑证明与证实

9.1　逻辑证明的定义

9.1.1　几个有关的概念

这里的证明即逻辑证明的简称。为了便于阐述问题,先介绍下述几个概念。

命题的原型:即一命题所指谓的事件。

命题的真值:存在原型的命题称为真命题,其否定有原型的命题称为假命题。命题的这种真假属性在逻辑科学中称为真值。

既然一命题的真假取决于其原型是否存在,而原型存在与否只有通过实践才能鉴别,因此,实践不仅是认识的最初源泉,而且也是检验任何真理的终极标准。

确定为真(或已知为真):如果一个命题的原型存在,并且已经知道(或已经确定)其存在,则称确定该命题为真(或已知该命题为真)。

确定定理:证实一命题,当且仅当确定该命题为真。

这里的"当且仅当"就是"充分必要条件"的一种习惯的表达方式。通常说成"……与……互为充分必要条件",而在逻辑中也可简单地说成"等价"(不是"等值")。这是关于证实与确定等价的定理,而不是用确定来定义证实。"确定"指的是下述事实:①原型存在;②已知原型存在。至于事实①是怎么知道的,则暂且不去管它。证实究竟指什么,目前还不能严格地说清楚。然而,不会仅仅是指上述二事实而不管事实①是怎么知道的。

尽管证实和确定有上述区别,并且后者清楚而前者不清楚,然而,凡是承认任意确定了(即已经知道其原型存在)的命题是真理并且任意真理必定已获证实(即获得了实践的检验)的人都得承认确定定理。引入确定定理的用途在于:由于在"证实"究竟何所指还规定不清楚,因而,当我们在探讨一命题是否已证实时往往会由于对"证实"的理解不同而引起"针锋不相对"的"假争论"的情况下,我们可以通过探讨规定清楚了的"确定"与否来等价地替代。

9.1.2　逻辑证明的定义

在本书语境中,逻辑证明简称"证明"。

我们给出证明的定义如下。

若$\vdash$ **A** $\to$**B**,并且 **A** 确定为真,则称 **A** 证明 **B**。其中,**A** 称为论据或根据,**B**

称为论题或论断。$\models$ **A** $\rightharpoonup$**B** 表示 **A** $\rightharpoonup$**B** 是推理式,“$\models$” 表示 **A** $\rightharpoonup$**B** 具有两个独立性:仅仅依据逻辑内容即可独立于 **A**、**B** 的真值确定(一独)不会是 **A** 真而 **B** 假,可独立于 **B** 的真值确定(二独)**A** 为真。语构变元 **A**、**B** 可以是一个命题,也可以是多个命题。**A** $\rightharpoonup$**B** 可以是一个推理式,也可以是多个推理式。一个证明中的所有推理式的总和就称为该证明的证明方式。

二战期间,有一次苏军侦察员在侦察前沿阵地时发现阵地前丛林里的小树弯曲的方向和风向恰好相反,他立刻判断出前方这片丛林中一定有德军潜伏。他的证明过程是这样的:如果前方这片丛林正常,则小树的弯曲方向与风向应该一致,而事实上,小树的弯曲方向与风向相反,这说明阵前这片丛林的情况异常(1);造成这种异常状况的原因要么是有敌军的潜伏,要么是由于其他原因造成,而在目前战争状况下,阵前丛林的这种异常状况是不可能有其他原因引起的,所以只可能是敌军潜伏所致(2)。

这就是一个证明的实例。其中,这片丛林里有德军潜伏便是论题(A),而论据(B)则是丛林里的小树弯曲的方向和风向恰好相反,这种异常状况是不可能有其他原因引起的,所以只可能是敌军潜伏所致。而证明方式则是由一个充分条件假言推理(1)和一个尽举不相容选言推理(2)构成的。

以$\Vdash$ **A** $\rightharpoonup$**B** 表示 **A** 证明 **B**。在符号“$\Vdash$”中,两个短横表示两个独立性,第一条竖线表示论据 **A** 已确定为真。$\Vdash$ **A** $\rightharpoonup$**B**(即 **A** 证明 **B**)依据什么? 依据逻辑或经验事件 **A** 的存在、逻辑的充分条件事件 **A** $\rightharpoonup$**B** 的逻辑存在。在$\Vdash$ **A** $\rightharpoonup$**B**(即 **A** 证明 **B**)中,证明了什么? 证明了逻辑或经验事件 **B** 的存在。

因而,证明的本质是:从对两类事件(**A** 和 **A** $\rightharpoonup$**B**)的存在的认识过渡到对另一类事件(**B**)的存在的认识。当然,这种过渡是在人的认识中进行的,但是,客观世界的从事件 **A**、**A** $\rightharpoonup$**B** 的存在到事件 **B** 的存在的带有规律性的过渡是不以人的认识与否以及认识的正误为转移的。

9.2　两个独立性在证明中的作用

充分条件关系的经验两独是逻辑两独的渊源和归宿。两独是充分条件关系的逻辑精髓,是作为以有限把握无限、从已知进入新知的普遍适用的工具的逻辑科学的两块基石。

9.2.1　从一个实例开始讨论

在人民出版社出版的《数学大辞典》第 7 册第 709 页有如下一段陈述:

“证:1,3,5,7,…,$(2n-1)$之和为 n^2。

(1) 令命 $n=1$,$1=1^2$,等式成立。

（2）今假定对于 n 之某值 k，成立 $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$。等式两边加 $2k+1$，得出 $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$。即易 k 为 $k+1$ 时，等式仍能成立。由此可知，若对于 n 之某正整数值 k，此式成立，则对于正整数值 $k+1$ 等式亦成立。

据(1)、(2)，故知此时对于 n 之任意正整数值等式恒能成立。”

以 $\boldsymbol{A}(1)$、$\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$、$\boldsymbol{A}(n)$ 分别表示：$1=1^2$，$1+3+5+7+\cdots+2k-1=k^2$，$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$（其中，$k$ 为某个正整数）、$1+3+5+7+\cdots+\cdots+2n-1=n^2$（其中，$n$ 为任意正整数）。在上述引文中出现了：“假定 $\boldsymbol{A}(k)$，得出 $\boldsymbol{A}(k+1)$”，“若 $\boldsymbol{A}(k)$，则 $\boldsymbol{A}(k+1)$”，“据 $\boldsymbol{A}(1)$、若 $\boldsymbol{A}(k)$ 则 $\boldsymbol{A}(k+1)$，故知 $\boldsymbol{A}(n)$”。亦即，出现了“假定……，得出……”、“若……，则……”、“据……，故知……”。显然，这些都表示前、后件之间的充分条件关系。我们将依据事实，实事求是地来分析其逻辑含义究竟是什么？

显然，从外延上看，以具有 $\boldsymbol{A}(n)$ 形的式为元组成下述无限集：

n	$\boldsymbol{A}(n)$	符号表示
1	$1=1^2$	$\boldsymbol{A}(1)$
2	$1+3=2^2$	$\boldsymbol{A}(2)$
3	$1+3+5=3^2$	$\boldsymbol{A}(3)$
4	$1+3+5+7=4^2$	$\boldsymbol{A}(4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$1+3+5+7\cdots+(2k-1)=k^2$	$\boldsymbol{A}(k)$
$k+1$	$1+3+5+7+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$	$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}+1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

其中，k 为某个正整数。不仅上述具有 $\boldsymbol{A}(n)$ 形的式有无限多个，而且，式的长（式中的符号个数）也随着 n 的增大而趋于无限。因此，人们不仅不可能逐一列出上述无限多个式（从而不可能通过逐一列举、逐一验算的方式鉴别其是否成立），甚至，对于生命和精力全都有限的人类所使用的功能有限的技术（譬如说，容量最大的计算机）来说，可以找到一个正整数 m，当 $n \geqslant m$ 时无限多个式中的任意一个式，人们都无法将其完整无缺地写出。从而，其中的任意一个式是否成立都无法通过直接验算的方式鉴别。这就是说，我们不可能通过对无限集的外延逐一列举的方式来鉴别 $\boldsymbol{A}(n)$ 是否成立。然而，从内涵上说，上述无限集却具有一项明显的可以有限地把握和陈述的共仅属性（为集当中的任一元所共有且只为集当中的元所仅有的性质，又称为内涵）：

第 i 项为 $2i-1(i=1,2,3,\cdots,k)$，共有 k 项，其和为 k^2。

于是，$A(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 可分别内涵地表示为（$\sum\limits_{i=1}^{k}$ 表示 1 到 k 项的连加）：

内涵式	说明	步骤
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\overset{?}{=}k^2$	$\boldsymbol{A}(k)$	(1)
$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)\overset{?}{=}(k+1)^2$	$\boldsymbol{A}(k+1)$	(2)
$\Vert$		
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+[2(k+1)-1]$	竖等号显示(1)、(2) 等式左边的内涵联系	(3)
$\Vert$		
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2k+1$	去括号、化简	(4)

上述步骤(2)$\boldsymbol{A}(k+1)$等式左边到(3)的竖等式,依据 $\boldsymbol{A}(n)$ 的内涵。这一步十分关键,是所有步骤中起决定作用的一步;步骤(3)到步骤(4)的竖等式,依据 $2(k+1)-1=2k+2-1=2k+1$。这样,我们便确定了:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2k+1 \tag{5}$$

依据在等式左右出现的项可用与之相等的项置换,等式不变,从而,$\boldsymbol{A}(k+1)$可表示成:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2k+1\overset{?}{=}(k+1)^2 \tag{6}$$

$$?\Vert$$

$$k^2$$

提请注意下述重要事实(我们的讨论永远依据事实):从步骤(1)到(6),我们只是写出 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$的内涵式,在事实上自始至终并未确定(当然,不可也无须“假定”)其是否成立,因此,在等号“=”上标以问号“?”,以示“其是否成立并未确定”这个非常重要的事实(要是对其作“假定”,就会淡化这个重要事实)。当然,此外的等式(无论等号“=”是竖写还是横写)的成立全都是确定了的,因此,在等号“=”上未标问号“?”。

据 $k^2+2k+1=(k+1)^2$ 恒成立,与第(6)步中得出的表示 $\boldsymbol{A}(k+1)$的表达式,即可确定下述事实①:

① 事实上不会发生 $\boldsymbol{A}(k)$成立而 $\boldsymbol{A}(k+1)$不成立这样的事情;　　(7)

显然,有下述事实②:

② 任何实施了步骤(1)~(7)的人都确定了上述事实①的存在;

鉴于在步骤(1)~(7)中作为依据的 $\boldsymbol{A}(n)$的内涵、$2(k+1)-1=2k+1$、$k^2+2k+1=(k+1)^2$、相等关系的传递性、相等的项可互相置换,其确实成立均无须依据$\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$本身是否成立。因此有下述事实③:

③ 确定者在确定上述事实①存在时,无须依据确定 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$本身是

否成立。

对于上述事实①、②、③,可以综合在一起简明扼要地陈述为:可独立于 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 本身是否成立确定不会是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ 成立而 $\boldsymbol{A}(k+1)$ 不成立。

"式 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 成立或不成立"指的就是"作为相应的式的语义的客观的数学事件 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 为有或为无"。因此,上述对事实①、②、③的综合也可以同义地陈述为:可独立于 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 本身的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}(k)$ 而无 $\boldsymbol{A}(k+1)$。

这个客观事实就是充分条件事件,并用"$\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$"符号地表示。整个充分条件事件 $\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$ 的有无不仅不取决于其前、后件 $\boldsymbol{A}(k)$、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 本身的有无(从而不是其前、后件的有无值的有无值函数——真值函数),而且,必定可独立于前、后件本身的有无值(即,可在无须确定其前、后件本身的有无值的情况下)确定。充分条件事件"…⇀…"的自然语言表述形态在不同的语境中可以采用:"若……,则……","……必然……","……是……的充分条件","……就……"等句型;人们有时也会不大恰当地说成"假定……成立,得出……也成立"(特别提请注意:语句或式是否成立就是相应的客观事件是否为有。这是不以人的意志为转移的客观事实,因而不可假定;确定充分条件事件是否为有是无须做这种假定的——因为"可独立于其前、后件本身的有无确定"!)。

综上分析,我们得出下述结论:

语句"若 $\boldsymbol{A}(k)$、则 $\boldsymbol{A}(k+1)$"的逻辑语义就是为其所指谓的客观的充分条件事件 $\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$——可独立于 $\boldsymbol{A}(k)$ 、$\boldsymbol{A}(k+1)$ 本身的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}(k)$ 而无 $\boldsymbol{A}(k+1)$。

9.2.2 上述实例中充分条件关系的两个独立性

以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示任意的客观事件。包含在充分条件事件 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 中的"可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的有无确定"这个重要的逻辑性质称为"充分条件关系对确定前、后件的有无的独立性",又称为第一独立性,并简称为一独。于是,对充分条件事件 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 的规定可进一步紧缩为:

具有一独的不会是有 $\boldsymbol{A}$ 而无 $\boldsymbol{B}$。

具有还是拒斥一独,这是作为刻画清楚后的传统形式逻辑中的必然联系的充分条件关系与正统数理逻辑中的真值函数关系实质蕴涵(简称蕴涵)的原则分野。充分条件命题、蕴涵命题分别是关于充分条件事件、蕴涵事件的思考,其真假取决于被思考的相应客观事件的有、无。众所周知,纯真值的蕴涵命题 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 的真值完全取决于支命题 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的真值,前者是后者的一个特定的二值的离散数学函数,欲确定 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 的真值,需依赖于确定 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的真值。包含在真值函数蕴涵事件中的这种离散数学性质可称为第一依赖性,并简称为一依。依据一

独这个逻辑标准，(α)“雪是黑的”与“2 加 2 等于 4”之间、(β)“$\boldsymbol{C}$ 且非 $\boldsymbol{C}$”与“$\boldsymbol{D}$”之间都不满足$\rightharpoonup$(充分条件)关系，从而上述 α、β 的左右事件之间都没有充分条件(或必然)联系；可是，依据一依这个离散数学标准，上述 α、β 的左右事件之间全都满足→(蕴涵)关系。依据一独这个逻辑标准，结合数学规律，我们轻而易举地确定了前述实例充分条件命题 $\mathbf{A}(k)\rightharpoonup\mathbf{A}(k+1)$ 为真；然而，倘若把其中的“$\rightharpoonup$(充分条件)”换成“→(蕴涵)”，依据一依这个离散数学标准，变换后的蕴涵命题 $\mathbf{A}(k)\rightarrow\mathbf{A}(k+1)$ 的真假在其支命题 $\mathbf{A}(k)$、$\mathbf{A}(k+1)$ 的真假被确定之前是确定不了的。因此，离散数学的二值函数蕴涵关系不可硬充当具有一独的充分条件(或必然)关系，蕴涵关系在数学归纳法中无用武之地。

依据其成立是否只取决于前后件的逻辑结构，是否还取决于前后件的经验性质，充分条件事件可二分为逻辑的(如，$\boldsymbol{A}(k)\wedge[\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)]\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$)和经验的(如，$\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$)。与一独相辅相成，对于一系列逻辑充分条件事件和任意经验充分条件事件来说，还有一个十分重要的逻辑性质。还是结合前述实例经验充分条件事件 $\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$ 进行说明。非常明显，对于某个确定的正整数 k(譬如，正整数 5)来说，确定 $\boldsymbol{A}(k)$(譬如，$\boldsymbol{A}(5)$)为有可在无须依据确定 $\boldsymbol{A}(k+1)$(譬如，$\boldsymbol{A}(6)$)是否为有的情况下实施。这个包含在充分条件事件 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 中的重要的客观的逻辑性质可简要地表述为：

可独立于 $\boldsymbol{B}$ 的有无确定 $\boldsymbol{A}$ 为有。

我们称这个逻辑性质为“确定充分条件关系前件为有对后件有无的独立性”，又称为第二独立性，并简称为二独。一独、二独合称两个独立性，并简称为两独。包含在一系列逻辑充分条件事件和全部经验充分条件事件中的两独，分别称为逻辑两独和经验两独。逻辑两独由且仅由逻辑科学(提出逻辑标准并予以实施)来确定；经验两独则需由有关的经验科学(如数学、物理、化学等)会同逻辑科学(即依据逻辑标准)一起来确定。具有两独的逻辑充分条件式就是能据以从已知获取新知的推理式，是当代形式逻辑最重要的研究对象。可以严格证明：一系列蕴涵重言式的前后件之间不具有一独(这些蕴涵重言式构成了蕴涵怪论)；任何蕴涵重言式的前后件之间不具有二独——只有在能直接确定后件为真的情况下，才能确定前件为真(正因为如此才被称为“重言式”——同语反复，必定循环)，这可以称为蕴涵的第二依赖性(确定前件为真依赖于确定后件为真)，并简称为二依。一依、二依合称两个依赖性，并简称为两依。因此，正统数理逻辑中的具有两依(从而不能得出新知)的蕴涵重言式与具有两独(从而能得出新知)的推理式殊异；这种二值的离散数学真理可应用于获取新知以外的需要这类二值的数量关系规律的场合，如在外延电子数字计算机的应用中其贡献是卓著的。

9.2.3 两个独立性在证明中的作用

现在分析"据……,故知……"的逻辑含义。

在本节一开头处的引文中出现的"据(1)、(2),故知……"里的(1)、(2)为:

(1) $\boldsymbol{A}(1)$成立,即有 $1=1^2$,那是明显的事实;

(2) "若$\boldsymbol{A}(k)$,则$\boldsymbol{A}(k+1)$"成立,即有充分条件事件$\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$,已如前述。

鉴于在(2)的$\boldsymbol{A}(k)$ 、$\boldsymbol{A}(k+1)$中出现的k是"某个正整数",故而可以是1、2、3、…。因此,有下述充分条件事件的无限序列:$\boldsymbol{A}(1)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(2)$, $\boldsymbol{A}(2)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(3)$,$\boldsymbol{A}(3)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(4)$,…。(1)(2)并列起来,就有下述合取(即并存)事件:$\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(1)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(2)]$。依据众所周知的推理式$\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(1)\rightharpoonup \mathrm{A}(2)]\rightharpoonup\boldsymbol{A}(2)$(现行传统形式逻辑称为"充分条件假言推理肯定式",当代形式逻辑称为"充分条件推理肯定式",由于具有逻辑两独,故而能据以从已知得出新知,根本不同于具有两依的正统数理逻辑的蕴涵重言式),可证明有$\boldsymbol{A}(2)$;再依据$\boldsymbol{A}(2)\wedge[\boldsymbol{A}(2)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(3)]\rightharpoonup\boldsymbol{A}(3)$可证明有$\boldsymbol{A}(3)$;…;如此往复,可依次证明有$\boldsymbol{A}(4)$,$\boldsymbol{A}(5)$,…;以至无穷(从理论上说,出现在$\boldsymbol{A}(k)$中的$k$要多大有多大)。与在前面分析的实例中讨论的具有$\boldsymbol{A}(n)$形的式的无限序列相类似,这里遇到了从直接确定有$\boldsymbol{A}(1)$开始的继而依次证明有$\boldsymbol{A}(2)$、$\boldsymbol{A}(3)$、…的证明的无限序列。从外延上说,这个证明的无限序列是不可能穷尽地逐一列举的。然而,其内涵是可以有限地把握和陈述的,那就是:"有:$\boldsymbol{A}(k)$,并且,若$\boldsymbol{A}(k)$则$\boldsymbol{A}(k+1)$;所以:有$\boldsymbol{A}(k+1)$。"这可以符号地表述为:

$$\boldsymbol{A}(k)\wedge[\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)]\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1) \qquad \text{(甲)}$$

与上述外延不可逐一列举然而内涵却可以有限地把握和陈述的证明的无限序列相应,可得出下述关于正整数的事件的无限序列中的任一事件为有:

$$\boldsymbol{A}(1), \boldsymbol{A}(2), \cdots, \boldsymbol{A}(k), \boldsymbol{A}(k+1) \qquad \text{(乙)}$$

而上述已被确定为有的事件的无限集(外延)的共仅属性(内涵)可有限地把握并表述为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$。其中,$\boldsymbol{n}$为任意的正整数。

分析至此,即可把上述可得出无限多个结果(见乙)的无限多个证明(见甲)归结为一个证明:

"有:$\boldsymbol{A}(1)$,并且,若$\boldsymbol{A}(k)$则$\boldsymbol{A}(k+1)$;所以:有$\boldsymbol{A}(n)$。"

这也可与之同义地表述为在前面分析的实例中所采用的:

"据有$\boldsymbol{A}(1)$,并且有若$\boldsymbol{A}(k)$则$\boldsymbol{A}(k+1)$,故有$\boldsymbol{A}(n)$。"

这也可用符号同义(即指谓同一客体)地表述为:

$$\Vdash \boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)]\rightharpoonup\boldsymbol{A}(n) \qquad \text{(丙)}$$

这就是"数学归纳法"的表达式。其中$\boldsymbol{A}(1)$称为"基始",坚实而有限;

$\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$称为“归纳”，可归纳递进至无限。这是被称为“归纳法”的演绎。符号表达式丙的语义为下述前件已确定为有从而可间接确定原本未确定（事实上是无法直接确定）的后件为有的客观的充分条件事件（为了方便，以 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}(1)\wedge[\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)]$、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$）：“可独立于 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 本身的有无确定（一独）不会是有 $\boldsymbol{B}$ 而无 $\boldsymbol{C}$，可独立于 $\boldsymbol{C}$ 的有无确定 $\boldsymbol{B}$ 为有（二独）；已确定 $\boldsymbol{B}$ 为有，从而可由之确定原本未确定的 $\boldsymbol{C}$ 为有。”这就是“据……，故知……”的逻辑含义。

上述客观充分条件事件符号表达式的最左边的符号“$\Vdash$”中的“$\vDash$”表示“右式是客观规律”，其中两短横表示“两独”；第一条竖线表示“前件已确定为有”。

对这个客观规律的自然语言表达形态还可以是“……，所以，……”，“由……，证明……”，等。

上述客观规律中的两独指引人们从已知（确定 $\boldsymbol{A}(1)$、$\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1)$为有）进入新知（由之确定原本未确定也不可能直接确定的 $\boldsymbol{A}(n)$为有）；以从内涵出发的有限手段（通过有限可实施的步骤——确定有 $\boldsymbol{A}(1)$为 1 步，确定有 $(\boldsymbol{A}(k)\rightharpoonup\boldsymbol{A}(k+1))$为 7 步，共 8 步）去把握无限外延（确定具有 $\boldsymbol{A}(n)$形的无限多个式成立）。而这种可在有限步内实施的提取无限集的内涵（共仅属性）从而确定无限域上的事件间的第一独立性的方法称为“内涵科学分析法”。

以（丙）表达的具有两独的客观规律仍属于数学规律，其中的两独仍是经验的（这里是数学的）。在普通逻辑思考实际中，往往把较为繁复的逻辑证明表述为像（丙）那样简练。依据这个数学规律做出的证明的严格而完整的逻辑表达式应为：

$$\Vdash[\boldsymbol{B}\wedge(\boldsymbol{B}\rightharpoonup\boldsymbol{C})]\rightharpoonup\boldsymbol{C} \qquad (丁)$$

“$\Vdash$”中的“$\vDash$”表示客观的逻辑规律“客观推理律”，两短横表示其中的逻辑两独，第一条竖线表示前提 $\boldsymbol{B}\wedge(\boldsymbol{B}\rightharpoonup\boldsymbol{C})$已确定为有（也就是引文中的“据（1）、（2）），由之去得出由于逻辑两独在确定前提（即（1）、（2））时并未确定的逻辑后承 $\boldsymbol{A}(n)$为有（即引文中的“故知……”）。这就实现了以有限（有限的几个可实施的步骤）把握无限（无限域上的无限多个事件），从已知（确定前提为有）进入新知（得出在确定前提为有时并未确定的后承为有）。

这就是充分条件关系的经验的与逻辑的两个独立性在证明中的作用的具体体现。

从产生过程和实际使用来看，经验两独是逻辑两独的渊源和归宿。两独是充分条件关系的逻辑精髓，是作为以有限把握无限、从已知进入新知的普遍适用的工具的逻辑科学这座摩天大厦的两块坚实的基石。如果说，逻辑科学势必茁壮地成长为根深叶茂、硕果盈枝的参天大树，那么，包含在充分条件关系中的两独是那大树萌芽时的两片生机勃发的翠绿子叶。

9.3 已证明的结论是否已证实

9.3.1 证实的定义

要切实地探讨证明与证实之间的联系与区别,除了严格地规定证明外,还得规定证实。我们将从直接证实开始给证实下一个一般归纳定义。由于直接证实规定为直接通过实践揭举一命题的原型,这里包含实践。故而,在规定清楚实践之前证实是不清楚的。因此,证实的清晰化有待于对实践的规定。我们希望,下面从直接证实出发的证实的一般归纳定义将有助于对实践的精确规定。

证实的一般归纳定义如下。

(1) 直接证实是证实(这称为基始:证实至少包括直接证实)。

(2) 若前提与推理式已证实,则通过证明得出的结论已证实(这称为施归纳于证明的次:直接证实可以认为是0次证明——0次使用证明,即不使用证明;然后,使用1次证明为1次;…;使用 i 次证明为 i 次;…;使用 n 次证明为 n 次。不管 n 是多大,这从0次开始直到 n 次为止的证明的所有结论均已证实)。

(3) 一命题已证实仅当满足(1)或(2)(这称为限制约定)。

(1)、(2)说明了证实至少包括些什么,(3)说明了证实至多包括些什么。(1)、(2)、(3)这三者结合起来,才唯一确定地规定了证实的范围。

我们称对0次以上(即至少使用1次证明)的结论的证实为结论型的间接证实。因为,通过至少使用1次证明做出的间接证实只施加于证明的结论。这一段只讨论结论型的间接证实,因此省去定语“结论型的”,简称为间接证实。是否承认间接证实是一种证实,症结在于:是否承认人类的社会实践确实已经证实了称为证明的从已知真理去得出新真理的逻辑真理。症结在于:在鉴别称为证明的这种逻辑真理的真理性时,其标准究竟是人们亿万次重复的实践,还是一些人心目中的教条与偏见。

提请注意,间接证实,亦即按方式(2)至少通过1次证明进行的证实,其前提的证实未必是直接的,也可以是间接的。但是,尽管如此,追本溯源,最初的证实必须是直接的。从上述归纳定义可以明显地看出:在没有间接证实的情况下可以进行直接证实;然而,在没有直接证实的情况下就不可能有间接证实。间接证实必须以直接证实作为“基始”——基本的原始依据。

在战争中,在多数情况下,由于容易受时间、空间等条件的限制,一些命题无法直接证实,只能间接证实。譬如,1944年,苏军正在布置对德军的反攻,但不清楚德军防线的兵力部署情况。后来苏军通过前沿观察哨所观察发现,德军第一道战壕前积雪一片白,约一公里的地面上只有很少几处湿土。第二、三道战壕

前的积雪则被大量抛出的泥土覆盖成褐色。因此苏军司令员断定,第一道战壕内只有零星的值班观察员;第二、三道战壕内布有重兵。

这是因为,当时天气已经转暖,冰雪开始融化,导致掩体内变得泥泞,于是德军就会清理积雪,同时也会把带雪的泥土一起抛出,因此,如果某处被抛出的泥土多,那么该处兵力就多。后来,苏军命令炮火猛攻第二、三道战壕,果然有效地摧毁了德军的兵力。

9.3.2 已证明的结论是否已证实

已证明的结论是否已证实？这个问题是哲学界关于真理标准问题的探讨在逻辑学领域内的延伸与继续。

我们暂且不拟探讨"证明是不是检验真理的标准"这样的问题,因为在给出实践、检验与标准的严格、科学的定义之前,弄不清楚在检验真理的实践标准中是否可包含证明,即,弄不清楚证明是否可以成为检验真理的实践标准的组成部分。也许有人觉得证明是一种思考,属于精神活动的范畴;而实践则是人类改造客观外界的现实的感性物质活动;因此,实践当然不能包含像证明这样的精神活动。然而上述对实践的规定只不过是几种已提出的看法中的一种,并非定论。与之并列的已提出的关于实践的不同规定还有几种,例如,实践是社会的主体有意识、有目的地改造客观世界的感性物质活动。有一种意见甚至认为:"不错,目的是精神的东西,但精神的东西仍然能进入实践的过程;而且只有进入实践的过程,才有现实的实践活动,才能改造客观世界。"(《哲学研究》1981 年第 6 期,钟克钊《实践要素及其认识论意义》)这就允许把意识、目的之类的精神领域里的现象纳入实践之中,成为实践的组成部分。不过,无论如何,任何有理智的正常人所从事的改造客观世界的感性活动绝不可能是"无意识"、"无目的"的。上引这两种观点之间的分歧只不过在于:是否把这必不可少的意识、目的之类的精神现象从改造客观世界的活动中分离出来,然后,把那活动剩下的光秃秃的纯感性物质部分称为实践。对这些问题,哲学家们已经争论了多年,如今还方兴未艾。在这种实践究竟是什么还众说纷纭、莫衷一是的情况下,我们无法讨论"证明是否是检验真理的标准"这样的问题,而只能绕开这些分歧,把这个问题提炼得较为单纯些,探讨"已证明的结论是否已证实"。

为了进行缜密切实而不浮泛空洞的探讨,我们把上述问题结合一个实例来提出。我们知道,人类在有史以来的无数次战争中,得出了许多军事科学理论,而且新的军事科学理论还在不断涌现。假如用 e 来指称这不断涌现的新军事科学理论即新军事科学真理中的某一条。已证实"实践是检验任何真理的标准(α)",可由之推出"实践是检验 e 的标准"(α'),不管 α' 中的 e 是指哪一条新发现的真理,这就是说,α' 是通过已证实的 α 为前提的证明得出的结论。现在,问

题是:①α' 是否已证实? 要回答这个问题必须先回答下述问题:②α 的内容是什么? ③证实 α 意味着什么? ④什么叫 α' 是以 α 为前提的证明的结论? ⑤α' 的内容是什么? ⑥什么叫证实 α' ?

我们先来对问题②做回答:α 的经验内容是:1 元关系"……是真理"——$s(\cdots)$,"实践是检验……的标准"—— $p(\cdots)$;破折号后标出的是相应的符号表达。α 的逻辑内容的表达式是:$s(x)\rightharpoondown p(x)$。这就是说,$\alpha$ 的内容是:在"不管"个体变元给予赋值后 1 元原子事件 $s(x)$、$p(x)$ 的有无的情况下就"管"定了不会是有 $s(x)$ 而无 $p(x)$。对 $s(x)$、$p(x)$ 的有无是彻底地"不管",然而,对不会是有 $s(x)$ 而无 $p(x)$ 却又是执著地"管"。对前者"不管"得彻底,才能对后者"管"得执著。如果说逻辑科学如今已成长为一棵浓荫盖地的参天大树,那么,这"不管"得彻底而又"管"得执著的充分条件命题就是种子,在那粒小小的种子里就孕育着大树的胚芽。

再来对问题③、⑤与⑥做出回答:据确定定理,证实 α 当且仅当确定 α,即 α 有原型且已为人们所知道。α 有原型意味着事实上存在下述规律:不管 x 是什么个体,有 $s(x)$ 必定有 $p(x)$,或者,不可能有 $s(x)$ 而无 $p(x)$。我们把人们究竟怎样及何以能够发现这样的规律这一类问题留给哲学家去探究。我们仅从人们确定已经发现了这样的规律这个事实出发。令 e 为在确定 α 后新涌现的某条真理。显然,人们在确定 α 时不可能依据 $s(e)$ 与 $p(e)$,因为 e 此时尚未产生。然而,人们在当时并不知道 e 的情况下确定的 α,却对后来产生的 e 也生效,即,e 一经诞生,人们马上就可以把 e 代入 α 中的 x 而得出 $s(e)\rightharpoondown p(e)$,而这就是 α' 的逻辑内容的表达式。α' 与 α 的内容区别在于:α' 比 α 多一项经验内容,那就是指定的某一条真理 e;α 比 α' 多一项逻辑内容,那就是正由于并不专指某个体因而可以指任意个体的个体变元 x。通常称 α 为一般,称 a' 为个别,因为,个体变元 x 是一般的个体,而个体常项 e 是个别的个体。这里提请注意的是:一般不是在考察了一切个别(这是不可能也是不必要的)之后,而是在本来未知的新的个别不断涌现的情况下获得的。证实 α' 当且仅当确定了 α',亦即 α' 有原型且已为人们所知。有一项非常重要的事实,人们在未确定 α' 的情况下即已确定了 α,确定 α 并不依据确定 α'。这是很明显的,因为在确定 α 时 e 尚未产生。故而,α' 这个命题也未形成,当然就更谈不上确定其为真了。我们在这里指出了一些事实,这些事实非常之重要,对这些事实可以有许多议论,但是我们只要这些事实而不要什么议论。

问题①需待问题④获解后再回答。这里,需引用证明的定义和确定定理。

以 $\Vdash \mathbf{A} \rightharpoondown \mathbf{B}$ 表示 **A** 证明 **B**。在符号 $\Vdash$ 中。两个短横表示两个独立性,第一条竖线表示前提已确定。据确定定理,前提已确定当且仅当已证实。因此,$\Vdash \mathbf{A} \rightharpoondown \mathbf{B}$ 意味着实践证实了:①不管 **A**、**B** 有无原型,仅由于 A、B 的逻辑内容就决定

了不会是 A 有原型而 **B** 无原型,亦即,当 **A** 有原型时 B 必定有原型;②**A** 有无原型可独立于 **B** 确定;③**A** 有原型。因此,据已证实的①、③,**B** 必然有原型,且证明的做出者已知 **B** 有原型,故而,**B** 已确定为真;据确定定理,B 已证实。据②,**A** 可独立于 **B** 确定,即,**B** 不仅是已证实的真理,而且,对 **A** 来说还是新真理。证明是关于从已有真理去得出新真理的逻辑真理。从已有真理去得出新真理,这是逻辑科学的渊源与归宿。

请注意,当我们在给证明下逻辑学上的定义时,用的是确定,未用证实。前者已定义,后者尚未定义。而后,在对证明的上述本质做讨论时,用了未定义的证实,其依据是确定定理(确定与证实等价)。在做这种讨论时,要强调的是:证明的原型(推理式与前提的原型)与结论的原型的存在确实都已获得实践标准的检验,尽管,在做这种讨论时我们依然说不清楚实践、检验、标准究竟是指什么,即,证实究竟指的是什么。这种使用说不清楚的术语进行模糊的讨论在哲学界是司空见惯的,有时,作为清晰的讨论的前奏,似乎还是必要的,或者说是难免。因此,我们的思路是:推理式的逻辑真与前提的经验真均已确定,因而,结论的经验真也已确定;据确定定理,结论已证实。

至此,我们就可以回答在前面提出的问题④并回答①了。

问题④与①的回答:α' 是以 α 为前提的证明的结论,当且仅当,已证实$\Vdash \alpha \rightarrow \alpha'$,即,已证实$[s(x)\rightarrow p(x)]\rightarrow[s(e)\rightarrow p(e)]$为推理式与证实 α 为真理。这确实均已证实:前者是称为代入定理的关于从已有真理去获得新真理的逻辑真理;后者是关于真理的实践标准的哲学真理。故而,α' 是以 α 为前提的证明的结论。因此,α' 在作为结论得出时就已证实,单就作为其可靠性不低于前提 α 的真理来说,不必另觅其他的证实。还提请注意,在证实 α 与 $\alpha\rightarrow\alpha'$ 时,鉴于内涵命题与推理式的两个独立性,α' 并未证实;α' 是在作为结论推出后才证实的。因此,α' 不仅是证实了的真理,而且,对 α 来说还是新真理。

9.4　结论对前提来说是否新知

逻辑证明能否得出新真理,结论对前提来说是否新知?这是逻辑史上长期未获解决的问题。

下面,我们结合一个科学史上通过证明得出新真理的事实作为例子,进行一些分析和讨论。

牛顿说过:“我之所以能看得远,是因为站在巨人的肩膀上。”这“巨人”指的就是长期而又广泛地从事社会实践的世世代代的前人。这巨人的实践深刻而又宏大,我们不妨称之为渊博的实践,以区别于少数人短期内从事的浅狭的实践。达尔文曾著有《兰之虫媒》一书。他像牛顿一样地站在巨人的肩膀上,总结出一

项由渊博的实践证实了的真理:“凡兰皆虫媒(β)”。β 的式为 $s(x)\rightarrow p(x)$。书出未几,有曾到过马达加斯加者发现岛上长着一种堪称巨兰的长距武夷兰。它的唇瓣花萼的管状延伸细长达 29 厘米,宛如结绳工匠所用的长针,而花蜜隐藏在它的底部。发现巨兰的人不曾见到也不敢相信会有这么细长的舌头的蜂蝶,于是就写信诘问达尔文,用他身经的浅狭的实践来否认 β 的真理性。达尔文对曾获巨人渊博的实践证实的 β 的信念坚如磐石。他据 β 与“巨兰是兰($s(e)$)”证明了“巨兰虫媒($p(e)$)”,并果断地预言该岛必定具备相应长度口吻的虫蛾吸吮巨兰的花蜜,为其传粉。一些不曾攀登上巨人肩膀上的生物学界侏儒还为此嘲笑达尔文,认为根本不可能有如此长口吻的蛾子。然而,事实怎么样呢?距达尔文预言不久,人们经过周密的观察,果然在该岛发现了一种天蛾状的蛾子,它的吻在飞行时盘卷起来竟达 20 圈之多!达尔文的预言与能得出新真理的证明一起胜利了。这非同小可的胜利使当时的生物学界大为震惊。达尔文所用的推理式纳入我们的形式语言应是:

$$s(e)\wedge[s(x)\rightarrow p(x)]\rightarrow p(e)$$

这可以认为是下述二推理式的紧缩:$[s(x)\rightarrow p(x)]\rightarrow[s(e)\rightarrow p(e)]$,$s(e)\wedge[s(e)\rightarrow p(e)]\rightarrow p(e)$,前者称为代入定理,后者称为充分条件推理肯定式。证明了 $p(e)$ 后,结论 $p(e)$ 是否已证实呢?这只要考查一下:①$p(e)$ 的原型是否存在,②当 $p(e)$ 有原型时达尔丈是否知道有。对①、②的问答都是肯定的,因此,$p(e)$ 一经证明,便已证实。那么,作为结论的 $p(e)$ 是否在证实其前提就已证实了呢?显然,证实 $s(e)$ 的人并未证实 $p(e)$(他根本不相信 $p(e)$);而证实 β 的包括达尔文在内的“巨人”也并未证实 $p(e)$,因为,其时 e 尚未发现,连 $p(e)$ 这个命题都未形成,又何尝谈得上“证实”呢?!

由有效式 $s(e)\wedge[s(x)\rightarrow p(x)]\rightarrow p(e)$(以 α 表示)刻画的逻辑存在事件是永远、普遍存在:不管是哪个论域、论域上的什么样的 1 元关系 s、p 及个体 e。不管它们有些什么样的非逻辑性质,只要具有上述逻辑结构,该事件便永远存在。有效式 α 所刻画的逻辑规律像张大网,把宇宙间满足 α 的逻辑结构的对象域、1 元关系、个体一网打尽。常真闭充分条件式 $s(x)\rightarrow p(x)$(以 β 表示)则揭举经验(非逻辑的)常有事件:具有“兰”的性质和具有“虫媒”的性质之间的充分条件关系,对于论域“植物”中的古往今来的个体来说,是普遍存在的。常真式 β 所揭举的经验规律像面中网,把论域“植物”中的已生、方生、未生的个体囊括无遗。由原子式 $s(e)$ 所表述的原子事件是事实上存在的:巨兰确实是兰,具有兰的性质。原子式 $s(e)$ 所表述的事件像面小网,只捕捞了一个 1 元关系“兰”和一个个体“巨兰”。在地球上还没有人的时候就有个体“巨兰”,就有 1 元关系“兰”、“虫媒”,就有 1 元原子事件“巨兰是兰”,就有经验规律“某个体是兰和该个体虫媒之间的充分条件关系”,就有逻辑规律内涵三段律“合取事件 $s(e)\wedge$

$[s(x) \rightharpoonup p(x)]$和原子事件$p(e)$之间的逻辑条件关系”。按存在的时间上的顺序来说,应是:逻辑规律内涵三段律$s(e) \wedge [(s(x) \rightharpoonup p(x))] \rightharpoonup p(e)$,经验规律$s(x) \rightharpoonup p(x)$,原子事件$s(e)$。在巨兰出现之前,就有闭充分条件事件“兰必定虫媒”,巨兰一出现,就为这面中网所囊括:在巨兰、兰、虫媒出现之前就有内涵三段律,巨兰、兰、虫媒一出现,就被捞进这张大网;于是,在这张大网里,在出现原子事件“巨兰是兰”的同时,必然出现原子事件“巨兰虫媒”。

在内涵三段律存在了不知多少年之后,出现在地球上的中网兰必虫媒律投入内涵三段律大网。这之后又是若干亿年,在马达加斯加岛上出现的原子事件巨兰是兰投入兰必虫媒律中网,并因而投入内涵三段律大网。于是,万事齐备,这原子事件巨兰虫媒就合乎规律地同时产生。之后又是若干亿年,亚里士多德认识了内涵三段律的一个侧面,提出了三段论推理式。又过了两千二百年,达尔文认识了兰必虫媒律,断言“凡兰皆虫媒”。又过了若干时日,写信诘问者认识了原子事件“巨兰是兰”,断言“巨兰是兰”,但他未亲眼目睹也不敢相信“巨兰虫媒”。达尔文从诘问者的信上得知有原子事件$s(e)$,于是,据为他所发现的经验规律兰必虫媒律和为亚里士多德所揭露的逻辑规律内涵三段律推知存在原子事件$p(e)$。这在当时只有达尔文相信,尽管他和别人一样未曾亲见这个事件。事情就是这样。达尔文使人惊叹的预言的内容(原子事件$p(e)$),其实早已存在了不知多少亿年。达尔文在做出这个预言的过程中所想到的作为依据的前提和推理式的内容(原子事件巨兰是兰、经验规律兰必虫媒律和逻辑规律内涵三段律)也早已存在了不知多少亿年。要说这里有什么规律,那就只有这些前提、推理式、结论的内容之间的客观规律:先后相继产生那些作为前提、推理式的内容的原子事件、经验规律和逻辑规律一旦事实上齐备,这作为结论的内容的原子事件也就在同一瞬间必然地合乎规律地产生。然而,这些前提、推理式、结论,则只不过是人对原子事件、经验规律、逻辑规律的认识、整理和表述。作为认识(思维),它们可以产生,然而未必产生:在亚里士多德前就未产生内涵三段论,在达尔文之前就未产生命题“凡兰皆虫媒”,到了那位写信诘问者总算产生了命题“巨兰是兰”,可是,他并不相信“巨兰虫媒”,反而相信“巨兰并不虫媒”。这时,前提和推理式都已经齐备,然而,对于诘问者来说,结论并未必然地产生。可见,事实上,有了前提和推理式却未必有结论。这就是说,作为思考,前提、推理式和结论之间并不存在有前者而必有后者的那种规律性联系。即使对于事实上依据前提、推理式得出结论的达尔文来说,也并非什么被传统逻辑称为“思维规律”之类的东西在他身上起了作用(因为并不存在这一类东西),而是他对经验的和逻辑的客观规律的认识、整理和表述。

巨人的渊博实践证实的“凡兰皆虫媒”(β)是个内涵充分条件命题。实际上,任何具有科学意义的为渊博实践证实了的内涵充分条件命题其所潜在地涉

及的领域总是超过证实它的早先的有限实践的范围的。在有限实践的范围内证实的内涵充分条件命题包含着可以向更广大的有限甚至无限领域开拓的潜在可能,这是事实。我们把人类究竟怎样及何以能够有限地证实可以向更广大的有限甚至无限领域扩展的内涵充分条件命题这一点留给哲学家去深入探究,我们仅从承认这个事实出发。所谓证明,就是把真命题从证实它的早先的有限实践的范围向为其所潜在地涉及更广大的有限甚至无限的领域扩展。这种扩展是有规律的,这种扩展的规律取决于现实世界个体的 1 元或多元关系、关系间的真值函数关系或充分条件关系的固有而又统一的规律,而逻辑科学就是研究这种扩展的规律的科学。现实世界的上述规律就称为客观的逻辑规律。这里,所谓客观世界的逻辑规律,就是逻辑存在事件,就是只取决于由在其中出现的项的子项的逐阶形成过程和子事件的逐层形成过程决定的结构(即逻辑结构)就普遍地存在的事件;而逻辑的充分条件规律就是只依据其逻辑结构就普遍地存在的充分条件事件。逻辑科学主要是研究客观世界的逻辑规律(尤其是其中的逻辑的充分条件规律)的科学。这种客观世界的逻辑规律在人类诞生之前早就广泛地存在,人类认识了这种广泛存在的规律后,便逐渐形成了逻辑科学。逻辑的充分条件规律 $\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$ 的最根本特征是:其本身的存在并不取决于其前、后件 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的有无,而当具有一定逻辑结构的事件 $\boldsymbol{A}$ 一旦存在,具有相应逻辑结构的事件 $\boldsymbol{B}$ 也必然存在。这种从事件 $\boldsymbol{A}$ 的存在到事件 $\boldsymbol{B}$ 的存在的过渡是客观的有规律的过渡。在人认识了这个客观的从事件 $\boldsymbol{A}$ 到事件 $\boldsymbol{B}$ 的必然的过渡后,就在人的意识里产生了从命题 **A** 到命题 **B** 的思维的过渡,以此作为对这种客观的过渡的一种认识、整理和表述,这就是所谓的推理论证。鉴于这种思维的过渡取决于人对客观的过渡的认识与否和认识的正误,因此,尽管客观的过渡是必然的,而思维的过渡不具有与之相应的必然性:可以发生,也可以不发生;可以这样进行,也可以那样进行。因此,这种思维的过渡并不是思维本身的规律,而是对客观的过渡的一种认识、整理和表述,是一种受思维规律支配的思维现象。

逻辑在研究客观世界的逻辑规律并把研究的结果表述为推理论证格式的同时,也研究作为表述论证方式的推理论证格式自身。前者称为语义的研究,后者称为语构的研究。但是,后者仍然不能称为研究思维规律。因为,作为逻辑语构学研究对象的推理论证格式自身并不是什么思维规律,而是客观规律的一种表述方式。逻辑语构学的最终目的并不是研究推理论证自身,而是通过研究推理论证自身来更加透彻而又完备地研究客观的逻辑规律。语构学不仅受语义学的指导,而且是为语义学服务的。古希腊的唯物主义哲学家德谟克利特(Demoklittus,约公元前 460—370)在 24 个世纪以前的逻辑科学萌芽时期早就认为“逻辑是研究自然的工具”。

总之,逻辑研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律,并把这种研究的结果用符

号语言表述为命题结构和推导格式(语义学);以此为渊源和归宿,逻辑还研究用符号语言表达命题结构和推导格式的性质(语构学);为了实际应用,逻辑还研究用符号语言表达命题结构和推导格式在进行普通逻辑思考时必须运用的自然语言中的陈述方式(语用学)。这就是说,逻辑语义学研究客观逻辑,而逻辑语构学研究表达客观逻辑的逻辑思维,逻辑语用学则研究承载逻辑思维的自然语言外壳。逻辑在研究客观的逻辑规律的同时也研究反映客观逻辑规律的思维及其语言载体,然而,逻辑对后二者的研究不能称为思维规律的研究,因为,逻辑思维及其语言载体本身并非是支配思维现象的思维规律,而是由思维规律支配的思维现象。思维确实有规律,但逻辑并不研究,而且在事实上,国内流行的语义、语构、语用三位一体、混沌不分的形式逻辑也不曾研究过。在很长的时期里,人们习惯于认为形式逻辑是研究思维规律而不是研究客观规律的科学,尽管在每一本宣称以思维规律为研究对象的形式逻辑书中所揭举的每一条逻辑规律事实上都是客观世界的规律,而并非思维自身的规律。所谓证明,就是巨人的实践渊博地证实了的下述反映现实世界的逻辑规律的逻辑真理:若具有一定逻辑内容的命题有原型,则具有相应逻辑内容的命题一定有原型。逻辑学就是研究推理论证的科学,就是依据上述逻辑真理把这种本来潜在的、扩展的可能变成现实的科学,这就意味着早先已证实了领域的实际延伸;延伸到哪里,证实到哪里。这就是说,随着逻辑证明过程的不断进展,实际上已获证实的领域就不断扩充。证明进展到哪里,证实也就扩充到哪里。在达尔文证明 p(e)的同时,证实也扩充到 p(e),虽然它在这之前并未证实。尽管 p(e)事实上有原型,达尔文也知道它有原型,因而是证实了的真理,然而,人们毕竟尚未直接见到它的原型,因而称之为预言。所谓预言,就是通过证明得出的由于其异乎寻常因而令人瞠目的那种暂时还未见其原型的结论,是上述扩充的特别精彩动人的部分。

当然,后来的实践又直接证实了 p(e)。要是万一以后的实践否定了 p(e),即,p(e)事实上不存在原型,将如何解释呢? 那很简单。这时,原来曾被认为是“真理”的β其实是谬误;原来曾被当做是“证明”的思考其实是前件虚假的推理;原来曾被当做是“结论”的 p(e)其实是虚假的后件。我们的探讨始终立足于事实上是什么,而不管人们曾将它当做什么。顺便说几句离题的话,幸而 p(e)这个预言是这尔文做出的,别人会费力气对此另做直接的再证实;要是预言 p(e)是换一个别的什么人做出的,而他又无条件去马达加斯加,那么,很可能,至今人们还会认为那到过该岛用身经的实践“证实”了的$\neg$p(e)是“真理”,而 p(e)及其前提β都是“谬误”!

我们称通过实践直接揭举一命题有原型为直接证实。为区别于直接证实,称通过证明对结论所做的证实为间接证实。上述科学史上的佳话说明了:通过证明间接然而渊博地证实了的真理“巨兰虫媒”驳斥了那位写信者直接然而浅

狭地“证实”了的谬误“巨兰并非虫媒”。

在办得到的情况下,对已证实的命题再另做证实不仅是有益的,甚至是必要的。不仅要对通过证明间接证实了的命题另做直接的再证实,而且,对已获直接证实的命题也要另做间接的再证实,这是由于不管是直接的还是间接的证实都具有相对性。

第 10 章　关于逻辑证明哲学意义的深入探讨

10.1　伽利略的功勋

把羽毛和铜钱一起密封在真空的玻璃管中,先竖握着玻璃管,然后突然颠倒,羽毛与铜钱就会以相同的速度同时从管子的上端落向下端。这便是如今几乎每一个中学生都做过的自由落体实验。可是,三百多年前,年轻的伽利略及其同代人在比萨大学课堂上听到的却依旧还是流传了两千年的权威的“亚里士多德自由落体运动法则”:重物的自由降落速度必定快于轻物。直到那时,这所谓的“亚氏法则”始终被人们当做神圣的“真理”,奉为正统的经典。然而,神学的叛逆者、迷信的掘墓人伽利略在他 26 岁时就用他缜密的逻辑思考,严格地证明了“亚氏法则”的否定。他站在广大的人们在长期劳动中获得的智慧这个“巨人”的肩膀上,高瞻远瞩地用凝结在推理式和物理定律中的世世代代人们亿万次重复的渊博的实践,间接地证实了那一直被认为由两千年的实践“证实”了的“亚氏法则”为谬误。伽利略直观的显然成立的论证过程如下:所谓的“亚氏法则”——“重物的自由降落速度必定快于轻物(α)”。在当时,已有下述可称为“固结物体合速度定律”的物理定律:“二运动物体固结起来的合速度必定不快于其中较快的(β)”。于是,伽利略就设想:有两个铁球,一大一小。要是把两个铁球固结起来称为合球,显然,合球比大球重(γ_1)。据 α 与 γ_1,可得出“合球的自由降落速度快于大球(δ_1)”。同样明显,大球比小球重(γ_2)。再据 α 与 γ_2,又可得出“大球的自由降落速度快于小球(δ_2)”。然而,据 β 与 δ_2,却可得出“合球的自由降落速度不快于大球($\overline{\delta_1}$)”。这就得出了一对矛盾:δ_1 与 $\overline{\delta_1}$。所以,可由已证实为真的 β、γ_1、γ_2,证明“亚氏法则”α(重物的自由降落速度必定快于轻物)为假。

在做出了上述证明后,伽利略已经用实践证实了真理 $\overline{\alpha}$。不过,他的证实在当时还是间接的。然而,陈述一般规律的真理 $\overline{\alpha}$ 本身是无法直接证实的,能直接证实的仅仅是其逻辑前提 $\overline{\delta_2}$:“大球的自由降落速度不快于小球”。$\overline{\alpha}$ 本身似乎只能间接地证实。当然,一些墨守成规的权威们对已被伽利略间接证实了的亵渎神圣的 $\overline{\alpha}$ 暴跳如雷了。为了制止这一帮只知道复述祖师经文的披着科学家外衣的僧侣们的喧闹,伽利略让这些人站在比萨斜塔的地基上,而他自己则携带着一个十磅一个一磅的两个铁球登上了那座 55 米高的从此永垂史籍的斜塔去做他

的为了直接证实以 $\overline{\alpha}$ 为推断的前提 $\overline{\delta}_2$,并开创了实验科学新纪元的著名的自由落体试验。“砰”的一声,那大小悬殊的两个铁球同时着地！可是,这种施加于能推出已间接证实了的 $\overline{\alpha}$ 的前提 $\overline{\delta}_2$ 的直接证实对于那些闭目塞听的权威们又有什么用处呢？那些人一开头被离经叛道的事实弄得目瞪口呆,待恢复了神智后就指责伽利略一定施展了什么障眼的魔法。确实,要是那些人承认伽利略发现的是真理,那么,他们就得改弦更张、重开新篇。这是既失体面又费力气的事情。为了光彩而又轻易地维护那早已赢得的煊赫威严,他们决心绞杀真理。在那些人看来:给这次大逆不道的试验提供罪恶的 55 米高度的斜塔会有错;不前不后地着地的一个十磅一个一磅的那两个铁球会有错;默默地接受那两个铁球尽管大小悬殊可是完全同时地落向自己表面的大地会有错;然而,那念熟了的正统的经典决不会有错！就这样,由于伽利略推翻了维护着那些人的身家性命的神圣的学术教义,从根本上冒犯了那些人,他就理所当然地被那些人理直气壮地排挤出比萨大学,并从此走上他的为追求真理而历尽艰辛的坎坷悲壮的奋斗生涯。

10.2 伽利略的证明纳入当代形式逻辑

下面,我们以当代形式逻辑为逻辑工具,对上述伽利略在三百多年前做出的直观地显然成立的证明进行严密的逻辑考核,周全地揭示出在每一步推导中所使用的推理格式;在此基础上,对证明的前提及其证实进行探讨。

对伽利略在这个证明过程中涉及的 1 元函数、2 元函数,各种变项、常项,两个 2 元关系,以及一系列原子事件和复合事件,我们已经在 1.4 节至 1.9 节中做过详细介绍。在此基础上,我们就能将用来表述在分析伽利略的论证过程时要用到的命题的自然语句译成符号表达式,并且列出伽利略证明实例表(见表 10.1)。在伽利略证明实例表中:式(formula)就是符号表达式的简称;式的右边列出的“式的解释”与左边的“自然语句”同义;最右边的“推理格式”栏里列出 7 条推理格式,其编号分别为(一)~(七)。

在伽利略证明实例表中:

(1) 左边的“序号”是各个语句的;右边的“编号”则是诸推理格式的。

(2) 序号 2 的“代号”栏中的“α_1 或 $\gamma_1 \rightharpoondown \delta_1$”指:整个的式 2 的代号为 α_1,而式 α_1 又是 γ_1(序号 3)与式 δ_1(序号 4)之间用$\rightharpoondown$号联结而成的。序号 5、9 的“代号”栏中的“或”仿此。

(3) 编号(一)“推理格式”栏中“$\dfrac{A(\mathrm{x,y})}{A(\mathrm{x,y})[\mathrm{a,b}]}$”表示“可以从 $A(\mathrm{x,y})$ 得出 $A(\mathrm{x,y})[\mathbf{a,b}]$”。余仿此。“$\boldsymbol{A}(\mathrm{x,y})(\mathbf{a,b})$”表示“在可代入的条件下,在 A 中出现的个体变元 x、y 分别以项 **a**,**b** 代入。”编号(七)中的“$\boldsymbol{A}(\mathbf{a})[\mathbf{b}]$”表示“在 A

中出现的项 **a** 以项 **b** 置换”。$\dfrac{A(x,y)}{A(x,y)[a,b]}$也可写成 $A(x,y)\vdash A(x,y)[\mathbf{a},\mathbf{b}]$，这两种同义的写法可视方便选用。

（4）序号4、12的“代号”栏中的 δ_1、$\bar{\delta}_1$ 左上角的 * 号表示此二者互相矛盾，即，推理（二）与（七）的结果 δ_1、$\bar{\delta}_1$ 互相矛盾。

表10.1　伽利略证明实例表

序号	代　号	自然语句	式	式的解释	推理格式	编号
1	α	重物的自由降落速度必定快于轻物	$h(x)>h(y)\rightharpoonup f(g(x))>f(g(y))$	若x的重量大于y的，则x的自由降落速度大于y的	代入规则。一般为：$\dfrac{\boldsymbol{A}(x,y)}{\boldsymbol{A}(x,y)[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$ 此处为：$\dfrac{\alpha}{\alpha_1}$	（一）
2	α 或 $\gamma_1\rightharpoonup\delta_1$	较重的合球的自由降落速度必定快于较轻的大球	$h(e_1+e_2)>h(e_1)\rightharpoonup f(g(e_1+e_2))>f(g(e_1))$	若合球的重量大于大球的，则合球的自由降落速度大于大球的		
3	γ_1	合球比大球重	$h(e_1+e_2)>h(e_1)$	合球的重量大于大球的	分离规则：$\dfrac{\gamma_1\rightharpoonup\delta_1,\gamma_1}{\delta_1}$	（二）
4	$*\delta_1$	合球的自由降落速度快于大球的	$f(g(e_1+e_2))>f(g(e_1))$	合球的自由降落速度大于大球的		
5	α_2 或 $\gamma_2\rightharpoonup\delta_2$	较重的大球的自由降落速度必定快于较轻的小球的	$h(e_1)>h(e_2)\rightharpoonup f(g(e_1))>f(g(e_2))$	若大球的重量大于小球的，则大球的自由降落速度大于小球的	同（一）。此处为：$\dfrac{\alpha}{\alpha_2}$	（三）
6	γ_2	大球比小球重	$h(e_1)>h(e_2)$	大球的重量大于小球的	同（二）。此处为：$\dfrac{\gamma_2\rightharpoonup\delta_2,\gamma_2}{\delta_2}$	（四）
7	δ_2	大球的自由降落速度快于小球的	$f(g(e_1))>f(g(e_2))$	大球的自由降落速度大于小球的		
8	β	二运动物体固结起来的合速度必不快于其中较快的	$f(x)>f(y)\rightharpoonup f(x+y)\ngtr f(x)$	若x的速度大于y的，则x与y固结起来的合速度不大于x的	同（一）。此处为：$\dfrac{\beta}{\beta_1}$	（五）
9	β_1 或 $\delta_2\rightharpoonup\delta_3$	二自由降落体大球与小球固结起来的合自由降落速度，必不快于其中自由降落速度较快的大球的	$f(g(e_1))>f(g(e_2))\rightharpoonup f(g(e_1)+g(e_2))\ngtr f(g(e_1))$	若大球的自由降落速度大于小球的，则二自由降落体大球与小球固结起来的合自由降落速度不大于大球的		

续表

序号	代　号	自然语句	式	式的解释	推理格式	编号
10	δ_3	二自由降落体大球与小球固结起来的合自由降落速度不快于大球的	$f(g(e_1)+g(e_2))\ngtr f(g(e_1))$	二自由降落体大球与小球固结起来的合速度不大于大球的	同(二)。此处为：$\dfrac{\delta_2\rightarrow\delta_3,\delta_2}{\delta_3}$	(六)
11	ε_1	自由降落体合球就是二自由降落体大球与小球固结起来	$g(e_1+e_2)=g(e_1)+g(e_2)$	自由降落体大球与小球固结起来就是二自由降落体大球与小球固结起来	相等置换定理。一般为：$\dfrac{\boldsymbol{A}(\mathbf{a}),\mathbf{a}=\mathbf{b}}{\boldsymbol{A}(\mathbf{a})[\mathbf{b}]}$ 此处为：$\dfrac{\delta_3,\varepsilon_1}{\overline{\delta}_1}$	(七)
12	$*\overline{\delta}_1$	合球的自由降落速度不快于大球的	$f(g(e_1+e_1))\ngtr f(g(e_1))$	合球的自由降落速度不大于大球的		

通过表列的推理(一)~(七),得出了一对矛盾:δ_1、$\overline{\delta}_1$。在进行七次推理时,先后采用了三个不同的逻辑规则或定理:代入规则(使用三次)、分离规则(使用三次)与相等置换定理(使用一次)。在七次推理的前、后件中,共出现12个不同的命题,它们依次是α、α_1、γ_1、δ_1、α_2、γ_2、δ_2、β、β_1、δ_3、ε_1、$\overline{\delta}_1$。从逻辑内容上来看,在12个命题中:5个(γ_1、δ_1、γ_2、δ_2、ε_1)为闭原子命题(不出现个体变元词或逻辑联结词);5个(α_1、α_2、β_1、δ_3、$\overline{\delta}_1$)为由闭原子命题构成的闭复合命题(不出现个体变元词但出现逻辑联结词"充分条件联结词"或"否定词");两个(α、β)为一般的内涵充分条件命题(出现个体变元词与逻辑联结词"充分条件联结词")。从在推理中出现的位置来看,在12个命题中:7个(α_1、δ_1、α_2、δ_2、β_1、δ_3、$\overline{\delta}_1$)依次为每次推理得出的后件;剩下的5个(α、γ_1、γ_2、β、ε_1)只在各次推理的前件中出现。

迄今,在推理(一)~(七)的后件中还始终不曾出现$\overline{\alpha}$,还得继续将推理的过程向纵深推进。下面,我们将尽量简要地阐明这个深入的过程。

众所周知,依据关于推理的可传递性,能推出**A**的前件的前件是能推出**A**的前件。因此,能推出δ_1的前件为α,γ_1;能推出$\overline{\delta}_1$的前件为$\alpha,\gamma_2,\beta,\varepsilon_1$。于是,我们有下述推理:

$$\alpha,\gamma_1\vdash\delta_1 \tag{八}$$

$$\alpha,\gamma_2,\beta,\varepsilon_1\vdash\overline{\delta}_1 \tag{九}$$

这里,$\vdash$表示推导关系:可从左边推导出右边;左边称为前件(或假设),右边称为后件(或结果)。

依据关于推理的合取律,这(八)、(九)二者可合成下述推理:

$$\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\beta,\varepsilon_1 \vdash \delta_1 \wedge \bar{\delta}_1 \tag{十}$$

再依据关于推理的充分条件引入律,当 α 为不可少的前提之一时,我们可从推理(十)建立下述推理:

$$\gamma_1,\gamma_2,\beta,\varepsilon_1 \vdash \alpha \to \delta_1 \wedge \bar{\delta}_1 \tag{十一}$$

有一个众所周知的归谬律:$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \wedge \bar{\boldsymbol{B}} \vdash \bar{\boldsymbol{A}}$。于是就有:

$$\alpha \to \delta_1 \wedge \bar{\delta}_1 \vdash \bar{\alpha} \tag{十二}$$

依据关于推理的传递律,我们可从推理(十一)、(十二)建立下述推理:

$$\gamma_1,\gamma_2,\beta,\ \varepsilon_1 \vdash \bar{\alpha} \tag{十三}$$

这最后建立的推理(十三)当其前件($\gamma_1,\gamma_2,\beta,\ \varepsilon_1$)确定为真时就成了关于 $\bar{\alpha}$ 为真(即 α 为假)的证明。

当我们回顾在对上述证明过程做直观的陈述时,我们发现,在那里不曾出现最后的那一个前提——闭原子命题 ε_1。在对那直观的陈述做严密的逻辑考核时才发现必须引入前提 ε_1。曾经有人觉得伽利略原来的直观的论证不符合同一律的要求,这很可能指的就是欠缺前提 ε_1。

10.3　关于推理及其前提的一些分析

关于推理(十)~(十三),做下述说明。

推理(十)说的是:以“α、γ_1、γ_2、β、ε_1”5 命题为前件(或假设)可推出后件(或结果)矛盾的合取命题“$\delta_1 \wedge \bar{\delta}_1$”。这作为推理的假设与结果的仅仅是考虑中的命题,对其真假无须做出断定或假定。这一点非常重要。推理只是以考虑中的真假未定的假设去逻辑地得出也是考虑中的真假未定的结果。这里,对于一次推理来说,作为假设与结果的仅仅是考虑中的命题,其真假无须假定,更不必确定。不过,必须指出,一个推理既然逻辑地建立起来了,那就仅仅依据其假设与结果的逻辑内容(因而一般说来不足以确定其本身的真假)就确定了:不会是假设真而结果假。这一点是完全确定了的。一个推理的真谛是:仅仅依据前、后件的逻辑内容,在既无须假定更不必确定其前、后件本身的真假的情况下就确定了不会是前真而后假。这里,彻底地不管的是前、后件本身的真假,执著地管的是不会是前真而后假。当然,依据著名的逻辑定理不矛盾定理——$\neg(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})$,我们可确定推理(十)的结果,矛盾的合取命题“$\delta_1 \wedge \bar{\delta}_1$”必假。不过,必须强调,这不是推理(十)确定的。可见,推理不管其前、后件的真假,而逻辑定理有时却管推理的前、后件(当是逻辑定理或其否定时)的真假。逻辑地依据由不矛盾律确定的推理(十)的前提中至少有一为假。因此,“假定 α_1、γ_1、γ_2、β、ε_1 为真可推出一对矛盾 δ_1、$\bar{\delta}_1$”这种习以为常的说法是不科学的:推理(十)的建立无须假定其前件

为真;而能推出一对矛盾的推理(十)的前件又不可假定为其为真。

推理(十一)说的是:以“$\gamma_1,\gamma_2,\beta,\varepsilon_1$”4 个命题为假设可推出结果“$\alpha\rightarrow\delta_1\wedge\overline{\delta}_1$”。提请注意:在假设中并没有 α,而 α 只在作为结果的充分条件命题的前件中出现。推理(十三)说的是以“$\gamma_1,\gamma_2,\beta,\ \varepsilon_1$”4 个命题为假设可推出结果“ $\overline{\alpha}$”。还是提请注意,假设中也一样地没有 α。因此,下述习以为常的说法也是不科学的:“从假定 α 为真出发可推出 α 为假”。在这里,α 不仅无须假定为真,甚至根本不在推出结果 $\overline{\alpha}$ 的假设中出现。尽管,推理(十)告诉我们,从包括 α 在内的假设“出发”(即使此时也无须假定甚至不可假定 α 为真)可推出结果 $\delta_1\wedge\overline{\delta}_1$;然而,经由推理(十一)、(十二)建立的推出结果 $\overline{\alpha}$(即使此时 $\overline{\alpha}$ 的真假依旧未定)的推理(十三)的假设中却根本不包括 α。推理(十三)揭举的是,仅仅依据 γ_1,$\gamma_2,\beta,\varepsilon_1$与 $\overline{\alpha}$ 的逻辑内容(因此不必管也无法管它们本身的真假)就逻辑地确定了不会是 $\gamma_1,\gamma_2,\beta,\ \varepsilon_1$真而 $\overline{\alpha}$ 假。

在推出陈述一般规律的内涵命题 $\overline{\alpha}$ 的前件中,除了也是陈述一般规律的内涵充分条件命题 β 外,尚有陈述个别事实的单称命题 γ_1、γ_2、ε_1,这是事实。面对这个事实,我们不得不否认下述广为流传的偏见:“演绎推理的结论的一般程度不高于每一个前提。”关于演绎推理的每一个前提比起结论来的“一般性”程度的高低并无什么值得称道的特征:从一般到一般,从一般到个别,从个别到个别,从个别到一般,这一切都可能发生。

欲使推理(十三)成为证明,并由之确定 $\overline{\alpha}$ 为真(即 α 为假),需要先确定其前件 γ_1、γ_2、β、ε_1皆为真。γ_1、γ_2为陈述个别事实的单称命题,非常容易直接证实。同样是陈述个别事实的 ε_1为真也十分明显。剩下的问题是:陈述一般规律的内涵充分条件命题 β 是如何证实的? 这个问题是本节的重点之一,在 10.4 节中详细讨论。这里先指出一点:β 本身是无法直接证实的。

10.4　证明的一般前提的形成和证实

人们先发现了下述事实:某两条在航行中的船舶用船缆联结起来后其合速度不快于其中较快的(β_1),某两辆在行驶中的车子撞在一起后其合速度不快于其中较快的(β_2),…,(β_i),…,(β_m)。这样,人们就证实了 $\beta_1\wedge\beta_2\wedge\cdots\wedge\beta_i\wedge\cdots\wedge\beta_m$为真。为了从理论上解释上述事实,人们逻辑地构作一个不与已证实的真理不相容的命题:“二运动物体固结起来的合速度必不快于其中较快的”(β),使之满足:$\beta\vdash\beta_1\wedge\beta_2\wedge\cdots\wedge\beta_i\wedge\cdots\wedge\beta_m$。

我们称上述思考过程为“逆向演绎”,以区别于人们已习惯于称为“演绎”的“正向演绎”,如果说,“正向演绎”是利用推导格式从前件去得出后件的思考过

程,那么,“逆向演绎”则利用完全相同的推导格式从后件去构作前件的思考过程。这二者的共同点是:利用完全相同的演绎推导格式,因此都称为“演绎”;这二者的不同处是:思考的动向相反,故一个称为“正向”,而另一个则称为“逆向”。

演绎的最根本的特征是,仅据前、后件的逻辑内容即可确定:前件为真是后件为真的充分条件,或者说,后件为真是前件为真的必要条件。正向演绎是从前件得出后件的演绎,因此满足“前件真时后件必真”;而逆向演绎却是从后件去构作前件的演绎,故满足“后件真时前件未必真”。这“前件为真是后件为真的充分条件,因此前件真时后件必真”,以及“后件为真是前件为真的必要条件,故而后件真时前件未必真”,原本是关于演绎推导前后件的真值之间的条件关系的两种互相等价的说法。以往的传统形式逻辑只着眼于正向演绎,只承认从前件得出后件的思考过程是演绎,而把事实上也是依据某种演绎推导格式只不过思考方向相反的某些逆向演绎称为归纳。如今,我们恢复普通的逻辑思考以本来面目,在看到正向演绎的同时,也看到逆向演绎,承认从后件去构作前件的演绎也是演绎。既然乘坐的是同一部电梯,为什么从上到下就叫“乘电梯”,而从下到上就该叫别的什么呢?

好,还是回到我们最感兴趣的 β 的证实上来。这样,对于上述逆向演绎来说,尽管后件 $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_i \wedge \cdots \wedge \beta_m$确实已证实为真,然而由之构作的前件 β 未必为真。如此这般通过逆向演绎构作的未必真实的前件就称为“假设”。所谓假设,指的就是以它为前件即可演绎出已证实为真的后件;而已证实为真的后件就称为结果。正由于在逻辑思考实际中事实上有从已证实的结果去构作假设的思考过程,这就迫使传统形式逻辑在实际上将演绎的前件和后件有时也称为假设和结果。还是回到探讨 β 的证实上来。当人们通过逆向演绎构作出来的未必真实的内涵充分条件命题 β 无法直接证实时,人们又从假设 β 出发,进行正向演绎:

$$\beta \vdash \beta'_1 \wedge \beta'_2 \wedge \cdots \wedge \beta'_i \wedge \cdots \wedge \beta'_m$$

其中,诸 β'_i为可直接证实的命题。当其中的某些 β'_i为前所未知时,则称之为预言。这样,当由之得出的任意可证实的结果事实上均获证实,尤其当其中包含一些异乎寻常的预言时,β 就被认为获得了证实。这种证实称为假设型的间接证实,以区别于证明中的结论型的间接证实。这就是说,从逆向演绎构作出的无法直接证实的 β 是通过证实其新的正向演绎的可证实的结果予以间接地证实的。正由于此,获得假设型的间接证实的 β 的可靠性不高于作为依据的诸 β'_i,具有或然性。

与“固结物体合速度定律”β 相类似,“亚氏自由落体运动法则”α 原本也是假设,而且,也被当做是已获间接证实的。可是,年青的伽利略通过缜密的逻辑

思考发现了 α 与 β 不相容。这时,α 与 β 就得至少推翻其中的一个。伽利略做出了下述推理(十三):

$$\gamma_1,\gamma_2,\beta,\varepsilon_1 \vdash \overline{\alpha}$$

当然,与此相仿,他也可以做出下述推理(十四):

$$\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\ \varepsilon_1 \vdash \overline{\beta}$$

然而,事实是,人们依据推理(十三)和已证实为真的 $\gamma_1,\gamma_2,\beta,\ \varepsilon_1$去证明 $\overline{\alpha}$;人们并不认为依据推理(十四)可做出对$\overline{\beta}$的证明。做这种选择时,显然鉴于确信“固合定律” β 已获证实,然而却怀疑“亚氏法则” α 的真实性。有一项事实非常有意思:只有当伽利略依据推理(十三)证明了 $\overline{\alpha}$ 之后,他才去做直接证实假设 α 的逻辑结果 δ_2(“大球自由降落速度快于小球”)为假的斜塔试验。这就是说,要间接证实 α 为假,这只要直接证实 δ_2为假就足够了,从理论上说,可以完全独立于 β 进行。然而,事情却是,只有伽利略在依据 β 等证明 $\overline{\alpha}$ 后才去做上述证实。这件事很值得深思。只有当 α 与确信不疑的 β 不两立时,伽利略才去做出从 α 到 δ_2的正向演绎,并去做证实 δ_2为假的实验。通过直接证实 δ_2为假的实验间接地证实了 α 为假,同时间接地又一次地证实 β 为真。作为假设的 β 的不断再证实不仅通过直接证实其可直接证实的推断的途径,而且,也通过否证与之不两立的其他假设 α 的途径。

我们把以 β 为一般前提推出早先原有的一般假设 α 的否定 $\overline{\alpha}$ 称为 β 对 α 的否证,并称 β 与 α 不两立。倘若说,把作为新产生的内涵充分条件命题的一般假设 β 比做竞技场上初出茅庐的选手,那么,直接证实其逻辑推断不过是在小型的运动会上获得了好成绩,而否证了与之不两立的早先原已被当做已获“证实”的其他一般假设 α 则相当于在国际奥林匹克竞赛中击败了上届世界冠军。当然,这足以使人敬仰,却不足以保证今后不败于其他更强的选手。

伽利略的划时代的斜塔试验结束了作为假设的 α 的寿命,确证了 α 的谬误,同时,也使本已从假设上升为定律的 β 增添作为真理的光辉。作为证明 $\overline{\alpha}$ 的前提的 β 本已在以往的对 β 的推断的不断证实中获得一再的间接证实,不仅如此,通过直接证实 $\overline{\delta}_2$实现的对与 β 不两立的 α 的否定 $\overline{\alpha}$ 的间接证实本身对 β 也做了一次实践的更有力的再证实。我们把通过否证与其不可两立的 α 进行的对 β 的间接证实称为否证型的间接证实。显然,对 β 的否证型的间接证实也具有或然性。

迄今,人类所掌握的对一般假设进行再证实的最强有力的方法是内涵的科学分析:对在假设中出现的概念进行内涵的科学分析。这是间接证实一般假设除上面所说的两条途径外的第三条途径。通过对在 β 中出现的概念的内涵进行科学分析,β 对于已为整个人类发展史中的渊深博大的实践所证实了的科学体

系来说，是完全合理的。倘若两运动物体固结起来后的合速度竟然可以快于其中较快的，那就会发生不可思议的违反科学的现象：司机为了要使火车加速，不必去开大油门，只要不断从地面上拣起原本静止的石块就行了；而当两辆汽车相撞时，这两辆合在一起的汽车就会以比原来更快的速度飞速前进。鉴于内涵的科学分析以人类所掌握的科学体系为依据，以整个人类发展史中的渊深博大的实践为标准，因此，途径三是最强有力的间接证实 β 为真的方式。也正由于此，一般原理 β 就称为内涵充分条件命题。通过内涵的科学分析间接证实内涵充分条件命题 β，实际上是以已证实为可靠的科学体系为前提对 β 做出演绎证明，β 是这种证明的结论。这种施加于 β 的间接证实实质上是结论型的间接证实，获得这种间接证实的作为证明的结论的 β 的可靠性不会低于作为前提的科学体系。

演绎逻辑管 β 的得出，而对 β 的证实虽然也要借助于演绎逻辑，但是原则上不是演绎逻辑的事情。从单称的诸 β_i 得出内涵充分条件命题 β 全靠演绎逻辑，可是，证实一般原理 β 虽然还是要通过演绎逻辑，然而主要靠实践。

铜钱与羽毛在空气中的自由降落速度的显著区别是人所共知的。通过长期的实践，人们证实了：在空气中，铜钱的自由降落速度快于羽毛（θ_1），苹果的自由降落速度快于棉花（θ_2），…。亚氏法则 α 就是以这一系列已证实的单称命题 θ_1、θ_2、…、θ_m 为结果经逆向演绎构作出来的假设。这假设 α 事实上是谬误的。人们在漫长的二千余年中将此谬误的假设奉为神圣不可侵犯的经典。直到伽利略逻辑地发现 α 与 β 不相容在先，继之又直接证实 α 的推断 δ_2 为假在后，总算了结了这场旷日持久的历史误会，还 α 以真面目。然而，经逆向演绎构作的假设 α 虽假，可是，据以做出此假设的 θ_1、θ_2、…、θ_m 都是真的。于是，为了重新在理论上解释那些由之得出错误假设的真实的诸 θ_i，人们又通过逆向演绎去构作不同于 α 的新假设：空气阻力的影响使然（θ）。从而，依据此新假设 θ 通过正向演绎得出：在真空中铜钱与羽毛的降落速度相等（θ'_1）。这 θ'_1 是个“异乎寻常”的预言。现代的中学生大都做过的密封在真空玻璃管中的铜钱和羽毛的自由落体试验，这就直接证实了这个正向演绎的“违反常识”的结果 θ'_1。“异乎寻常”的预言 θ'_1 被直接证实了，于是，新假设 θ 也就被间接地证实了。再加上，新假设 θ 说明了旧假设 α 谬误的缘由和对之进行内涵的科学分析后得出的对于科学体系的合理性，新假设 θ 就上升为真理，同时，那从新假设 θ 出发得出预言 θ'_1 的推理也就上升为证明。证明的前提的真实性有时在早先就证实了；有时却要待“这一次”得出的结果被证实后才获得间接证实。当然，当是后者时，在前提被间接地证实后才承认其成立的证明在前提证实前原本是究竟是否证明尚有待确定的推理。

对证明中的一般前提的间接证实按不同的途径可分为：通过直接证实其可

直接证实的单称推断的途径进行的假设型的间接证实,通过否证与其不两立的早先原有的其他一般假设的途径进行的否证型的间接证实,以及通过对在其中出现的概念做出内涵的科学分析的途径进行的内涵型的间接证实。对一般前提的假设型、否证型的间接证实具有一定程度的或然性,而对之进行内涵型的间接证实则由于实际上是以科学体系为前提的演绎证明,故而,实际上应属于结论型的间接证实,因此,其可靠性不会低于作为实际前提的科学体系。可见,在对一般前提做出间接证实的三种方式中,内涵型最可靠,否证型次之,假设型又次之。

10.5 简要结语

逻辑证明是实践证实了的从已有真理获得新真理的逻辑真理。人们亿万次重复的社会实践证实了:在证明做出后,证实前提与推理式的实践就是间接证实结论的实践;前提有原型时结论也必定有原型,不管这结论的原型是否已直接发现。因此,逻辑证明是间接证实,是证实的一种方式。间接证实与直接证实都是实践证实。获得间接证实的结论的可靠性不会低于前提,不管前提的证实是直接的还是间接的,这是无条件地普遍成立的。一些命题受时间、空间等的限制无法直接证实,只能间接证实。像数学等的演绎科学除了公理外只承认获得了间接证实的定理。在可行的情况下,对间接证实要另做证实,这正像对直接证实也要另做再证实一样。鉴于证实的相对性,对已证实(无论是直接的还是间接的)的命题在可行的情况下另做再证实不仅是有益的,而且是必要的。对间接证实另求再证实本质上是考核前提的可靠性。由于间接证实基于渊博的实践,因此,往往比基于浅狭的实践的直接证实更为可靠。证明的结论不仅是可靠性不会低于前提的真理,而且在证实前提时并未证实,因此,对于前提来说还是新真理。从已有真理去得出新真理,这是逻辑科学的渊源与归宿。预言就是超尘脱俗、出类拔萃的其原型暂未直接发现的结论。预言是意识的瑰琦。逻辑科学可以为能栽培出像预言这样的意识的绚丽花朵而自豪。预言之光煦照下的实践是卓越的实践。已给出的包括直接证实和结论型间接证实的证实的定义有赖于对实践的规定。我们希望,已给出的并未彻底完成的上述证实的定义有助于清晰地规定实践,并因此最终使上述证实也清晰起来。除结论型外,间接证实还有前提型。作为证明的一般性前提的得出全靠演绎,对之做出间接证实尽管也须通过演绎,然而,主要是靠实践。证实应包括:直接证实、结论型证实和前提型间接证实。

第 3 篇　当代形式逻辑 *Cm* 系统

数理逻辑纯真值命题演算形式系统与在此基础上建立的纯真值 1 阶谓词演算形式系统被称为正统的形式系统。我们在这一篇与下一篇讨论的当代形式逻辑系统——命题逻辑 ***Cm*** 系统与在此基础上建立的名词演算 ***Cn*** 系统应称为非纯真值的形式系统——货真价实的逻辑形式系统。从分析人类在日常生活、劳动生产和科学研究中使用的表示充分条件关系的自然语言联结词“若,则”的逻辑含义入手,得出逻辑联结词“充分条件”。当代形式逻辑形式系统是用来形式地刻画人类在普通逻辑思维中的推理论证,并作为探索演绎推理何以能得出新知识的形式工具。

采用数学方法分析实际的逻辑推导格式中的前件与后件之间的关系就产生了逻辑演算形式系统。逻辑演算形式系统由形式语言、原始公式(或称公理)与原始规则组成。这三者一经确定,一个形式系统就完全确定了。不分析其内部构造的命题称为基础命题。基础命题未必简单。一个不管多么复杂的复合命题,只要在命题逻辑范围内不对之分析,就是基础命题。命题演算就是以基础命题为最小单位的逻辑。采用数学方法分析命题逻辑推导格式中的前、后件之间的形式关系就产生了命题演算形式系统 ***Cm***。命题演算 ***Cm*** 是以命题变元为逻辑变元的逻辑演算。命题逻辑 ***Cm*** 系统中的命题变元解释为命题逻辑中的基础命题。在建立命题逻辑形式系统 ***Cm*** 时,始终以符合普通逻辑思维实际的命题推导格式为指导准则。

第 11 章　命题逻辑 *Cm* 系统的形式语言

形式语言由形式符号和由符号形成式(formula)的形成规则组成。这二者一经确定,一个形式语言就完全确定了。形式语言是一种特殊的不同于自然语言的人工语言。在形式系统中采用特殊的人工语言是为了能进行像数学一样精密而又机械的演算;若不采用一整套适宜的人工语言,要进行这种演算便没有可能。形式语言中的形式符号及按形成规则形成的式是一个无穷序列的人为地规定的符号及由上述符号按一定的规则机械地排列起来的有穷长的符号串。它们在理论上是可以没有含义的,然而在实际上总是考虑一定解释后反映某个领域(譬如,逻辑推导的领域中)的规律。命题演算形式系统中的式的符号排列上的

形式特征反映了对式做出解释后获得的具有相应的结构形态的命题的结构特征,于是,对具有一定符号排列形式的式的形式上的变换(即演算)就反映具有相应结构特征的命题的逻辑推导。当然,这种从形式到内容、从符号排列的机械变换到思维实际的逻辑推导的反映功能并不是形式语言本身就天生地具备的,而是在构造形式系统时,亦即,在确定形式语言、公理与规则时,有意识地赋予的。先有得自世世代代人们亿万次重复的社会实践的直观逻辑规律和进行符号演算的方法,然后才有刻画直观逻辑规律的逻辑演算形式系统 ***Cm***。因此,我们称形式语言中的符号与式为“待解释的”。说形式符号与式是“待解释的”比说它们“没有含义”更恰当些,因为,前者不仅包含“在理论上可以没有含义”(**待**解释)的意思,而且还包含“在实际上一定给予某种解释含义”(待**解释**)的意思。

11.1　*Cm* 的形式符号

在形式语言中出现的不能再分的最小对象称为形式符号。下面是命题演算形式系统 ***Cm*** 的形式语言中采用的形式符号。

命题变元号:命题变元号是一个无穷序列的形式符号,以正体小写拉丁字母 p、q、r、s 加撇或下标表示。命题变元号排一个次序,称为命题变元号的字母顺序。命题变元号被解释为在命题逻辑范围内不予分析的基础命题。命题变元号可简称为命题变元或变元。

联结号:联结号是下列 3 个形式符号:¬(非)、∧(合取)、⇀(充分条件),括弧中标出的是它们的读法。这 3 个联结号都是独立的,前两个是纯真值的,最后一个是非纯真值的。¬是 1 元的,∧、⇀是 2 元的。¬、∧、⇀依次被解释为普通的逻辑思考中的联结词“否定”、“并且”、充分条件的“若……,则……”。由于命题变元可解释成任意的基础命题,因此称为逻辑变元;而联结号只能解释成确定的联结词,不能解释成任意的联结词,因此称为逻辑常元。

此外,***Cm*** 还采用辅助性符号——括号。括号是指( ),左边的称为左括号,右边的称为右括号。括号是在中置式的符号系统中用来表示联结号的结合力的,其效用与自然语言中的标点符号相仿佛。从理论上说,只反复地使用一种括弧就足够了;但是,为了醒目,实际上把括弧按结合力从大到小的顺序分别写做( )、[ ]、{ }等,这时,应把[ ]当做结合力比( )小一个层次的醒目的( ),应把{ }当做结合力比[ ]又小一个层次的醒目的( ),等等。这就是说,不要把( )、[ ]、{ }……当做与( )在理论上不相同的符号,尽管,在实际上是不相同的。我们之所以要在实际上采用外观与( )不同的[ ]、{ }等,仅仅是为了醒目地表示结合力大小的层次,然而,在理论上说,这种结合力大小的层次仅仅反复地使用一种也能够表示,只不过是不大醒目罢了。譬如:

$$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow\{[\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D})]\rightarrow[\mathbf{B}\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D})]\}$$
$$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow((\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D}))\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D})))$$

二者在理论上完全相同,然而,在实际上前者比后者醒目。

形式符号体系从理论上说必须一丝不苟,不能做任何变通;然而,为了达到某些目的(如方便或醒目),在实际上往往做种种变通——用变通的实际写法去表达不变通的理论写法。这里所做的关于括号的变通仅仅是其中之一,今后我们还将看到其他类型的变通。

11.2　*Cm* 的形成规则

一串有一定顺序的对象称为序列。形式符号的一个有限序列叫做符号串,如 p、¬p、p→q、p ¬、→q、∧p∧、¬∧→等均为符号串。相同或不相同的符号在一个符号串中出现次数的总合称为符号串的长。

式(formula)是一种特殊的、做出解释后有意义的符号串。形成规则是从任意的符号串中区分出式来的依据。***Cm*** 的形式语言中的式的形成规则如下:

(ⅰ)任意一个命题变元 ***p*** 是式;

(ⅱ)若符号串 **u** 是式,则¬**u** 是式;若符号串 **u**、符号串 **v** 是式,则(**u**∧**v**)、(**u**→**v**)是式;

(ⅲ)一个符号串 **w** 是式仅当 **w** 按(ⅰ)、(ⅱ)形成。

上述形成规则实际上构成了概念"式"的一个严格的定义。这种定义的方式称为"一般归纳"的方式,其中(ⅰ)称为基始,(ⅱ)称为归纳,(ⅲ)称为限制约定。(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)互相依存、互相补充、缺一不可。(ⅰ)提供了(ⅱ)的出发点,没有(ⅰ),(ⅱ)就将成为无根之木、无源之水;(ⅱ)给(ⅰ)提供了无限广阔的发展前景,没有(ⅱ),(ⅰ)就成了一棵枯木、一潭死水;(ⅲ)把"式"的外延限制在按(ⅰ)、(ⅱ)形成的范围内,没有(ⅲ),(ⅰ)、(ⅱ)就只提供了"式"至少是什么,而不能规定"式"只能是什么。

"式"通常也称为"合式公式"或"公式"。考虑到:①"合式公式"中出现的两个"式"有歧义,而且作为常用名词也太长;②为了与元定理或规则从名称上区别开,把"公式"用来称呼可证的式。因此,不采用"合式公式"或"公式"这个名称来指称按形成规则形成的符号串。

左、右括号在式中一定成对出现。

11.3　*Cm* 的语构变元

当我们用某种语言讨论另一种语言时,被讨论的语言就称为对象语言,而用来进行讨论的语言称为元语言。我们用汉语来讨论 ***Cm*** 的形式语言,这时,对于

讨论来说,汉语是元语言,***Cm*** 的形式语言是对象语言。加到元语言中去用来指称对象语言的符号称为语构变元。因此,语构变元是加到汉语中来辅助讨论 ***Cm*** 的形式语言的符号。不是 ***Cm*** 的形式语言中的形式符号。我们用黑正体拉丁字母 **u**、**v**、**w**,加撇或下标来指称任意的符号串,或者说,以它们表示在符号串中变的语构变元,它们以符号串为变域;以黑正体小写拉丁字母 **p**、**q**、**r**、**s**、加撇或下标表示在命题变元中变的语构变元;以黑正体大写拉丁字母 **A**、**B**、**C**、**D**、加撇或下标表示在式中变的语构变元;以黑正体大写希腊字母 **Γ**、**Δ**,加撇或下标为在式的序列中变的语构变元。在同一上下文中,相同的语构变元指称同一语构对象;然而,不同的语构变元未必指称不同的语构对象。

语构变元也称为“通名”。

11.4　*Cm* 的式的判定

在 ***Cm*** 的形式语言中,**u** 为式,当且仅当,**u** 按形成规则形成。如:

$p\wedge q \qquad p\wedge q\rightarrow r \qquad p\wedge\neg p\rightarrow q \qquad p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q \qquad (p\rightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow r)\rightarrow p\rightarrow r$

等均为式;把上述式中的最后一个符号去掉以后所成的符号串就不是式。现在的问题是:在 ***Cm*** 中,任意的一个符号串是否为式有无判定的方法?

“可判定的”指的是:关于这个问题存在一种算法。所谓算法,指的是:预先统一地给出的能够被机械地执行且总是要终止的指令的有穷序列。

在 ***Cm*** 中,一个任意的符号串 **u** 是否为式是可判定的。即,存在一种确定 **u** 是否为式的算法。这就是说,存在着一种具有下述特征的方法:不仅在 **u** 未写出之前就事先给出,并且,不管对什么样的 **u** 都适用(这叫做“预先统一地给出”);对要对之施行运算的对象能机械地识别,并且,对之要施行的运算能机械地实现(这叫做“能机械地执行”);按规定的方法机械地执行下去总会在有限步内结束(这叫做“总是要终止”);将其陈述出来就是个数有限且有一定顺序的指令(这叫做“指令的有限序列”)。

下面,我们就来介绍这种关于判定任一符号串 **u** 是否为式的算法。

我们称出现而且只出现一个联结号的式为单式。

(ⅰ)识别在 **u** 中是否出现单式:①若不出现,即停止;然后识别 **u** 是否为命题变元,若是则 **u** 是式,否则 **u** 不是式。②若出现单式,则转入指令(ⅱ);

(ⅱ)将单式转换成命题变元,然后返回指令(ⅰ)。

上述算法可用图 13.1 所示。

在这个算法中,要识别的是:一个符号串 **u** 中是否出现单式;当不出现时,**u** 是否为命题变元。显然,这是可以机械地识别的。在这个算法中,要施行的运算是:将单式变换成命题变元。显然,这是可以机械的执行的。而一个含有单式的

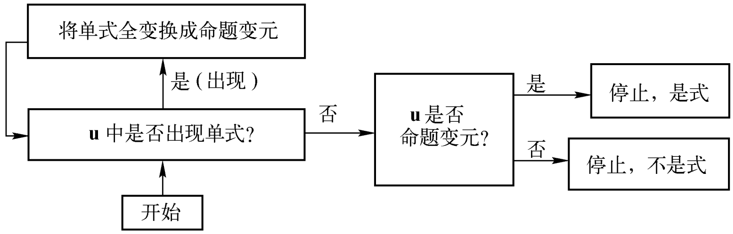


图 11.1　判定 ***Cm*** 的式的算法

有穷长的符号串 **u**，当把其中的单式变换成命题变元后其长度总是要减少的，又由于 **u** 的长度有穷，这么逐次减少下去，总是要在有限步达到不能再减少的地步。即，这个减少的过程一定会在有限步内结束。

11.5　*Cm* 的导出联结号的定义

为了增强可读性，有必要对导出联结号给出定义，引进以下缩写。

定义 1：$\overline{\mathbf{A}} = \mathrm{df}\ \neg\mathbf{A}$　　（$\overline{\ \ }$的定义）

定义 2：$\mathbf{A}\vee\mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg(\neg\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B})$　　（$\vee$ 的定义）

定义 3：$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{B})$　　（$\rightarrow$的定义）

定义 4：$\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B} = \mathrm{df}\ (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$

$= \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{B}\wedge\neg\mathbf{A})$　　（$\leftrightarrow$的定义）

定义 5：$\mathbf{A}\upharpoonleft\mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$　　（$\upharpoonleft$的定义）

定义 6：$\mathbf{A}!\ \mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　（! 的定义）

定义 7：$\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B} = \mathrm{df}\ (\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\wedge(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})$　　（$\rightleftharpoons$ 的定义）

定义 8：$\mathbf{A}\leftharpoonup\mathbf{B} = \mathrm{df}\ \mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A}$　　（$\leftharpoonup$ 的定义）

定义 9：$\mathbf{A}\ \upharpoonleft\ \mathbf{B} = \mathrm{df}\ \mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$　　（$\upharpoonleft$ 的定义）

定义 10：$\mathbf{A}\ \uparrow\ \mathbf{B} = \mathrm{df}(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\wedge(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$　　（$\uparrow$ 的定义）

提请注意，定义号 = df 表示其左右二式具有充分必要条件关系。例如，定义 5 即 $\mathbf{A}\upharpoonleft\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$。详细的阐述请见龚启荣等著《当代形式逻辑引论》（电子工业出版社，2009 年 3 月版）。

被定义联结号“ $\overline{\ \ }$”（否定）通常用于单个字母的辖域。然而，由于目前的排版系统不方便排，因而，虽然它经济且表达清晰醒目，我们仍然不得不少用。其余还有 9 个被定义联结号，依次读做：析取（$\vee$）、蕴涵（$\rightarrow$）、等值（$\leftrightarrow$）、尽举相容选择（$\upharpoonleft$）、约合（!）、充要条件（$\rightleftharpoons$）、必要条件（$\leftharpoonup$）、尽举反相容选择（$\upharpoonleft$）、尽举不相容选择（$\uparrow$）。相对于这些被定义联结号来说，用来定义它们的那 3 个初始联结号，我们称之为原始联结号。为了节省括号，我们有下述简化约定：①我们约定，最外层的括号一律省去不写；②原始的或被定义联结号结合力从大到小

的顺序为:¬、∧、∨、!、↾、↿、↑、→、↔、⇀、↽、⇌;③相同联结号的右结合,如,**A⇀B⇀C⇀D** 即 **A⇀(B⇀(C⇀D))**、**A∨B∨C∨D** 即 **A∨(B∨(C∨D))**;(4)为了方便,“∧”号往往省略不写,如,**A∧B** 就写成 **AB**;(5)从理论上讲,只反复使用一种括号就够了,但是,为了醒目,在实际上可以把括号按结合力从大到小的顺序分别写做( )、[ ]、{ },等等。

从语构上说,用定义引进缩写的目的是使被缩写的式较为可读。因而,在进行语构的讨论时,对着缩写说的每一句话都是对着缩写的式说的。例如,**C⇌D** 的长是 7 而不是 3;为其所思考的逻辑结构的层是 $k+2$,而不是 $k+1$。

从语义上说,凡在缩写中出现的被定义联结号在普通逻辑思考中都有联结词与之相对应。

11.6　*Cm* 的联结号的解释

我们把 ***Cm*** 形将式语言中的命题变元解释为基础命题,将式解释为命题。为求简明,***Cm*** 的联结号的解释如表 11.1 所示。

表 11.1　*Cm* 的联结号的解释

序号	式		读　法	解　释	
				自然语句句型举例	含　义
1	纯真值联结号	¬**A**	非 **A**	并非 **A**。非 **A**。并不是 **A**。**A** 的否定。**A** 是假的。	**A** 假。
2		**A** ∧**B**	**A** 合取 **B**	**A** 并且 **B**。不仅 **A** 而且 **B**。**A** 而 **B**。**A** 且 **B**。**A** 与 **B**。**A**,**B**。既 **A** 又 **B**。	**A**、**B** 两者都真。
3		**A** ∨**B**	**A** 析取 **B**	并非既不 **A** 又不 **B**。**A** 或者 **B**。**A** 或 **B**。	不是 **A**、**B** 两者都假。
4		**A→B**	**A** 蕴涵 **B**	并非“**A** 而不 **B**”。非 **A** 或 **B**。	不是“**A** 真而 **B** 假”。
5		**A** ↔**B**	**A** 等值 **B**	既非“**A** 而不 **B**”,又非“**B** 而不 **A**”。	**A**、**B** 同真假。
6	非纯真值联结号	**A** ⇀**B**	**A** 充分条件 **B**。若 **A** 则 **B**。	**A** 必然 **B**。**A** 一定 **B**。不会有 **A** 而无 **B**。若 **A**,则 **B**。如果 **A**,那么 **B**。既 **A**,就 **B**。要 **A**,不可不 **B**。需要 **B**,才能 **A**。只有 **B**,才 **A**。没有 **B**,就不能 **A**。没有 **B**,便没有 **A**。**A** 是 **B** 的充分条件。**B** 是 **A** 的必要条件。可从 **A** 得出 **B**。	可在既不需确定 **A** 假又不需确定 **B** 真的情况下(可独立于 **A**、**B** 的真假)确定不会是 **A** 真而 **B** 假。
7		**A** ↽**B**	**A** 必要条件 **B**。只有 **A** 才 **B**。	除非 **A** 才 **B**。只有 **A** 才 **B**。**A**,否则 **B**。**A** 是 **B** 的必要条件。**B** 是 **A** 的充分条件。非 **A**,则非 **B**。不 **A** 就不 **B**。	可在既不需确定 **A** 真又不需确定 **B** 假的情况下(可独立于 **A**、**B** 的真假)确定不会是 **A** 假而 **B** 真。
8		**A**↾**B**	**A** 尽举相容 **B**。不是 **A** 就是 **B**。	非 **A** 必 **B**。必须 **A**,否则 **B**。除非 **A**,不然 **B**。倘若不 **A**,那就 **B**。**A** 或者 **B**。	可在既不需确定 **A** 真又不需确定 **B** 真的情况下(可独立于 **A**、**B** 的真假)确定不会是 **A**、**B** 都假。

续表

序号	式		读　法	解　释	
				自然语句句型举例	含　义
9	非纯真值联结号	A ! B	A 约合 B	A 可以 B。A 未必不 B。即使 A，也 B。A，仍然可以 B。虽然 A，但是 B。可能既 A 又 B。	并非“A 充分条件非 B”。
10		A ⇌B	A 充要条件 B。A 当且仅当 B。	A 、B 互为充要条件。A 当且仅当 B。A，只有 A，才 B。	可独立于 A 、B 的真假确定 A 、B 必同真假。
11		A ↿ B	A 尽举反相容 B。是 A 就不是 B。	是 A，就不是 B。要么 A 要么 B。或者 A 或者 B，二者不可兼得。	可独立于 A、B 的真假确定不会是 A、B 都真。
12		A ↑B	A 尽举不相容 B。是 A 就不是 B，不是 A 就是 B。	是 A 就不是 B，不是 A 就是 B。要么 A 要么 B。	可独立于 A、B 的真假确定不会是 A、B 同真假。

普通的逻辑思考中的联结词“或者”是多义的，其最常用的两种含义是：①不是A、B 都假（纯真值函数）。这通常在以较为简短的“并非‘A 或者 B’”来表述“既不是 A，又不是 B”时用，这与“析取”相当；②可独立于 A、B 的真假确定不会是 A、B 都假（非纯真值函数）。在“相容选言推理”中的（为了不与传统的混淆，我们称为“尽举相容选择推理”）选择前提中出现的“或者”就具有这种含义。这两种常用的“或者”具有不同的逻辑性质，满足不同的逻辑规律，必须区分开。常常也用“或者”来表达尽举反相容，只是在其后加上“二者不可兼得”。在“约合”的意义上使用的自然联结词也是常见的，如“即使 α，也 β”只是断定了“α 未必导致不 β”，而对 α、β 本身则并未断定，因而相当于“α 约合 β”、“α 可以 β”。请注意，当 α、β 都假时，“α 可以 β”仍然可以是真的。顺便附加一句，上面这一句的句型是“当 A 时，B 仍然可以是真的”，也是用来陈述“A 可以 B”的，其中的“当……时，……仍然可以是真的”就是指“约合”的自然联结词。

第 12 章　*Cm* 的公理、导出公式、规则和元定理

12.1　*Cm* 的公理模式、原始规则

12.1.1　*Cm* 的公理模式

公理 1. $\vdash \mathbf{A\to\neg\neg A}$　双否引入律

公理 2. $\vdash \mathbf{(A\to B\to C)\to B\to A\to C}$　充分条件易位律

公理 3. $\vdash \mathbf{(B\to C)\to(A\to B)\to A\to C}$　充分条件传递律（ⅰ）

公理 4. $\vdash \mathbf{(\neg A\to B)\to\neg B\to A}$　充分条件逆否律（ⅰ）

公理 5. $\vdash \mathbf{A\neg B\to\neg(A\to B)}$　非充分条件律

公理 6. $\vdash \mathbf{A\to AA}$　合取重叠律（ⅰ）

公理 7. $\vdash \mathbf{AB\to A}$　合取分解律（ⅰ）

公理 8. $\vdash \mathbf{AB\to BA}$　合取交换律（ⅰ）

公理 9. $\vdash \mathbf{(A\to B)(A\to C)\to A\to BC}$　合取构成律

公理 10. $\vdash \mathbf{A\neg(\neg B\neg C)\to\neg[\neg(AB)\neg(AC)]}$　合取对析取变形分配律

12.1.2　*Cm* 的原始规则

规则Ⅰ. 从 $\vdash\mathbf{A}$ 与 $\vdash\mathbf{A\to B}$ 得出 $\vdash\mathbf{B}$。　充分条件分离规则

规则Ⅱ. 从 $\vdash\mathbf{A}$ 与 $\vdash\mathbf{B}$ 得出 $\vdash\mathbf{AB}$。　合取构成规则

也可以分别表示为：

Ⅰ. $\vdash\mathbf{A},\vdash\mathbf{A\to B}\ \vdash\!\!-\ \vdash\mathbf{B}$；　　Ⅱ. $\vdash\mathbf{A},\vdash\mathbf{B}\ \vdash\!\!-\ \vdash\mathbf{AB}$。

12.2　*Cm* 的导出公式（1）——兼导出规则及其证明

公式 1. $\vdash\mathbf{(A\to B)\to(B\to C)\to A\to C}$　（充分条件传递律（ⅱ））

证明：

（1）$\vdash\mathbf{(B\to C)\to(A\to B)\to A\to C}$　（**公理 3** 充分条件传递律（ⅰ））

（2）$\vdash\mathbf{[(B\to C)\to(A\to B)\to A\to C]\to[(A\to B)\to(B\to C)\to A\to C]}$

（**公理 2** 充分条件易位律）

（3）$\vdash\mathbf{(A\to B)\to(B\to C)\to A\to C]}$　（（1）、（2），充分条件分离规则）

Q. E. D

Ⅲ. 充分条件传递规则

$\vdash$ **A→B**, $\vdash$ **B→C** $\models$ $\vdash$**A→C**

证明：

(1) $\vdash$(**A→B**)→(**B→C**)→**A→C**　　(公式 1 充分条件传递律(ⅱ))

(2) $\vdash$(**A→B**)　　(题设)

(3) $\vdash$(**B→C**)→**A→C**　　((1)、(2),充分条件分离规则)

(4) $\vdash$ **B→C**　　(题设)

(5) $\vdash$ **A→C**　　((3)、(4),充分条件分离规则)

Q. E. D

公式 2.　$\vdash$ **A↾B →B↾A**　　(尽举相容交换律)

证明：

(1) $\vdash$ (¬**A→B**)→¬**B→A**　　(**公理 4** 充分条件逆否律(ⅰ))

(2) $\vdash$ (**A↾B**)→**B↾A**　　((1),↾的定义)

Q. E. D

公式 3.　$\vdash$**A↾B↾C→B↾A↾C**　　(尽举相容交换结合律)

证明：

(1) $\vdash$ (¬**A→**¬**B→C**)→¬**B→**¬**A→C**　(**公理 2** 充分条件易位律)

(2) $\vdash$ (¬**A→B↾C**)→¬**B→**¬**A→C**　((1),↾的定义)

(3) $\vdash$ (¬**A→B↾C**)→¬**B→A↾C**　((2),↾的定义)

(4) $\vdash$ (**A↾B↾C**)→¬**B→A↾C**　((3),↾的定义)

(5) $\vdash$ (**A↾B↾C**)→ **B↾A↾C**　((4),↾的定义)

Q. E. D

提请注意,**A→B→C∨A→C∨B** 不成立。这是*Cm* 的除外式。

公式 4. $\vdash$**A→B→C↾A→C↾B**　　(充分条件附加律)

证明：

(1) $\vdash$ **A→B→**¬**C→A→**¬**C→B**　　(**公理 3** 充分条件传递律(ⅰ))

(2) $\vdash$**A→B→C↾A→**¬**C→B**　　((1),↾的定义)

(3) $\vdash$ **A→B→C↾A→C↾B**　　((2),↾的定义)

Q. E. D

公式 5. $\vdash$ **A→A**　　(命题逻辑内涵同一律(ⅰ))

证明：

(1) $\vdash$ **A→A A**　　(**公理 6** 合取重叠律(ⅰ))

(2) $\vdash \mathbf{A}\ \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （公理 7 合取分解律（ⅰ））
(3) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （（1），（2），Ⅲ充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 6. $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}$ （命题逻辑内涵同一律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （命题逻辑内涵同一律（ⅰ））
(2) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （命题逻辑内涵同一律（ⅰ））
(3) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A})(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A})$ （（1），（2），合取规则）
(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}$ （（3），$\rightleftharpoons$的定义）

Q. E. D

公式 7. $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{A}$ （命题逻辑内涵排中律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （公式 5 命题逻辑内涵同一律（ⅰ））
(2) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{A}$ (1)，$\upharpoonright$的定义）

Q. E. D

公式 8. $\vdash \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A}$ （命题逻辑内涵排中律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{A}$ （公式 7 命题逻辑内涵排中律（ⅰ））
(2) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A}$ （公式 2 尽举相容交换律）
(3) $\vdash \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A}$ （（1），（2），规则Ⅰ充分条件分离规则）

Q. E. D

公式 9. $\vdash \neg \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （双否消去律）

证明：

(1) $\vdash \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A}$ （公式 8 命题逻辑内涵排中律（ⅱ））
(2) $\vdash \neg \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （（1），$\upharpoonright$的定义）

Q. E. D

公式 10. $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \neg \mathbf{A}$ （双否增消律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \neg \mathbf{A}$ （公理 1 双否引入律）
(2) $\vdash \neg \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （公式 9 双否消去律）

(3)　$\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{A})(\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A})$　((1),(2),规则Ⅱ合取规则)
(4)　$\vdash\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{A}$　((3),$\rightleftharpoons$的定义)

Q. E. D

公式 11. $\vdash\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{B}$　(合取分解律(ⅱ))

证明:

(1) $\vdash\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{BA}$　(公理 8 合取交换律)
(2) $\vdash\mathbf{BA}\rightharpoonup\mathbf{B}$　(公理 7 合取分解律(ⅰ))
(3) $\vdash\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{B}$　((1),(2),Ⅲ充分条件传递规则)

Q. E. D

公式 12. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$　(充分条件逆否律(ⅱ))

证明:

(1)　$\vdash\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}$　(公式 9 双否消去律)
(2)　$\vdash(\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$ (公式 1,充分条件传递律(ⅱ))
(3)　$\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$　((1),(2),Ⅰ充分条件分离规则)
(4) $\vdash\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$　(公理 4 充分条件逆否律(ⅰ))
(5) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$　((3),(4),Ⅲ充分条件传递规则)

Q. E. D

Ⅳ. 充要条件传递规则

$$\vdash\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B},\ \vdash\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{C}\ \longmapsto\ \vdash\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{C}$$

证明:

(1) $\vdash\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B}$　(题设)
(2) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})$　((1),$\rightleftharpoons$的定义)
(3)　$\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$　((2),公理 7 合取分解律(ⅰ))
(4) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$　((2),(3),Ⅰ充分条件分离规则)
(5) $\vdash\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{C}$　(题设)
(6) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{B})$　((5),$\rightleftharpoons$的定义)
(7) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$　((6),公理 7 合取分解律(ⅰ))
(8) $\vdash\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$　((6),(7),Ⅰ充分条件分离规则)
(9) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C}$　((4)、(8),Ⅲ充分条件传递规则)
(10) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{B})$　((6),公式 11 合取分解律(ⅱ))
(11) $\vdash\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{B}$　((6),(10),Ⅰ充分条件分离规则)
(12) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A}$　((2),公式 11 合取分解律(ⅱ))
(13) $\vdash\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A}$　((2),(12),Ⅰ充分条件分离规则)

(14) $\vdash \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}$ ((11),(13),Ⅲ充分条件传递规则)

(15) $\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A})$ ((9),(14),Ⅱ合取规则)

(16) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{C}$ ((15),$\rightleftharpoons$的定义)

Q. E. D

12.3 *Cm* 的元定理(1)

下面是一个很重要的元定理——我们将元定理的名称置于方括号中表示该定理为元定理:

[充要条件定理] 设 $\mathbf{A}'$为把在 $\mathbf{A}$ 中的某些 $\mathbf{B}_1,\cdots,\mathbf{B}_n$ 的出现相应地置换成 $\mathbf{B}_1',\cdots,\mathbf{B}_n'$后得出的。若 $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1',\cdots,\vdash \mathbf{B}_n \rightleftharpoons \mathbf{B}_n'$,则 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

证明:

壹、先证明当 $n=1$ 时充要条件定理成立。

(子)要证明当 $n=1$ 时充要条件定理成立,先得证明以下规则。

规则 1. $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1' \models\!\!\!- \vdash \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1'$

证:

(1) $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1'$ (题设)

(2) $\vdash (\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1')(\mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1)$ ((1),$\rightleftharpoons$的定义)

(3) $\vdash (\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1')(\mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1'$ ((2),**公理 7** 合取分解律(i))

(4) $\vdash \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1'$ (2),(3),Ⅰ充分条件分离规则)

Q. E. D

规则 2. $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1' \models\!\!\!- \vdash \mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1$

证:

(1) $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1'$ (题设)

(2) $\vdash (\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1')(\mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1)$ ((1),$\rightleftharpoons$的定义)

(3) $\vdash (\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1')(\mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1$

((2),公式 11 合取分解律((ii)))

(4) $\vdash \mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1$

((2),(3),Ⅰ充分条件分离规则)

Q. E. D

(丑)还要证明以下规则。

规则 3. $\vdash \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1', \vdash \mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1 \models\!\!\!- \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$

规则 4. $\vdash \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1', \vdash \mathbf{B}_1' \rightarrow \mathbf{B}_1 \models\!\!\!- \vdash \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A}$

要证明规则 3、规则 4,又得先证明以下规则。

规则甲. $\vdash \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1', \vdash \mathbf{C}_1' \rightarrow \mathbf{C}_1 \models\!\!\!- \vdash \neg \mathbf{C}_1 \rightarrow \neg \mathbf{C}_1'$

证：

(1) $\vdash \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1$ （题设）

(2) $\vdash (\mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1) \rightharpoonup \neg \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \neg \mathbf{C}_1{}'$ （公式 12 充分条件逆否律（ⅱ））

(3) $\vdash \neg \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \neg \mathbf{C}_1{}'$ （(1)、(2)，Ⅰ充分条件分离规则）

Q. E. D

规则乙. $\vdash \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$，$\vdash \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1 \;\vdash\!\!-\; \vdash \mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'\mathbf{D}_1$

证：

(1) $\vdash \mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1$ （公理 7 合取分解律（ⅰ））

(2) $\vdash \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$ （题设）

(3) $\vdash \mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$ （(1)、(2)，Ⅲ充分条件传递规则）

(4) $\vdash \mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1$ （公式 11 合取分解律（ⅱ））

(5) $\vdash (\mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}')(\mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1)$ （(1)、(4)，Ⅱ合取规则）

(6) $\vdash (\mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}')(\mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1) \rightharpoonup \mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'\mathbf{D}_1$

（(5)，公理 9 合取构成律）

(7) $\vdash \mathbf{C}_1\,\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'\mathbf{D}_1$ （(5)、(6)，Ⅰ充分条件分离规则）

Q. E. D

规则丙. $\vdash \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$，$\vdash \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1 \;\vdash\!\!-\; \vdash \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1{}'$

证：

(1) $\vdash \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1$ （公理 7 合取分解律（ⅰ））

(2) $\vdash \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1$ （公理 11 合取分解律（ⅱ））

(3) $\vdash \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$ （题设）

(4) $\vdash \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$ （(2)、(3)，Ⅲ充分条件传递规则）

(5) $\vdash (\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}')$ （(1)、(4)，Ⅱ合取规则）

(6) $\vdash (\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}') \rightharpoonup \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1{}'$

（(5)，公理 9 合取构成律）

(7) $\vdash \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1\mathbf{C}_1{}'$ （(5)、(6)，Ⅰ充分条件分离规则）

Q. E. D

规则丁. $\vdash \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$，$\vdash \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1 \;\vdash\!\!-\; \vdash (\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1) \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{D}_1$

证：

(1) $\vdash \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1$ （题设）

(2) $\vdash (\mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1) \rightharpoonup (\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1) \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{D}_1$

（公式 1 充分条件传递律（ⅱ））

(3) $\vdash (\mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{D}_1) \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{D}_1$ （(1)、(2)，Ⅰ充分条件分离规则）

Q. E. D

规则戊. $\vdash \mathbf{C}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$，$\vdash \mathbf{C}_1{}' \rightharpoonup \mathbf{C}_1 \;\vdash\!\!-\; \vdash (\mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1) \rightharpoonup \mathbf{D}_1 \rightharpoonup \mathbf{C}_1{}'$

证：

(1) $\vdash \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1'$　　(题设)

(2) $\vdash (\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1') \rightarrow (\mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1) \rightarrow \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1'$　(公式 1 充分条件传递律(ⅱ))

(3) $\vdash (\mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1) \rightarrow \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1'$　　((1)、(2)，Ⅰ充分条件分离规则)

Q. E. D

规则己. $\vdash \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1'$，$\vdash \mathbf{C}_1' \rightarrow \mathbf{C}_1 \models \vdash (\mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1') \rightarrow \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1$

证：

(1) $\vdash \mathbf{C}_1' \rightarrow \mathbf{C}_1$　　(题设)

(2) $\vdash (\mathbf{C}_1' \rightarrow \mathbf{C}_1) \rightarrow (\mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1') \rightarrow \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1$　(公式 1 充分条件传递律(ⅱ))

(3) $\vdash (\mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1') \rightarrow \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1$　　((1)、(2)，Ⅰ充分条件分离规则)

Q. E. D

现在证明规则 3、规则 4。

(ⅰ)先考虑下面这种特殊情况：$\mathbf{B}_1$就是 **A** 自身。也就是说，**A** 仅有的被置换的在其中出现的子式就是全部 **A**，所以，$\mathbf{A}'$就是 $\mathbf{B}_1'$。因而，依据题设可得，$\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1'$，这也就是 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

(ⅱ)在排除特殊情况(ⅰ)的条件下，施归纳于 **A** 的高。如果 **A** 是一个命题变元 **p**，那么，在排除特殊情况(ⅰ)的条件下，没有任何出现的子式被置换，此时，$\mathbf{A}'$就是 **A** 本身。据公式 6，命题逻辑内涵同一律(ⅱ)，可得 $\vdash \mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{p}$，此即 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

以上就是基始部分的证明。

我们接着证明归纳部分。归纳部分有三种情况：① **A** 是$\neg \mathbf{C}$，② **A** 是 **CD**，③ **A** 是$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$。

① 若 **A** 是$\neg \mathbf{C}$，则$\mathbf{A}'$就是 $\neg \mathbf{C}'$，这 $\mathbf{C}'$是由 **C** 按所规定的方式通过置换得出的。据归纳假设得 $\vdash \mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}'$，由(子)、(丑)中的规则甲得 $\vdash \neg \mathbf{C} \rightarrow \neg \mathbf{C}'$与 $\vdash \neg \mathbf{C}' \rightarrow \neg \mathbf{C}$；据规则Ⅱ合取规则和$\rightleftharpoons$的定义，得$\vdash \neg \mathbf{C} \rightleftharpoons \neg \mathbf{C}'$，这就是$\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

② 若 **A** 是 **CD**，则$\mathbf{A}'$就是$\mathbf{C}'\mathbf{D}'$，这里的$\mathbf{C}'$、$\mathbf{D}'$分别由 **C**、**D** 按所规定的方式通过置换得出。据归纳假设得 $\vdash \mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}'$与 $\vdash \mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{D}'$，由 $\vdash \mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}'$和(子)、(丑)中规则乙得 $\vdash \mathbf{CD} \rightleftharpoons \mathbf{C}'\mathbf{D}$ 与 $\vdash \mathbf{C}'\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{C\ D}$；据规则Ⅱ合取规则和$\rightleftharpoons$的定义，得 $\vdash \mathbf{C}'\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{C}'\mathbf{D}'$；据 $\vdash \mathbf{CD} \rightleftharpoons \mathbf{C}'\mathbf{D}$、$\vdash \mathbf{C}'\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{C}'\mathbf{D}'$与规则Ⅳ充要条件传递规则，有 $\vdash \mathbf{CD} \rightleftharpoons \mathbf{C}'\mathbf{D}'$，此式就是 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

③ 若 **A** 是 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$，则 $\mathbf{A}'$是 $\mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{D}'$，这里的 $\mathbf{C}'$、$\mathbf{D}'$分别由 **C**、**D** 按所规定的方式通过置换得出。据归纳假设 $\vdash \mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}'$，(子)、(丑)中规则丁、据规则Ⅱ合取规则和$\rightleftharpoons$的定义，就得 $\vdash \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{D}$；据归纳假设 $\vdash \mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{D}'$，(子)、(丑)中规则戊、规则Ⅱ合取规则和$\rightleftharpoons$的定义 $\vdash \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{D}'$；再据规则Ⅳ 充要条件传递规则，得 $\vdash \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{D}'$，此式就是 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

归纳部分证明完毕。这就是规则 3、规则 4 的证明。

（子）、（丑）合起来就是壹的证明。

贰、再证明 $n>1$ 时充要条件定理成立。

设 $\mathbf{A}'$为把 $\mathbf{A}$ 中的某些 $\mathbf{B}_1$ 的出现置换成 $\mathbf{B}_1'$后得出；$\mathbf{A}_2'$为把 $\mathbf{A}_1'$中的某些 $\mathbf{B}_2$ 的出现置换成 $\mathbf{B}_2'$后得出；……；$\mathbf{A}'$为把 $\mathbf{A}'_{n-1}$ 中的某些 $\mathbf{B}_n$的出现置换成 $\mathbf{B}_n'$后得出。逐次使用壹就得：

$\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1' \models\!\!\!— \vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}_1'$，$\vdash \mathbf{B}_2 \rightleftharpoons \mathbf{B}_2' \models\!\!\!— \vdash \mathbf{A}_1' \rightleftharpoons \mathbf{A}_2'$，…，

$\vdash \mathbf{B}_n \rightleftharpoons \mathbf{B}_n' \models\!\!\!— \vdash \mathbf{A}'_{n-1} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

逐次使用规则Ⅳ充要条件传递规则就得：

$\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}_1'$，$\vdash \mathbf{A}_1' \rightleftharpoons \mathbf{A}_2'$，…，$\vdash \mathbf{A}'_{n-1} \rightleftharpoons \mathbf{A}' \models\!\!\!— \vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

至此，充要条件定理得证，即：

若 $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1'$，…，$\vdash \mathbf{B}_n \rightleftharpoons \mathbf{B}_n'$，则 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$。

［置换定理］　设 $\mathbf{A}'$为把 $\mathbf{A}$ 中的某些 $\mathbf{B}_1,\cdots,\mathbf{B}_n$的出现相应地置换成 $\mathbf{B}_1'$，…，$\mathbf{B}_n'$后得出。

若 $\vdash \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1'$，…，$\vdash \mathbf{B}_n \rightleftharpoons \mathbf{B}_n'$，则 $\vdash \mathbf{A}$ 当且仅当 $\vdash \mathbf{A}'$。

证明：据充要条件定理，在题设提供的条件下，必定有 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}'$，又据$\rightleftharpoons$的定义、公理 6 合取重叠律和规则Ⅰ充分条件分离规则，就有 $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}'$；同理又有 $\vdash \mathbf{A}' \rightharpoonup \mathbf{A}$；再据规则Ⅰ充分条件分离规则，又有若 $\vdash \mathbf{A}$ 则 $\vdash \mathbf{A}'$且有若 $\vdash \mathbf{A}'$ 则 $\vdash \mathbf{A}$。至此，置换定理得证。

置换定理在今后的公式证明中起着简化证明步骤的重要作用。也就是说，在展开形式系统时置换定理很有用。下面我们接着做展开形式系统的工作。

12.4　*Cm* 的导出公式（2）

公式 13. $\vdash \neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$　　　　（充分条件逆否律（ⅲ））

证明：

（1）$\vdash (\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$　　　　（**公理 4** 充分条件逆否律（ⅰ））

（2）$\vdash (\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$　　　　（**公理 4** 充分条件逆否律（ⅰ））

（3）$\vdash [(\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}][(\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}]$

（（1）、（2），规则Ⅱ合取规则）

（4）$\vdash (\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightleftharpoons \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$　　　　（（3），$\rightleftharpoons$的定义）

Q. E. D

公式 14. $\vdash (\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$　　　　（充分条件逆否律（ⅳ））

证明：

(1) $\vdash (\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{B}$

（公式 12 充分条件逆否律(ⅱ)）

(2) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(3) $\vdash (\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{B}$ （(1)、(2)，充要条件定理）

(4) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{B}$ （公式 10 双否增消律）

(5) $\vdash (\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ （(3)、(4)，充要条件定理）

Q. E. D

公式 15. $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （充分条件逆否律(ⅴ)）

证明：

(1) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （公式 12 充分条件逆否律(ⅱ)）

(2) $\vdash (\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ （公式 14 充分条件逆否律(ⅳ)）

(3) $\vdash [(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}][(\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}]$

（(1)、(2)，规则Ⅱ合取规则）

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （(3)，$\rightleftharpoons$的定义）

Q. E. D

公式 16. $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （若$\upharpoonleft$则$\vee$律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} \rightharpoonup \neg\neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B})$ （**公理 1.** 双否引入律）

(2) $\vdash \neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg (\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$ （**公理 5.** 非充分条件律）

(3) $\vdash \neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B})$ （(2)，$\upharpoonleft$的定义）

(4) $\vdash (\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B})) \rightharpoonup \neg\neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg (\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B})$

（(3)，充分条件逆否律(ⅱ)）

(5) $\vdash \neg\neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg (\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B})$ （(3)、(4)，Ⅰ充分条件分离规则）

(6) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} \rightharpoonup \neg (\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B})$ （(1)、(5)，Ⅲ充分条件传递规则）

(7) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （(6)，$\vee$的定义）

Q. E. D

公式 17. $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ （$\vee$引入律(ⅰ)）

证明：

(1) $\vdash (\neg \mathbf{B}\ \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg (\neg \mathbf{B}\ \neg \mathbf{A})$

（公式 1 充分条件逆否律(ⅱ)）

(2) $\vdash \neg \mathbf{B}\ \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （公式 11 合取分解律(ⅱ)）

(3) $\vdash \neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\neg \mathbf{B}\ \neg \mathbf{A})$　　((1)、(2),I充分条件分离规则)

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}$　　(公式 10 双否增消律)

(5) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\neg \mathbf{B}\ \neg \mathbf{A})$　　((4)、(3),置换定理)

(6) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$　　((5),∨ 的定义)

Q. E. D

公式 18. $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$　　(∨引入律(ii))

证明:

(1) $\vdash \neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$　　(**公理 7** 合取分解律(i))

(2) $\vdash (\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B})$

(公式 1 充分条件逆否律(ii))

(3) $\vdash \neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B})$　　((1)、(2),分离)

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}$　　(公式 10 双否增消律)

(5) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{B})$　　((4)、(3),置换定理)

(6) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$　　((5),∨ 的定义)

Q. E. D

公式 19. $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$　　(∨重叠消去律)

证明:

(1) $\vdash \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{A}$　　(**公理 6** 合取重叠律(i))

(2) $\vdash (\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{A}) \rightleftharpoons \neg(\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{A}$

(公式 15 充分条件逆否律(v))

(3) $\vdash \neg(\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg \mathbf{A}$　　((1)、(2),置换定理)

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}$　　(公式 10 双否增消律)

(5) $\vdash \neg(\neg \mathbf{A}\ \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}$　　((3)、(4),置换定理)

(6) $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$　　((5),∨的定义)

Q. E. D

公式 20. $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$　　(充分条件逆否律(vi))

证明:

(1) $\vdash \neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$　　(公式 13 充分条件逆否律(iii))

(2) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}$　　(公式 10 双否增消律)

(3) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{B}$　　(公式 10 双否增消律)

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$　　((1)、(2)、(3),置换定理)

Q. E. D

公式 21. $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （↾重叠消去律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ （公式 16 若↾则∨律）

(2) $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （(5)，公式 19∨ 重叠消去律）

(3) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （(1)、(2)，Ⅲ充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 22. $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ （∨重叠律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ （公式 18 ∨引入律（ⅱ））

(2) $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （公式 19∨重叠消去律）

(3) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{B})(\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A})$ （(1)、(2)，Ⅱ合取规则）

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （(3)，$\rightleftharpoons$ 的定义）

Q. E. D

公式 23. $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{AA}$ （∧重叠律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{AA}$ （**公理 6** 合取重叠律（ⅰ））

(2) $\vdash \mathbf{AA} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （**公理 7** 合取分解律（ⅰ））

(3) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{AA})(\mathbf{AA} \rightharpoonup \mathbf{A})$ （(1)、(2)，合取规则））

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{AA}$ （(3)，$\rightleftharpoons$ 的定义）

Q. E. D

公式 24. $\vdash (\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}$ （类弱归谬律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （公式 21↾重叠消去律）

(2) $\vdash (\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}$ （↾的定义）

Q. E. D

公式 25. $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （弱归谬律）

证明：

(1) $\vdash (\neg\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （公式 24 类弱归谬律）

(2) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(3) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$ （(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 26. $\vdash A \rightharpoonup A\,!\,A$　　（! 重叠引入律）

证明：

（1）$\vdash (A \rightharpoonup \neg A) \rightharpoonup \neg A$　　（弱归谬律）

（2）$\vdash ((A \rightharpoonup \neg A) \rightharpoonup \neg A) \rightleftharpoons \neg\neg A \rightharpoonup \neg(A \rightharpoonup \neg A)$

（公式 15 充分条件逆否律（v））

（3）$\vdash \neg\neg A \rightharpoonup \neg(A \rightharpoonup \neg A)$　　（（1）、（2），置换定理）

（4）$\vdash A \rightleftharpoons \neg\neg A$　　（公式 10 双否增消律）

（5）$\vdash A \rightharpoonup \neg(A \rightharpoonup \neg A)$　　（（3）、（4），置换定理）

（6）$\vdash A \rightharpoonup A\,!\,A$　　（（5），! 的定义）

Q. E. D

Cm 的公式中有：$\vdash A \rightleftharpoons AA$、$\vdash A \rightleftharpoons A \vee B$、$\vdash A \upharpoonright A \rightharpoonup A$、$\vdash A \rightharpoonup A\,!\,A$；但 $A \rightharpoonup A \upharpoonright A$、$A\,!\,A \rightharpoonup A$ 在 *Cm* 中不是公式。由此可看出 *Cm* 的特色，*Cm* 是对客观世界逻辑规律的如实刻画，又符合人的普通逻辑思维实际。

公式 27. $\vdash \neg(AB) \rightharpoonup \neg A \vee \rightharpoonup \neg B$　　（∨ 的反演律（ i ））

证明：

（1）$\vdash \neg(\neg\neg A\ \neg\neg B) \rightharpoonup \neg(\neg\neg A\ \neg\neg B)$

（公式 5 命题逻辑内涵同一律（ i ））

（2）$\vdash \neg(\neg\neg A\ \neg\neg B) \rightharpoonup \neg A \vee \neg B$　　（（1），∨ 的定义）

（3）$\vdash A \rightleftharpoons \neg\neg A$　　（公式 10 双否增消律）

（4）$\vdash \neg(AB) \rightharpoonup \neg A \vee \neg B$　　（（2）、（3），置换定理）

Q. E. D

公式 28. $\vdash \neg(A\,!\,B) \rightharpoonup \neg A \upharpoonright \neg B$　　（! 的否定律（ i ））

证明：

（1）$\vdash \neg(A\,!\,B) \rightharpoonup \neg(A\,!\,B)$　　（公式 5 命题逻辑内涵同一律（i））

（2）$\vdash \neg(A\,!\,B) \rightharpoonup \neg\neg(A \rightharpoonup \neg B)$　　（（1），! 的定义）

（3）$\vdash (A \rightharpoonup \neg B) \rightleftharpoons \neg\neg(A \rightharpoonup \neg B)$　　（公式 10 双否增消律）

（4）$\vdash \neg(A\,!\,B) \rightharpoonup (A \rightharpoonup \neg B)$　　（（2）、（3），置换定理）

（5）$\vdash A \rightleftharpoons \neg\neg A$　　（公式 10 双否增消律）

（6）$\vdash \neg(A\,!\,B) \rightharpoonup (\neg\neg A \rightharpoonup \neg B)$　　（（4）、（5），置换定理）

（7）$\vdash \neg(A\,!\,B) \rightharpoonup (\neg A \upharpoonright \neg B)$　　（（6），↾ 的定义）

Q. E. D

公式 29. $\vdash \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{AB})$ （∧的反演律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ （公式5 命题逻辑内涵同一律(ⅰ)）

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\neg\neg\mathbf{A}\ \neg\neg\mathbf{B})$ （(1)，∨的定义）

(3) $\vdash \mathbf{A}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(4) $\vdash \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{AB})$ （(2)、(3)，两次置换定理）

Q. E. D

公式 30. $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})$ （！ 的否定律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ （公式5 命题逻辑内涵同一律(ⅰ)）

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\neg\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ （(1)，↾的定义）

(3) $\vdash \mathbf{A}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(4) $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ （(2)、(3)，置换定理）

(5) $\vdash \mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （公式 10 双否增消律）

(6) $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （(4)、(5)，置换定理）

(7) $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})$ （(6)，！ 的定义）

Q. E. D

公式 31. $\vdash \neg(\mathbf{AB})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ （∧的反演律（ⅲ））

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{AB})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ （公式 27 ∧的反演律（ⅰ））

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{AB})$ （公式 29 ∧的反演律（ⅱ））

(3) $\vdash(\neg(\mathbf{AB})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B})(\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{AB}))$

（(2)、(3)，合取规则）

(4) $\vdash(\neg(\mathbf{AB})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ （(3)，⇌的定义）

Q. E. D

公式 32. $\vdash \neg(\mathbf{A}\ !\ \mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}$ （！ 的否定律（ⅲ））

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\rightharpoonup(\neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B})$ （公式 28 ！ 的否定律（ⅰ））

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})$ （公式 30 ！ 的否定律(ⅱ)）

(3) $\vdash(\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\rightharpoonup(\neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}))(\neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B}))$

（(1)、(2)，合取规则）

(4) $\vdash(\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\rightleftharpoons(\neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}))$ （(3)，⇌的定义）

Q. E. D

公式 33. $\vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B}$　（∨的反演律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$　（公式 5 内涵同一律（ⅰ））

(2) $\vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\neg(\neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B})$　（∨ 的定义）

(3) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{A}$　（公式 10 双否增消律）

(4) $\vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B}$　（(2)、(3)，置换定理））

Q. E. D

公式 34. $\vdash \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}$　（↾的否定律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B})$　（公式 5 内涵同一律（ⅰ））

(2) $\vdash \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$　（↾的定义）

(3) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{B}$　（公式 10 双否增消律）

(4) $\vdash \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\neg\mathbf{B})$　（(2)、(3)，置换定理））

(5) $\vdash \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}$　（(4)，！ 的定义））

Q. E. D

公式 35. $\vdash \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$　（∨的反演律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\neg(\neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B})$　（**公理 1** 双否引入律）

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$　（(1)，∨的定义）

Q. E. D

公式 36. $\vdash \neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B})$　（↾的否定律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\neg\mathbf{B})$　（！ 的定义）

(2) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{B}$　（公式 10 双否增消律）

(3) $\vdash \neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$　（(1)、(2)，置换定理）

(4) $\vdash \neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B})$　（(3)，↾的定义）

Q. E. D

公式 37. $\vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightleftharpoons \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B}$　（∨的反演律（ⅲ））

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B}$　（公式 33 ∨的反演律（ⅰ））

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$　（公式 35 ∨的反演律（ⅱ））

(3) $\vdash(\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B})(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}))$ ((1)、(2),合取规则)

(4) $\vdash\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$ ((3),$\rightleftharpoons$的定义)

Q. E. D

公式 38. $\vdash\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}$ ($\upharpoonright$的否定律(ⅲ))

证明:

(1) $\vdash\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}$ (公式 34 $\upharpoonright$的否定律(ⅰ))

(2) $\vdash\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})$ (公式 36 $\upharpoonright$的否定律(ⅱ))

(3) $\vdash(\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B})(\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}))$ ((1)、(2),合取规则)

(4) $\vdash\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}$ ((3),$\rightleftharpoons$ 的定义)

Q. E. D

公式 39. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ (简单二难律(ⅰ))

证明:

(1) $\vdash(\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})(\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$ (**公理 9** 合取构成律)

(2) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightleftharpoons\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$ (公式 15 充分条件逆否律(v))

(3) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$ ((1)、(2),置换定理)

(4) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightleftharpoons\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ (公式 15 充分条件逆否律(v))

(5) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$ ((3)、(4),置换定理)

(6) $\vdash\neg\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{C}$ (公式 15 充分条件逆否律$\neg$v))

(7) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\neg(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{C}$ ((5)、(6),置换定理)

(8) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{C}$ ((7),$\vee$的定义)

(9) $\vdash\mathbf{C}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{C}$ (公式 10 双否增消律)

(10) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ ((8)、(9),置换定理)

Q. E. D

公式 40. $\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ ($\vee$ 交换律(ⅰ))

证明:

(1) $\vdash\neg\mathbf{A}\neg\mathrm{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\neg\mathbf{A}$ (**公理 8** 合取交换律(ⅰ))

(2) $\vdash \neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\neg\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg(\neg\mathbf{B}\neg\mathbf{A})\rightharpoonup\neg(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B})$
(公式 15 充分条件逆否律(v))

(3) $\vdash \neg(\neg\mathbf{B}\neg\mathbf{A})\rightharpoonup\neg(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B})$　((1)、(2),置换定理)

(4) $\vdash \mathbf{B}\vee\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$　((3),两次 ∨ 的定义)

Q. E. D

公式 41. $\vdash \mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}\vee\mathbf{A}$　(∨ 交换律(ii))

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{B}\vee\mathbf{A}$　(公式 40 ∨ 交换律(i))

(2) $\vdash \mathbf{B}\vee\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$　(公式 40 ∨ 交换律(i))

(3) $\vdash(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{B}\vee\mathbf{A})(\mathbf{B}\vee\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$
((1)、(2),合取规则)

(4) $\vdash \mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}\vee\mathbf{A}$　((3),⇌ 的定义)

Q. E. D

公式 42. $\vdash \mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{A}$　(↾交换律(ii))

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{A}$　(公式 2 尽举相容交换律)

(2) $\vdash \mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}$　(公式 2 尽举相容交换律)

(3) $\vdash(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{A})(\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})$
((1)、(2),合取规则)

(4) $\vdash \mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{A}$　((3),⇌ 的定义)

Q. E. D

公式 43. $\vdash \mathbf{AB}\rightleftharpoons\mathbf{BA}$　(∧ 交换律(ii))

证明：

(1) $\vdash \mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{BA}$　(**公理 8** 合取交换律(i))

(2) $\vdash \mathbf{BA}\rightharpoonup\mathbf{AB}$　(**公理 8** 合取交换律(i))

(3) $\vdash(\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{BA})(\mathbf{BA}\rightharpoonup\mathbf{AB})$　((1)、(2),合取规则)

(4) $\vdash \mathbf{AB}\rightleftharpoons\mathbf{BA}$　((3),⇌ 的定义)

Q. E. D

公式 44. $\vdash \mathbf{A}\,!\,\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{B}\,!\,\mathbf{A}$　(! 交换律(i))

证明：

(1) $\vdash (\neg\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B}$ （公理 4 充分条件逆否律(ⅰ)）

(2) $\vdash ((\neg\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \neg\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B}) \rightleftharpoons \neg(\neg\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})$
$\rightharpoonup \neg(\neg\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A})$ （公式 15 充分条件逆否律(ⅴ)）

(3) $\vdash \neg(\neg\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\neg\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A})$ （(1)、(2)，置换定理）

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(5) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{B}$ （公式 10 双否增消律）

(6) $\vdash \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A})$ （(3)、(4)、(5)，两次置换定理）

(7) $\vdash \mathbf{A} ! \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{B} ! \mathbf{A}$ （(6)，两次！的定义）

Q. E. D

公式 45. $\vdash \mathbf{A} ! \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{B} ! \mathbf{A}$ （！交换律(ⅱ)）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} ! \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{B} ! \mathbf{A}$ （公式 44 ！交换律(ⅱ)）

(2) $\vdash \mathbf{B} ! \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} ! \mathbf{B}$ （公式 44 ！交换律(ⅱ)）

(3) $\vdash (\mathbf{A}!\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{B}!\mathbf{A})(\mathbf{B}!\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B})$ （(1)、(2)，合取规则）

(4) $\vdash (\mathbf{A}!\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{B}!\mathbf{A})$ （(3)，$\rightleftharpoons$ 的定义）

Q. E. D

公式 46. $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{AC} \rightharpoonup \mathbf{B}$（$\rightharpoonup$前件附加律(ⅱ)）

证明：

(1) $\vdash (\mathbf{AC} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{AC} \rightharpoonup \mathbf{B}$ （公式 1 充分条件传递律(ⅱ)）

(2) $\vdash \mathbf{AC} \rightharpoonup \mathbf{A}$ （公理 7 合取分解律(ⅰ)）

(3) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{AC} \rightharpoonup \mathbf{B}$ （(1)、(2)，充分条件分离规则）

Q. E. D

公式 47. $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{AB} \rightharpoonup \mathbf{CD}$ （二$\rightharpoonup$前后件∧律(ⅱ)）

证明：

(1) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C}$ （公理 7 合取分解律(ⅰ)）

(2) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{AB} \rightharpoonup \mathbf{C}$ （公式 46$\rightharpoonup$前件附加律(ⅱ)）

(3) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{AB} \rightharpoonup \mathbf{C}$ （(1)、(2)，Ⅲ充分条件传递规则）

(4) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}$ （公式 11 合取分解律(ⅱ)）

(5) $\vdash (\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{BA} \rightharpoonup \mathbf{D}$ （公式 46 $\rightharpoonup$前件附加律(ⅱ)）

(6) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{BA} \rightharpoonup \mathbf{D}$ （(1)、(2)，充分条件传递规则）

(7) $\vdash \mathbf{AB} \rightleftharpoons \mathbf{BA}$ （公式 43∧ 交换律(ⅱ)）

(8) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{AB} \rightharpoonup \mathbf{D}$ （(1)、(2)，Ⅲ充分条件传递规则）

(9) $\vdash[(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C}][(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{D}]$

((3)、(8)，Ⅱ合取规则)

(10) $\vdash[(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C}][(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{D}]$

$\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{D})$ （公理 9 合取构成律）

(11) $\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{D})$

((9)、(10)，Ⅰ充分条件分离规则)

(12) $\vdash(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{CD}$ （公理 9 合取构成律）

(13) $\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{CD}$

((11)、(12)，Ⅲ充分条件传递规则)

Q. E. D

公式 48. $\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C}\vee\mathbf{D}$ (复杂二难律(ⅰ))

证明：

(1) $\vdash(\neg\mathbf{C}\rightarrow\neg\mathbf{A})(\neg\mathbf{D}\rightarrow\neg\mathbf{B})\rightarrow\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{D}\rightarrow\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$

(公式 47 二一前后件∧律(ⅱ))

(2) $\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C}\rightleftharpoons\neg\mathbf{C}\rightarrow\neg\mathbf{A}$ (公式 15 充分条件逆否律(ⅴ))

(3) $\vdash\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D}\rightleftharpoons\neg\mathbf{D}\rightarrow\neg\mathbf{B}$ (公式 15 充分条件逆否律(ⅴ))

(4) $\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{D}\rightarrow\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}$

((1)、(2)、(3)，两次置换定理)

(5) $\vdash\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{D}\rightarrow\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}))\rightarrow\neg(\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{D})$

(公式 15 充分条件逆否律(ⅴ))

(6) $\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\neg(\neg\mathbf{A}\neg\mathbf{B}))\rightarrow\neg(\neg\mathbf{C}\neg\mathbf{D})$

((4)、(5)，置换定理)

(7) $\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{D})\rightarrow\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C}\vee\mathbf{D}$ ((6)，两次∨的定义)

Q. E. D

公式 49. $\vdash\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightarrow(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ (∨结合律(ⅰ))

证明：

(1) $\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A}$ (公式 5 命题逻辑内涵同一律(ⅰ))

(2) $\vdash\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ (公式 17 ∨引入律(ⅰ))

(3) $\vdash\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}$ (公式 5 命题逻辑内涵同一律(ⅰ))

(4) $\vdash(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C})$ ((2)、(3)，Ⅱ合取规则)

(5) $\vdash(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightarrow(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$

(公式 48 复杂二难律(ⅰ))

(6) $\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightarrow(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ ((4)、(5)，Ⅰ充分条件分离规则)

(7) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A})[\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]$ （(1)、(6)，Ⅱ合取规则）

(8) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A})[\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$

（公式48复杂二难律(ⅰ)）

(9) $\vdash\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ （(7)、(8)，I充分条件分离规则）

(10) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{C}$ （公式18 ∨引入律(ii)）

(11) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ （公式18）∨引入律(ii)

(12) $\vdash\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{C}$ （公式5命题逻辑内涵同一律(ⅰ)）

(13) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{C})$ （(11)、(12)，Ⅱ合取规则）

(14) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$

（公式48复杂二难律(ⅰ)）

(15) $\vdash\mathbf{A}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ （(13)、(14)，I充分条件分离规则）

(16) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ （(10)、(15)，Ⅲ充分条件传递规则）

(17) $\vdash(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ （公式5命题逻辑内涵同一律(ⅰ)）

(18) $\vdash[\mathbf{A}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}][(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]$

（(16)、(17)，Ⅱ合取规则）

(19) $\vdash[\mathbf{A}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}][(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]$

$\rightharpoonup\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightharpoonup[(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$

（公式48复杂二难律(ⅰ)）

(20) $\vdash\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightharpoonup[(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$

（(18)、(19)，I充分条件分离规则）

(21) $\vdash(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightleftharpoons[(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}]\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ （公式22）

(22) $\vdash\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$

（(20)、(21)，置换定理）

(23) $\vdash\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\rightharpoonup(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}$ （(9)、(22)，Ⅲ充分条件传递规则）

Q. E. D

12.5 *Cm* 的元定理（2）

再讨论 ***Cm*** 中的一个元定理——对偶定理。为了区分 ***Cn*** 中的对偶定理，我们称这里的为“**对偶定理(1)**”，相应的对偶原理称为“**对偶原理(1)**”。

先引入几个新概念。

(1) 无充子式：如果可以含有被定义联结号的 **A** 中最多只包含¬、∧、∨、!、↾、⇀6种联结号，且 **B** 为在 **A** 中出现的不含有联结号⇀的不能再长的子

式，那么，就称 **B** 为 **A** 的无充子式。

（2）后充子式：如果 **B**、**C** 为 **A** 的无充子式，且 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ 在 **A** 中出现，那么就称 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ 为 **A** 的后充子式。

（3）孤立子式：如果 **D** 为 **A** 的无充子式，并且不在 **A** 的后充子式中出现，那么就称 **D** 为 **A** 的孤立子式。

（4）对偶后充子式：设 $\mathbf{B}^{o}$ 为将在 **A** 的无充子式 **B** 中出现的 $\vee$ 与 $\wedge$，$\rightharpoonup$ 与 ! 互相替代后而得。若 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ 为 **A** 的后充子式，则称 $\mathbf{C}^{o}\rightharpoonup\mathbf{B}^{o}$ 为 **A** 的相应的对偶后充子式。

（5）对偶孤立子式：如果 **D** 为 **A** 的孤立子式，那么称 $\neg\mathbf{D}^{o}$ 为 **A** 的对偶孤立子式。

（6）对偶式：如果 $\mathbf{A}^{d}$ 为将在 **A** 中出现的后充子式 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$、孤立子式 **D** 分别换以相应的对偶后充子式 $\mathbf{C}^{o}\rightharpoonup\mathbf{B}^{o}$、对偶孤立子式 $\neg\mathbf{D}^{o}$ 而得，那么就称 $\mathbf{A}^{d}$ 为 **A** 的对偶式。

［对偶原理（1）］　如果 $\mathbf{A}^{d}$ 为 **A** 的对偶式，且 $\mathbf{A}^{d}_{\neg}$ 为把 $\mathbf{A}^{d}$ 中的全部命题变元换以其否定，那么，$\vdash\mathbf{A}\rightleftharpoons\ \vdash\mathbf{A}^{d}_{\neg}$。

证明：此前我们已证明了 ***Cm*** 的如下公式：

公式 31　$\vdash(\neg(\mathbf{AB})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$　**公式 37**　$\vdash\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\ \neg\mathrm{B}$

公式 32　$\vdash(\neg(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\rightleftharpoons(\neg\mathbf{A}\upharpoonright\neg\mathbf{B}))$　**公式 38**　$\vdash\neg(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{B}$

公式 6　$\vdash\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{A}$　**公式 15**　$\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$

根据这些公式，再加上充要条件定理，施归纳于 **A** 的高，就能证明对偶原理。在此从略。

鉴于公式 31、公式 37、公式 32、公式 38 在证明对偶原理中的作用，我们又把公式 31、公式 37 称为纯真值对偶律，把公式 32、公式 38 称为非纯真值对偶律。

［对偶定理（1）］　设 $\mathbf{A}^{d}$ 为 **A** 的对偶式，$\vdash\mathbf{A}$ 当且仅当 $\vdash\mathbf{A}^{d}$。

证明：依据对偶原理、$\rightleftharpoons$ 的定义、公理 7 及充分条件分离规则，即可证明。

同置换定理类似，对偶定理在公式证明中同样起着简化证明步骤的重要作用。下面我们继续做展开形式系统的工作。

12.6　*Cm* 的导出公式（3）

公式 50. $\vdash\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}$　　（若 $\wedge$ 则 ! 律）

证明：

（1）$\vdash\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$　　（公式 16 若 $\upharpoonright$ 则 $\wedge$ 律）

（2）$\vdash\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（（1），对偶定理（1））

Q. E. D

公式 51. $\vdash \neg(\mathbf{A}\ \neg \mathrm{A})$ （纯真值不矛盾律）

证明：

(1) $\vdash \neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A}$ （公式 8 命题逻辑内涵排中律(ii)）

(2) $\vdash \neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ （公式 16 若↾则∨律）

(3) $\vdash \neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\neg\neg\mathbf{A}\ \neg\mathbf{A})$ （(2)，∨的定义）

(4) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(5) $\vdash \neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\ \neg\mathbf{A})$ （(3)、(4)，置换定理）

(6) $\vdash \neg(\mathbf{A}\ \neg \mathrm{A})$ （(1)、(5)，充分条件分离规则）

Q. E. D

公式 52. $\vdash \neg(\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{A})$ （内涵不可矛盾律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonright \neg\mathbf{A}$ （公式 7 命题逻辑内涵排中律(i)）

(2) $\vdash \neg(\mathbf{A}!\ \neg\mathbf{A})$ （(1)，对偶定理(1)）

Q. E. D

公式 53. $\vdash \mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ （纯真值排中律）

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A}\ \neg\mathbf{A})$ （公式 51 纯真值不矛盾律）

(2) $\vdash \mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ （(1)，对偶定理(1)）

Q. E. D

公式 54. $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （若⇀则¬∨律）

证明：

(1) $\vdash \neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B} \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （公式 16 若↾则∨律）

(2) $\vdash (\neg\neg\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （(1)，↾的定义）

(3) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(4) $\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ （(2)、(3)，置换定理）

Q. E. D

公式 55. $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$ （¬↾定义⇀律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ （公式 6 命题逻辑内涵同一律(ii)）

(2) $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{A}$ （公式 10 双否增消律）

(3) ├ **A⇀B⇌ ¬¬A⇀B**　　((1)、(2),置换定理)

(4) ├ **A⇀B ⇌ ¬A↾B**　　((3),↾的定义)

Q. E. D

公式 56. ├ **AB ⇀ ¬(A⇀¬B)**　　(若∧则¬⇀¬律)

证明:

(1) ├ **AB ⇀A!B**　　(公式 50 若∧则!律)

(2) ├ **AB ⇀ ¬(A⇀¬B)**　　((1),!的定义)

Q. E. D

公式 57. ├ **A! B⇌ ¬(A⇀¬B)**　　(¬⇀¬定义!律)

证明:

(1) ├ **A! B⇌ A! B**　　(公式 6 命题逻辑内涵同一律(ii))

(2) ├ **A! B ⇀ ¬(A⇀¬B)**　　((1),!的定义)

Q. E. D

公式 58. ├ **(¬A↾B)! (A↾C)⇀ B↾C**

(二↾左肢互否⇀右肢↾律(1))

证明:

(1) ├ **(¬B ⇀ ¬A)⇀(¬A ⇀C)⇀ ¬B ⇀C**

(公式 1 充分条件传递律(ii))

(2) ├ **(A⇀B) ⇀(¬A⇀C)⇀¬B⇀C**

((1),公式 15,置换定理)

(3) ├**(A⇀B)⇀ ¬(¬B⇀C)⇀ ¬(¬A ⇀C)**

((2),公式 15,置换定理)

(4) ├ **¬(¬B ⇀C)⇀(A⇀B)⇀¬(¬A⇀C)**

((3),公理 2,I 充分条件分离规则)

(5) ├ **¬[(A⇀B)⇀ ¬(¬A⇀C)] ⇀ ¬B⇀C**

((4),公式 15,置换定理)

(6) ├**(¬A↾B)! (A↾C)⇀B↾C**

((5),一次!的定义,两次↾的定义)

Q. E. D

公式 59. ├ **(A↾B)! (¬A↾C)⇀ B ∨ C**

(二↾左肢互否⇀右肢∨律(2))

证明：

(1) $\vdash(\neg A \upharpoonright B)!\ (A \upharpoonright C)\rightharpoonup B \upharpoonright C$ （公式 58）

(2) $\vdash B \upharpoonright C \rightharpoonup B \vee C$ （公式 16）

(3) $\vdash(\neg A \upharpoonright B)!\ (A \upharpoonright C)\rightharpoonup B \vee C$ （(1),(2),Ⅲ充分条件传递规则）

公式 60. $\vdash A(B \vee C)\rightharpoonup AB \vee AC$ （∧对∨分配律）

(1) $\vdash A\neg(\neg B\neg C)\rightharpoonup \neg[\neg(AB)\neg(AC)]$

（公理 10 合取对析取变形分配律）

(2) $\vdash A(B \vee C)\rightharpoonup \neg[\neg(AB)\neg(AC)]$ （∨ 的定义）

(3) $\vdash A(B \vee C)\rightharpoonup AB \vee AC$ （∨ 的定义）

Q. E. D

至此，证明公式 60 时才用到原始公式即公理 10。因此，没有以公式 60 为证明依据的导出公式都独立于公理 10。

限于篇幅，对以下的公式，我们不再写出其证明过程。然而，为了方便对当代形式逻辑及其应用研究感兴趣的同仁参考，我们在下面再列出一些公式。

公式 61. $\vdash(A\rightharpoonup B)(A\rightharpoonup C)\rightleftharpoons A\rightharpoonup BC$ （⇀ 对∧分配律（ⅱ））

公式 62. $\vdash A \upharpoonright B \upharpoonright C \rightharpoonup(A \upharpoonright B) \upharpoonright C$ （↾结合律（ⅰ））

公式 63. $\vdash(A \vee B) \vee C \rightharpoonup A \vee B \vee C$ （∨结合律（ⅱ））

公式 64. $\vdash(A \upharpoonright B) \upharpoonright C\rightharpoonup A \upharpoonright B \upharpoonright C$ （↾结合律（ⅱ））

公式 65. $\vdash(A \vee B) \vee C \rightleftharpoons A \vee B \vee C$ （∨结合律（ⅲ））

公式 66. $\vdash(A \upharpoonright B) \upharpoonright C \rightleftharpoons A \upharpoonright B \upharpoonright C$ （↾结合律)ⅲ))

公式 67. $\vdash ABC \rightharpoonup(AB)C$ （∧结合律（ⅰ））

公式 68. $\vdash A\ !\ B\ !\ C \rightharpoonup(A\ !\ B)\ !\ C$ （！ 结合律（ⅰ））

公式 69. $\vdash (AB)C\rightharpoonup A(B\ C)$ （∧结合律（ⅱ））

公式 70. $\vdash(A\ !\ B)\ !\ C \rightharpoonup A\ !\ B\ !\ C$ （！ 结合律（ⅱ））

公式 71. $\vdash(AB)C \rightleftharpoons ABC$ （∧结合律（ⅲ））

公式 72. $\vdash(A\ !\ B)\ !\ C \rightleftharpoons A\ !\ B\ !\ C$ （！ 结合律（ⅲ））

公式 73. $\vdash(A \rightleftharpoons B)\rightleftharpoons \neg A \rightleftharpoons \neg B$ （充要条件律）

公式 74. $\vdash(A\rightharpoonup B\rightharpoonup C)\rightharpoonup A!\ B\rightharpoonup C$ （二条件可以律）

公式 75. $\vdash(A!\ B\rightharpoonup C)\rightharpoonup A\rightharpoonup B\rightharpoonup C$ （可以二条件律（ⅰ））

公式 76. $\vdash A!\ B\rightharpoonup C\rightleftharpoons A\rightharpoonup B\rightharpoonup C$ （可以二条件律（ⅱ））

公式 77. $\vdash(A\rightharpoonup B\rightharpoonup C)\rightharpoonup AB\rightharpoonup C$ （二条件合取律）

公式 78. $\vdash A\rightharpoonup B\rightharpoonup C\rightleftharpoons B\rightharpoonup A\rightharpoonup C$ （二条件易位律）

公式 79. $\vdash(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup(A\rightharpoonup B\rightharpoonup C)\rightharpoonup A\rightharpoonup C$ （次条件消去律）

公式 80. $\vdash(A\rightharpoonup B\rightharpoonup C)\rightharpoonup(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup A\rightharpoonup C$

公式 81. $\vdash(A \rightharpoonup B)\rightharpoonup(\neg A \rightharpoonup B)\rightharpoonup B$

公式 82. $\vdash(A \rightharpoonup B)\rightharpoonup(A \rightharpoonup \neg B)\rightharpoonup \neg A$

公式 83. $\vdash A \rightharpoonup B \rightharpoonup A\,!\,B$

公式 84. $\vdash(A \rightharpoonup B)(A \rightharpoonup \neg B)\rightharpoonup \neg A$

公式 85. $\vdash(A \rightharpoonup B)(\neg A \rightharpoonup B)\rightharpoonup B$

公式 86. $\vdash(A \rightharpoonup B)(B \rightharpoonup C)\rightharpoonup A \rightharpoonup C$　（充分条件传递律（i））

公式 87. $\vdash(C \rightharpoonup B)(A \rightharpoonup C)\rightharpoonup A \rightharpoonup B$　（充分条件传递律（ii））

公式 88. $\vdash \neg(A \rightharpoonup B\,!\,\neg B)\rightharpoonup(A \rightharpoonup B)\rightharpoonup A\,!\,B$

公式 89. $\vdash A(A \rightharpoonup B)\rightharpoonup B$　（充分条件推理肯定律）

公式 90. $\vdash \neg B(A \rightharpoonup B)\rightharpoonup \neg A$　（充分条件推理否定律）

公式 91. $\vdash \neg C(A \rightharpoonup B \rightharpoonup C)\rightharpoonup \neg A \upharpoonright \neg B$

公式 92. $\vdash \neg A(A \upharpoonright B)\rightharpoonup B$　（尽举相容选择推理律（i））

公式 93. $\vdash \neg B(A \upharpoonright B)\rightharpoonup A$　（尽举相容选择推理律（ii））

公式 94. $\vdash B(\neg A \upharpoonright \neg B)\rightharpoonup \neg A$　（尽举相容选择推理律（iii））

公式 95. $\vdash A(\neg A \upharpoonright \neg B)\rightharpoonup \neg B$　（尽举相容选择推理律（iv））

公式 96. $\vdash B(A \upharpoonright B)\rightharpoonup \neg A$　（尽举反相容选择推理律(i)）

公式 97. $\vdash A(A \upharpoonright B)\rightharpoonup \neg B$　（尽举反相容选择推理律(ii)）

公式 98. $\vdash B(A \uparrow B)\rightharpoonup \neg A$　（尽举不相容选择推理律(i)）

公式 99. $\vdash A(A \uparrow B)\rightharpoonup \neg B$　（尽举不相容选择推理律(ii)）

公式 100. $\vdash \neg B(A \uparrow B)\rightharpoonup A$　（尽举不相容选择推理律(iii)）

公式 101. $\vdash \neg A(A \uparrow B)\rightharpoonup B$　（尽举不相容选择推理律(iv)）

公式 102. $\vdash(A\,!\,B \rightharpoonup C)\rightharpoonup A\,!\,\neg C \rightharpoonup \neg B$

公式 103. $\vdash A\,!\,B \rightharpoonup C \rightleftharpoons A\,!\,\neg C \rightharpoonup \neg B$

公式 104. $\vdash(A \rightharpoonup AB)\rightharpoonup A \rightharpoonup B$

公式 105. $\vdash(A \rightharpoonup B\ \neg B)\rightharpoonup \neg A$

公式 106. $\vdash(A \rightharpoonup B \rightharpoonup C)\rightharpoonup(AB \rightharpoonup C)(A\ \neg C \rightharpoonup \neg B)$

公式 107. $\vdash A \vee AB \rightleftharpoons A$　（与或吸收律）

公式 108. $\vdash A(A \vee B)\rightleftharpoons A$　（或与吸收律）

公式 109. $\vdash(AB \rightharpoonup AC)\rightharpoonup AB \rightharpoonup C$

公式 110. $\vdash(A \rightharpoonup C)(B \rightharpoonup C)\rightleftharpoons A \vee B \rightharpoonup C$　（简单二难律（ii））

公式 111. $\vdash(A \vee \neg A \rightharpoonup B)\rightharpoonup B$

公式 112. $\vdash(A \rightharpoonup C)(B \rightharpoonup C)\rightharpoonup A \upharpoonright B \rightharpoonup C$　（简单二难律（iii））

公式 113. $\vdash(A \upharpoonright B)(A \rightharpoonup C)(B \rightharpoonup C)\rightharpoonup C$　（简单二难律（iv））

公式 114. $\vdash(A \rightharpoonup B)\vee(A \rightharpoonup C)\rightharpoonup A \rightharpoonup B \vee C$

公式 115. $\vdash(A \rightharpoonup B)\upharpoonright(A \rightharpoonup C)\rightharpoonup A \rightharpoonup B \upharpoonright C$

公式 116. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\vee\mathbf{C}$

公式 117. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{AC}\rightharpoonup\mathbf{B}$

公式 118. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})\vee(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{C}$

公式 119. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})\upharpoonright(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$

公式 120. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{C}!\ \mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C}!\ \mathbf{B}$

公式 121. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{D})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}!\ \mathbf{D}$

公式 122. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{D})\rightharpoonup\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}!\ \mathbf{D}$

公式 123. $\vdash(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{D})\rightharpoonup\mathbf{C}\upharpoonright\mathbf{D}$

公式 124. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{C}$

公式 125. $\vdash\mathbf{AB}(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathrm{D})\rightharpoonup\mathbf{CD}$

公式 126. $\vdash\neg\mathbf{C}\neg\mathrm{D}(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{D})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\neg\mathrm{B}$

公式 127. $\vdash(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{D})\rightharpoonup\mathbf{C}\vee\mathbf{D}$

公式 128. $\vdash(\neg\mathbf{C}\vee\neg\mathbf{D})(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{D})\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$

公式 129. $\vdash\mathbf{AB}\vee\mathbf{AC}\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$

公式 130. $\vdash\mathbf{A}(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\rightleftharpoons\mathbf{AB}\vee\mathbf{AC}$

公式 131. $\vdash\mathbf{A}\vee\mathbf{BC}\rightleftharpoons(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\mathbf{A}\vee\mathbf{C})$

公式 132. $\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$

公式 133. $\vdash\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}\rightleftharpoons(\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})(\neg\mathbf{B}\vee\mathbf{A})$

12.7　*Cm* 的元定理（3）——*Cm* 的亚演绎定理

接下来证明一个重要的元定理亚演绎定理。

我们用 ***Cm***[**A**]表示把 **A** 作为非逻辑公理加到 ***Cm*** 中去后的扩充系统。$\vdash$ **B** 依然表示 **B** 是 ***Cm*** 中的公式；以 $\vdash_{[\mathbf{A}]}$ **C** 表示 **C** 是 ***Cm***[**A**]中的公式。亚演绎定理及其证明如下。

［**亚演绎定理**］　令每一个 $\boldsymbol{T}_i$ 是在 ***Cm***[**A**]中证明 **B** 的过程中出现的 ***Cm*** 公理，**T** 是 $\mathbf{T}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{T}_i\wedge\cdots\wedge\mathbf{T}_n$，则 $\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{B}$ 当且仅当 $\vdash\mathbf{AT}\rightharpoonup\mathbf{B}$。

证明：(1) 先证明从右到左的“若……，则……”。据所设条件，显然有：$\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{A}$，$\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{T}$；据合取规则和充分条件分离规则，又可得：若 $\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{AT}\rightharpoonup\mathbf{B}$，则 $\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{B}$。据所设条件，显然还有：若 $\vdash\mathbf{AT}\rightharpoonup\mathbf{B}$，则 $\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{AT}\rightharpoonup\mathbf{B}$。再根据充分条件传递规则，必定有：若 $\vdash\mathbf{AT}\rightharpoonup\mathbf{B}$，则 $\vdash_{[\mathbf{A}]}\mathbf{B}$。这就证明了从右到左的“若……，则……”。

(2) 再证明从左到右的“若……，则……”。施归纳于公式的次进行证明。

第一，设 **B** 是 ***Cm***[**A**]的一个公理。于是，若 **B** 就是 **A**，则 $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$，所以 $\vdash\mathbf{AT}\rightharpoonup\mathbf{B}$；若不是这种情况，而是，**B** 是 ***Cm*** 的一个公理，即，**B** 是 $\boldsymbol{T}_i$，所以，$\vdash\mathbf{T}$

→**B** ——①。根据公式 46，有：⊢(**T**→**B**)→**TA**→**B** ——②。由式①、式②用充分条件分离规则得 ⊢**TA**→**B**。再根据公式 43 和置换定理就得：⊢**AT**→**B**。

第二，设 **B** 是从合取规则得出，就是说，**B** 是 **CD** 且从 **C**、**D** 得出。据归纳假设，有，⊢**AT**→**C**，⊢**AT**→**D**。据合取规则得 ⊢(**AT**→**C**)(**AT**→**D**)——③，据公理 18 又得 ⊢(**AT**→**C**)(**AT**→**D**)→**AT**→**CD** ——④，由式③、式④用充分条件分离规则得 ⊢**AT**→**CD**，这就是 ⊢**TA**→**B**。

第三，设 **B** 是从充分条件分离规则得来，即是说，**B** 是从 **C**、**C**→**B** 得出。据归纳假设，有，⊢**AT**→**C**，⊢**AT**→**C**→**B**。同第二的步骤一样，据合取规则、公理 18 和充分条件分离规则得：⊢**AT**→**C**(**C**→**B**)——⑤。又据公式 87 有 ⊢**C**(**C**→**B**)→**B**——⑥，由式⑤、式⑥用充分条件传递规则得：⊢**AT**→**B**。亚演绎定理至此证毕。

Cm 系统还有亚演绎定理的两个系定理。

［**系定理一**］　⊢**A** 当且仅当 ⊢**T**→**A**。

［**系定理二**］　令每一个 $\mathbf{T}_i'$ 是在 ***Cm***[**A**]中证明 **B** 的过程中出现的 ***Cm*** 公式，**T′** 是 $\mathbf{T}_1' \wedge \cdots \wedge \mathbf{T}_i' \wedge \cdots \wedge \mathbf{T}_n'$，则 $\vdash_{[\mathbf{A}]}$ **B** 当且仅当 ⊢**AT′**→**B**。

此二定理的成立是显然的。

第 13 章　关于 *Cm* 系统的讨论（一）——*Cm* 是够用的无衍系统

本章要探讨的是，当代形式逻辑演算形式系统 *Cm* 系统是符合人的普通逻辑思考实际的够用的无衍系统。

13.1　从蕴涵怪论谈起

时至今日，几乎所有的数理逻辑论著都指出纯真值二值系统中的→（实质蕴涵）可以读做“若，则”，甚至认为→表达的就是充分条件关系，是对充分条件关系的抽象，而与此同时，又明确地规定→的含义为纯真值的“不是前真而后假”。有正常思维能力的人对普通的逻辑思维中所使用的联结词“若，则”的含义有确定的理解。譬如，普通的逻辑思维中，在人们承认“若压力为一个大气压（α），且温度为 0℃（β），则水结冰（γ）”为真的情况下，人们既不承认“若 α，则 γ”为真，也不承认“若 β，则 γ”为真，因此，不承认“若 α 则 γ，或者，若 β 则 γ”为真。可见在上述情况下，“若，则”的含义不仅仅是“不是前真而假”，因此，对于正统二值系统中的重言式（$p\wedge q\rightarrow r$）→（$p\rightarrow r$）∨（$q\rightarrow r$），当把其中的“→”读做表达充分条件的“若，则”时就不适用于上述情况。又如，数学界在承认“若 $a\nless b$ 且 $a\ngtr b$，则 $a=b$”的同时，既不承认“若 $a\nless b$，则 $a=b$”，又不承认“若 $a\ngtr b$ 则 $a=b$”。甚至在构造形式系统的元逻辑中也有这种情况：数理逻辑论著中，在承认分离规则“若 **A**，**A**→**B**，则 **B**”的同时，却既不承认“若 **A**，则 **B**”，又不承认“若 **A**→**B**，则 **B**”。正因为“若，则”的普通逻辑思维的含义与“→”的解释含义不同，而数理逻辑著作又告诉读者要把→读做普通逻辑思维的“若，则”，于是就产生了所谓“蕴涵怪论”。“蕴涵怪论”问题之所以久久不能解决，还因为“若，则”的普通逻辑思维含义究竟是什么一直不曾严格精确地界说清楚，这就导致究竟什么是蕴涵怪论也一直不曾严格精确地界说清楚。一方面，人们对“若，则”的含义的理解清楚到足以确定不能用→来表示；另一方面，人们对“若，则”的含义不清楚到不足以确定究竟哪些含有→的重言式当把→解释为“若，则”后就不恒真。所以，我们只要分析清楚“若，则”在普通的逻辑思维中的不同于“不是前真而后假”的确切含义，以此为标准就可以在语义上区分出蕴涵怪论来：在这种意义下无效的纯真值二值系统中的形式定理。

要是把在普通的逻辑思维中的联结词“若，则”的含义界说为“前件是后件

的充分条件”，那么，蕴涵怪论的语义定义为：当把在其中出现的蕴涵号解释为“前件是后件的充分条件”后不复有效的纯真值二值系统中的定理。

在形式化的纯真值二值系统中，如果在其中所用的“若，则”用“→”表示后会使一系列形式定理失去有效性，这与非形式化的物理、化学等实验科学一样。然而，物理、化学等实验科学与任何建立了形式化的公理系统的演绎科学之间却有一个重要区别：为了建立实验科学中的定律有时也借助演绎，然而，归根结底，只有在获得了一系列的观察和实验证实后人们才最终认定其为定律；形式化的演绎科学恰好相反，除了为数非常有限的作为出发点的初始的定理即公理外，任何定理的建立都不能靠观察或实验而必须做出严格的演绎证明。正因为非形式化的实验科学靠证实而形式化的演绎科学靠证明，所以，在非形式化的实验科学中无法避免矛盾，而在形式化的演绎科学中则不能有矛盾。鉴于这两类科学具有上述根本不同的性质，决定了在其中使用的逻辑也有重大区别。譬如，作为逻辑定理的正统二值系统中的重言式 $p \wedge \neg p \to q$，在形式化的演绎科学中使用不会有什么妨害，因为，像 $p \wedge \neg p$ 这样的前提是不可能被证明的；然而，如果在非形式化的实验科学中使用，就十分荒谬了——只要发现一对矛盾就处处矛盾！我们以斜体大写拉丁字母 A、B 表示集。A 为命题集，B 为可由 A 中的命题逻辑地推导出来的命题组成之集。我们称 A 为 B 的上位集，B 为 A 的下位集。若命题 α 与 $\neg\alpha$ 同时在 A 中出现，则称 A 为**直接矛盾**的。若 A 不是直接矛盾的，而其下位 B 是直接矛盾的，则称 A 是**包含矛盾**的。若 α 是 A 的元，而在 B 中有元 $\neg\alpha$，则称 α 是**自相矛盾**的。实验科学中的某一门学科可以视为一个命题集 A，当然，作为一门学科，一般的 A 不是直接矛盾的；然而，其下位集 B 却是无法避免地是直接矛盾的，也就是说，A 是包含矛盾的。例如，在伽利略依据当时物理学中从亚里士多德时代留传下来的“定律”（“重物的自由降落速度快于轻物（α）”），从物理学命题集 A 得出“合球的自由降落速度快于大球（δ_2）”与“合球的自由降落速度不快于大球（$\neg\delta_2$）”。这就是说，A 的下位集 B 是直接矛盾的，因此，作为集 B 的上位集的当时的物理学定律集 A 是包含矛盾的。对承认同一律 $p \to p$ 的逻辑来说，集 A 是集 B 的子集；此外，集 B 中还包含什么则取决于人们在事实上采用什么样的逻辑，尤其是当集 B 中出现矛盾后，这取决于人们是否在事实上承认 $p \wedge \neg p \to q$。在伽利略发现集 B 中出现 δ_2 与 $\neg\delta_2$ 后，他是否认为集 B 中包含任意命题，因此包含 A 中的任一命题的否定，也就是说，集 A 中的任一命题都是自相矛盾的呢？如果发现了物理学包含矛盾就把物理学全部否定，这种做法无助于发展物理学。伽利略事实上并不这么认为。他事实上并没有采用这种能将矛盾像癌症似的漫无边际地扩散的逻辑。集 A_1 由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 组成（n 有限）。如果集 A_1 是集 A 中不能再小的包含矛盾的子集，其中只有 α_1 未确定为真，且从集 A_1 中排除 α_1 后得出的 A_1' 不再包含矛盾，则称 α_1 是导致矛盾的。伽利

略先确定了集 A 中能导致矛盾的是 α，并采用归谬律 $(p\rightarrow q\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$ 而否定了 α。这就是他事实上采用的逻辑。他从集 A 中排除了 α 而代之以 $\neg\alpha$。在普通的逻辑思维中，人们从集 A 去得出什么样的下位集 B，亦即，事实上采用什么样的逻辑，这是个事实上究竟是什么的实际问题。伽利略在从包含矛盾的集 A 去得出集 B 时，不曾采用也不能采用会导致物理学能推导出任意命题而全盘否定物理学的 $p\wedge\neg p\rightarrow q$ 这样的逻辑。

至少有两类重言式，把蕴涵→改为表达充分条件的“若，则”后不能在普通逻辑思维中采用：一类是，当把其中的蕴涵解释为“若，则”后，会从真前件引出假后件；另一类是，其前后件之间互不相干，而且，当把其中的蕴涵解释为“若，则”后会不可避免地把由某个命题引起的矛盾无限扩散。这两类重言式都是怪论。第二种怪论是更基本的怪论，它们的特点是在前、后件中没有共同的命题变元，可以说是互不相干的，排除了它们就排除了第一种怪论。还有一种不同于这两种的怪论，虽然它们从真前件一定得出真后件，却会导致第二种怪论，这就是第三种怪论。要构造一个其定理适用于普通的逻辑思维的逻辑演算形式系统，必须把这三类怪论排除在外。当代形式逻辑 ***Cm*** 系统就是这样的系统。

任何一个科学概念都是对原型的一种抽象，然而，必须是恰当的抽象。纯真值的“实质蕴涵”只抽取普通的逻辑思维中表示经验的或逻辑的充分条件关系的联结词“若，则”的含义中的真值函数关系，舍弃了其中对逻辑推导来说起决定作用的重要因素——两个独立性，因此，对于普通的逻辑思维中的联结词“若，则”来说，不能说是恰当的、科学的抽象。

13.2　*Cm* 系统是够用的无衍系统

13.2.1　无衍系统

我们以黑正体大写拉丁字母 **A**、**B**、**C**、**D** 加撇或下标表示语构变元，其变域为任意式(formula)，若在 **A**、**B** 中不出现共同的命题变元且 **A→B** 是重言式，则称 **A→B** 为衍式。容易证明：若 **A→B** 为衍式，则¬**A** 为重言式或者 **B** 为重言式。若¬**A** 与 **B** 皆非重言式，由于 **A**、**B** 中没有共同的命题变元，则在一定的赋值下，会出现 **A** 真 **B** 假的情况，**A→B** 就不是重言式，**A→B** 就不是衍式。这就是说，衍式 **A→B** 只不过是：把毫不相干的可真可假的 **A** 与恒真的 **B**，或恒假的 **A** 与可真可假的 **B**，或恒假的 **A** 与恒真的 **B**，用→号联结起来。从逻辑上看，衍式作为重言式只不过是由恒假的 **A** 或恒真的 **B** 衍生的，它并不比据以衍生的恒假的 **A** 或恒真的 **B** 多揭示一点新的内容。

若 Ψ_x 为排除了衍式的命题演算形式系统，则称 Ψ_x 为无衍系统。亦即，一个系统是无衍的，当且仅当它的定理中不包含衍式。无衍性要求比协调性要求高得多。这样的无衍系统确实存在。例如，容易证明系统 Ψ_{x1} 为无衍系统：Ψ_{x1} 只有公理 **A→A**，只采用分离规则，因此，Ψ_{x1} 全部定理的前、后件完全一样。当然，这是一个没有什么用处又非常狭小的系统。

如果含有→的 **A** 为重言式，并且在无衍系统 Ψ_x 中加入 **A** 后就产生衍式，那么就称 **A** 为 Ψ_x 的涵衍式。涵衍式本身可以是衍式，也可以是本身不是衍式然而能使无衍系统由之产生衍式的式。例如，**A→(B→A)** 对 Ψ_{x1} 来说就是涵衍式，尽管它本身并非衍式。我们从这个涵衍式出发在扩大了的 Ψ_{x1} 中很容易得出 **B→(C→C)**，只要在 **B**、**C** 中不出现共同的命题变元，就是个衍式。

很典型的是，只有公理 **A→(B→A)**，只采用分离规则的系统 Ω_1 就不是无衍系统，因为我们可从 **[C→(D→C)] →{B→[C→(D→C)]}** 得出 **B→[C→(D→C)]**，当 **B** 与 **C**、**D** 中不出现共同的命题变元时，这就是个衍式。还可以证明：只有公理 **¬A →(A→B)**，只采用分离规则的系统 Ω_2 也不是无衍系统。这个事实告诉我们，著名的蕴涵怪论 **A→(B→A)**、**¬A →(A→B)**，虽然它们本身不是衍式，可是，对于任何包含分离规则的无衍系统来说它们都是涵衍式。

看得出来，无衍系统中的“蕴涵”（如果也称做“蕴涵”的话）与实质蕴涵不同，其解释含义不仅仅是纯真值的“不是前真而后假”。为了把无衍系统中的“蕴涵”与实质蕴涵区分开，前者用“⇀”表示，后者用“→”表示。这样，我们对衍式严格规定为：若在 **A**、**B** 中不出现共同的命题变元且 **A→B** 是重言式，**A′**、**B′** 为分别把 **A**、**B** 中某些→的出现变换为⇀后得出，则称 **A′⇀B′** 是衍式。我们严格规定涵衍式为：**A** 为含有→的重言式，**A′** 为把 **A** 中某些→的出现变换成⇀后得出的，***T*** 为无衍系统，若 **A′** 加入 ***T*** 后即产生衍式，则称 **A′** 为 ***T*** 的涵衍式。提请注意的是，普通逻辑思维中的联结词“若，则”所表达的明明白白摆着的事实上是不同于实质蕴涵的充分条件关系！***Cm*** 系统就是这样一个适用于这种“若，则”的形式系统。

13.2.2　*Cm* 的无衍性定理

[无衍性定理]*Cm* 是个无衍系统。

证明：

我们采取算术解释的方式进行证明。当代形式逻辑是客体逻辑。当代形式逻辑对客观世界的模型称为“客体模型”，称算术解释为“代数模型”。通过算术解释，可以证明 ***Cm*** 系统是个无衍系统。我们对 ***Cm*** 的形式符号做下列算术解释。

	¬
−3	+3*
−2	+2*
−1	+1*
−0	+0*
+0	−0
+1	−1
+2	−2
+3	−3

∧	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3
−2	−3	−2	−3	−2	−3	−3	−2	−2
−1	−3	−3	−1	−1	−3	−1	−3	−1
−0	−3	−2	−1	−0	−3	−1	−2	−0
+0	−3	−3	−3	−3	+0	+0	+0	+0
+1	−3	−3	−1	−1	+0	+1	+0	+1
+2	−3	−2	−3	−2	+0	+0	+2	+2
+3	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3

⇀	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3
−2	−3	+2	−3	+2	−3	−3	+2	+3
−1	−3	−3	+1	+1	−3	+1	−3	+3
−0	−3	−3	−3	+0	−3	−3	−3	+3
+0	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
+1	−3	−3	−1	−1	−3	+1	−3	+3
+2	−3	−2	−3	−2	−3	−3	+2	+3
+3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	+3

∨	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−2	−2	−2	−0	−0	+2	+3	+2	+3
−1	−1	−0	−1	−0	+1	+1	+3	+3
−0	−0	−0	−0	−0	+3	+3	+3	+3
+0	+0	+2	+1	+3	+0	+1	+2	+3
+1	+1	+3	+1	+3	+1	+1	+3	+3
+2	+2	+2	+3	+3	+2	+3	+2	+3
+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3

→	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3
−2	+2	+2	+3	+3	+2	+3	+2	+3
−1	+1	+3	+1	+3	+1	+1	+3	+3
−0	+0	+2	+1	+3	+0	+1	+2	+3
+0	−0	−0	−0	−0	+3	+3	+3	+3
+1	−1	−0	−1	−0	+1	+1	+3	+3
+2	−2	−2	−0	−0	+2	+3	+2	+3
+3	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3

↔	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	+3	+2	+1	+0	−0	−1	−2	−3
−2	+2	+2	+3	+2	−2	−0	−2	−2
−1	+1	+3	+1	+1	−1	−1	−0	−1
−0	+0	+2	+1	+3	−3	−1	−2	−0
+0	−0	−2	−1	−3	+3	+1	+2	+0
+1	−1	−0	−1	−1	+1	+1	+3	+1
+2	−2	−2	−0	−2	+2	+3	+2	+2
+3	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3

↾	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	+3
−2	−3	−2	−3	−2	−3	−3	+2	+3
−1	−3	−3	−1	−1	−3	+1	−3	+3
−0	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
+0	−3	−3	−3	−0	−3	−3	−3	+3
+1	−3	−3	+1	+1	−3	+1	−3	+3
+2	−3	+2	−3	+2	−3	−3	+2	+3
+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3

!	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3
−2	−3	−2	+3	+3	−2	+3	−2	+3
−1	−3	+3	−1	+3	−1	−1	+3	+3
−0	−3	+3	+3	+3	−0	+3	+3	+3
+0	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
+1	−3	+3	−1	+3	+1	+1	+3	+3
+2	−3	−2	+3	+3	+2	+3	+2	+3
+3	−3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3

⇌	−3	−2	−1	−0	+0	+1	+2	+3
−3	+3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3
−2	−3	+2	−3	−3	−3	−3	−2	−3
−1	−3	−3	+1	−3	−3	−1	−3	−3
−0	−3	−3	−3	+0	−3	−3	−3	−3
+0	−3	−3	−3	−3	+0	−3	−3	−3
+1	−3	−3	−1	−3	−3	+1	−3	−3
+2	−3	−2	−3	−3	−3	−3	+2	−3
+3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−3	+3

通过这些算术解释可以证明 ***Cm*** 系统除外任意衍式。我们规定特选值为 +0、+1、+2、+3。若 **A**⇀**B** 为衍式,则在 **A**、**B** 中无共同的命题变元出现。我们对 **A** 中的每一命题变元取值 +1,对 **B** 中的每一命题变元取值 +2,如此便得:**A** 取值 +1 或 −1,**B** 取值 +2 或 −2。于是,±1⇀±2 恒取非特选值 −3。

由于运用上面给出的算术解释能证明一些式在一定形式系统中不可证,故

而我们称之为除外方阵。对于形式系统 ***Cm***，根据这些除外方阵，就能证明任意衍式皆为其除外式。算术解释实际上就是函数关系。我们在上面给出的算术解释中，集{-3，-2，-1，-0，+0、+1、+2、+3}就是其定义域和值域。鉴于定义域和值域相等，就称其为闭域。

+0、+1、+2、+3 称为特选值，是值域中被特别选定的一些个体。

（1）***Cm*** 的全部原始公式都具有下述性质：对于我们给出的除外方阵，恒取特选值。

（2）若 **A** 和 **A→B** 皆恒取特选值，则 **B** 恒取特选值；若 **A** 和 **B** 皆恒取特选值，则 **A∧B** 恒取特选值。

鉴于 ***Cm*** 的任意公式皆由原始公式通过分离规则和合取规则得出，因而 ***Cm*** 的任意公式必定具有下述性质：对于我们给出的除外方阵，恒取特选值。

恒取特选值是 ***Cm*** 公式的共有属性（不是仅有属性）。然而，任意衍式不恒取特选值，亦即不具有 ***Cm*** 公式的共有属性，因此不是 ***Cm*** 公式，而是 ***Cm*** 的除外式。换一种说法，即，一式为 ***Cm*** 公式的必要条件是：该式恒取特选值。然而，任意衍式不恒取特选值，即不满足是 ***Cm*** 公式的必要条件，因而不是 ***Cm*** 公式，而是 ***Cm*** 的除外式。

由于 ***Cm*** 除外一切衍式故而除外 **A ¬A→B**，而 ***Cm*** 又包含公式 ⊢(**A→B→C**)→**B→A→C**。据此特征可知，***Cm*** 与一般的模态系统根本不同。阿克曼·安特逊的 ***E*** 系统是 ***Cm*** 系统的真部分（即真子系统），因为 ***Cm*** 有 ⊢(**A→B→C**)→**B→A→C**，⊢**A→**(**A→B**)**→B** 等，而 ***E*** 没有。路易斯的 S_4 中的蕴涵是逻辑蕴涵，二值系统的蕴涵是实质蕴涵；与此相应，***E*** 中的"entailment"是"logical entailment"（逻辑相干），而 ***Cm*** 中的"entailment"则是"material entailment"（实质相干，即，实质充分条件）。因此，***Cm*** 比 ***E*** 系统更符合传统形式逻辑的要求。

13.2.3　够用

Cm 系统中的充分条件式定理包括被亿万次重复的社会实践证实为正确的在传统形式逻辑中介绍过的全部推理和导出格式。对于传统形式逻辑来说，这就称 ***Cm*** 系统是"够用"的系统。

传统的形式逻辑是对普通逻辑思维的直观经验的总结。***Cm*** 是"无衍"系统，反映了 ***Cm*** 系统排除为普通逻辑思维的直观经验所不能接受的定理；***Cm*** 是"够用"的系统则反映了 ***Cm*** 系统包容了足够多的为普通逻辑思维的直观经验所证实了的定理。

从我国墨子、韩非子和古希腊亚里士多德的传统形式逻辑直到当代人用到的普通逻辑定理、规则来看，***Cm*** 是完全够用的无衍系统。

13.3 从 *Cm* 的除外式看 *Cm* 作为当代形式逻辑形式系统的先进性特色

若式 **A** 不是 ***Cm*** 的公式,即 **A** 在 ***Cm*** 中不可证,则称 **A** 为 ***Cm*** 的除外式。用⊣ **A** 表示 **A** 为 ***Cm*** 的除外式。请看下面的除外式。

13.3.1 几个典型的除外式

(01) ⊣ **A→B→A**

(02) ⊣ **¬A→A→B**

(03) ⊣ **A→B∨¬B**

(04) ⊣ **(AB→C)→A ¬C→¬B**

这都是典型的怪论式。(01)是说,任意命题 **B** 是真命题 **A** 的充分条件。(02)即,假命题 **A** 是任意命题 **B** 的充分条件。(03)即,任意命题 **A** 是恒真命题 **B∨¬B** 的充分条件。(04)就是现行逻辑读本所谓的"反三段论"。只要我们用 **A** 替换(有的论著称为"代入")其中的 **C** 就得到:⊣ **(AB→A)→A ¬A→¬B**。其前件 **AB→A** 是 ***Cm*** 的定理,即可证式,而后件 **A ¬A→¬B** 为衍式,因而,(04)必须除外。在 ***Cm*** 中有与(04)对应的公式:⊢**(A! B→C)→A! ¬C→¬B**,这符合人的普通逻辑思维实际,符合客观实际。

(05) ⊣ **(A→B)→AC→BC**

这就是在 12.1 节论及的第三种怪论。这是最难辨认的怪论,它在 ***Cm*** 内会产生衍式。***Cm*** 中有可证式:⊢**(A→B)(C→C)→(AC→BC)**。前件中的 **C→C**(是 ***Cm*** 的公式)作为合取项绝对不能省去。当人们从 **A→B** 推出 **AC→BC** 时还有一个恒真前提 **C→C**。这个恒真前提在 ***Cm*** 中不能省去。前提中省去恒真的合取项这样的逻辑思想是不严密的,一旦形式化,必然会引入衍式,导致怪论的出现。***Cm*** 中有与(05)相应的公式⊢**(A→B)→A! C→B ! C** 。同时,在 ***Cm*** 中容易证明下述导出规则:

⊢**A→B** ⊢— ⊢**AC→BC**

必须指出的是,⊢—与 →是有区别的:形式系统中读做"从……得出……"的表示规则的"⊢—",指称形式系统内的充分条件关系,其前、后件是"具有一定结构的符号式是公式";而"→"则指称任意的充分条件关系,其前、后件可以是两种情况:一是指称形式系统内的"具有一定结构的符号式是公式",二是指称实验科学和日常生活中的具有一定意义的语句。亦即,"→"是一般,"⊢—"是特殊。成立"→"时必然成立"⊢—",成立"⊢—"时未必成立"→"。

(06) ⊣　**A⇀B⇀AB**

这显然是怪论，必须除外。**A** 怎么会是“**B** 是 **A** 合取 **B** 的充分条件”的充分条件?! ***Cm*** 有合取规则：⊢**A**，⊢**B** ├── ⊢**AB**。这是 ***Cm*** 不可缺少的具有独立性的原始规则。与(06)相应，***Cm*** 有 ⊢**A⇀B⇀A！B**。**A！B**，**A**、**B** 间是“可以”关系！和客观世界一致，非常美妙！

(07) ⊣ (**AB⇀C**)⇀**A⇀B⇀C**

相反，***Cm*** 有(07)的逆公式：⊢(**A⇀B⇀C**)⇀**AB⇀C**。与(07)相应，***Cm*** 有 ⊢(**A！B⇀C**)⇀**A⇀B⇀C**。***Cm*** 立足于客观世界，反映了客观世界的美妙规律。

13.3.2　罗素和怀德海《数学原理》中的怪论式

把《数学原理》中的实质蕴涵号→变换成充分条件号⇀后，***Cm*** 除外其中的 1 个原始公式和 96 个导出公式。

下列每个符号式前面的括号中的数码是用实质蕴涵号→替换充分条件号⇀后该式在罗素和怀德海合著的《数学原理》中的编码。《数学原理》共列出 5 个原始公式和 191 个导出公式。***Cm*** 除外 97 个式。

(6)　(**A⇀B**)⇀**C∨A⇀C∨B**

(220)　**A⇀B⇀A**　(**A⇀¬A⇀A** 为其特殊情况)

(221)　**¬A⇀A⇀B**　(**¬A⇀A⇀A** 为其特殊情况)

(224)　**A⇀¬A⇀B**

(225)　**A∨(A∨B⇀B)**

(236)　(**A⇀B**)⇀**C∨A⇀B∨C**

(237)　(**A⇀B**)⇀**A∨C⇀C∨B**

(238)　(**A⇀B**)⇀**A∨C⇀B∨C**

(242)　**¬A∨(A⇀B)⇀A⇀B**

(25)　**¬(A⇀B)⇀¬A⇀B**

(251)　**¬(A⇀B)⇀A⇀¬B**

(252)　**¬(A⇀B)⇀¬A⇀¬B**

(2521)　**¬(A⇀B)⇀B⇀A**

(253)　**A∨B⇀A⇀B**

(255)　**¬A⇀A∨B⇀B**

(256)　**¬B⇀A∨B⇀A**

(262)　**A∨B⇀(A⇀B)⇀B**

(2621)　(**A⇀B**)⇀**A∨B⇀B**

(263)　**A∨B⇀¬A∨B⇀B**

（264） $A \vee B \rightharpoonup A \vee \neg B \rightharpoonup A$

（268） $[(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup B] \rightharpoonup A \vee B$

（269） $[(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup B] \rightharpoonup (B \rightharpoonup A) \rightharpoonup A$

（273） $(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup A \vee B \vee C \rightharpoonup B \vee C$

（274） $(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup A \vee B \vee C \rightharpoonup A \vee C$

（275） $A \vee B \rightharpoonup A \vee (B \rightharpoonup C) \rightharpoonup A \vee C$

（276） $A \vee (B \rightharpoonup C) \rightharpoonup A \vee B \rightharpoonup A \vee C$

（28） $A \vee B \rightharpoonup \neg B \vee C \rightharpoonup A \vee C$

（281） $(B \rightharpoonup C \rightharpoonup D) \rightharpoonup A \vee B \rightharpoonup A \vee C \rightharpoonup A \vee D$

（282） $A \vee B \vee C \rightharpoonup A \vee \neg C \vee D \rightharpoonup A \vee B \vee D$

（285） $(A \vee B \rightharpoonup A \vee C) \rightharpoonup A \vee (B \rightharpoonup C)$

（286） $[(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup A \rightharpoonup C] \rightharpoonup A \rightharpoonup B \rightharpoonup C$

（32） $A \rightharpoonup B \rightharpoonup AB$

（321） $B \rightharpoonup A \rightharpoonup AB$

（33） $(AB \rightharpoonup C) \rightharpoonup A \rightharpoonup B \rightharpoonup C$

（337） $(AB \rightharpoonup C) \rightharpoonup A \neg C \rightharpoonup \neg B$

（34） $AB \rightharpoonup A \rightharpoonup B$ （$A \neg A \rightharpoonup A \rightharpoonup \neg A$，$\neg AA \rightharpoonup \neg A \rightharpoonup A$ 均为其特殊情况）

（345） $(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup AC \rightharpoonup BC$

（414） $AB \rightharpoonup C \rightharpoonup A \neg C \rightharpoonup \neg B$

（415） $AB \rightharpoonup \neg C \rightharpoonup BC \rightharpoonup \neg A$

（436） $A \rightleftharpoons B \rightharpoonup (AC \rightleftharpoons BC)$

（437） $(A \rightleftharpoons B) \rightharpoonup (A \vee C \rightleftharpoons B \vee C)$

（442） $A \rightleftharpoons AB \vee A \neg B$

（443） $A \rightleftharpoons (A \vee B)(A \vee \neg B)$

（46） $A \rightharpoonup B \rightleftharpoons \neg A \vee B$

（461） $\neg (A \rightharpoonup B) \rightleftharpoons A \neg B$

（462） $A \rightharpoonup \neg B \rightleftharpoons \neg A \vee \neg B$

（463） $\neg (A \rightharpoonup \neg B) \rightleftharpoons AB$

（464） $\neg A \rightharpoonup B \rightleftharpoons A \vee B$

（465） $\neg (\neg A \rightharpoonup B) \rightleftharpoons \neg A \neg B$

（466） $\neg A \rightharpoonup \neg B \rightleftharpoons A \vee \neg B$

（467） $\neg (\neg A \rightharpoonup \neg B) \rightharpoonup \neg AB$

（47） $A \rightharpoonup B \rightleftharpoons A \rightharpoonup AB$

（471） $A \rightharpoonup B \rightleftharpoons A \rightleftharpoons AB$

（472） $A \rightharpoonup B \rightleftharpoons B \rightleftharpoons A \vee B$

(473)　$B \rightharpoonup (A \rightleftharpoons AB)$
(474)　$\neg A \rightharpoonup (B \rightleftharpoons A \vee B)$
(478)　$(A \rightharpoonup B) \vee (A \rightharpoonup C) \rightleftharpoons A \rightharpoonup B \vee C$
(479)　$(B \rightharpoonup A) \vee (C \rightharpoonup A) \rightleftharpoons BC \rightharpoonup A$
(48)　$(A \rightharpoonup \neg A) \rightleftharpoons \neg A$
(481)　$(\neg A \rightharpoonup A) \rightleftharpoons A$
(482)　$(A \rightharpoonup B)(A \rightharpoonup \neg B) \rightleftharpoons \neg A$
(483)　$(A \rightharpoonup B)(\neg A \rightharpoonup B) \rightleftharpoons B$
(487)　$(AB \rightharpoonup C \rightleftharpoons A \rightharpoonup B \rightharpoonup C) \rightleftharpoons B \rightharpoonup A \rightharpoonup C \rightleftharpoons BA \rightharpoonup C$
(51)　$AB \rightharpoonup (A \rightleftharpoons B)$　（$A\ \neg A \rightharpoonup (A \rightleftharpoons \neg A)$为其特殊情况）
(511)　$(A \rightharpoonup B) \vee (\neg A \rightharpoonup B)$
(512)　$(A \rightharpoonup B) \vee (A \rightharpoonup \neg B)$
(513)　$(A \rightharpoonup B) \vee (B \rightharpoonup A)$
(514)　$(A \rightharpoonup B) \vee (B \rightharpoonup C)$
(515)　$(A \rightleftharpoons B) \vee (A \rightleftharpoons \neg B)$
(517)　$(A \vee B) \neg (AB) \rightleftharpoons A \rightleftharpoons \neg B$
(518)　$A \rightleftharpoons B \rightleftharpoons \neg (A \rightleftharpoons \neg B)$
(521)　$\neg A\ \neg B \rightharpoonup (A \rightleftharpoons B)$
(522)　$\neg (A \rightleftharpoons B) \rightleftharpoons A\ \neg B \vee B\ \neg A$
(523)　$(A \rightleftharpoons B) \rightleftharpoons AB \vee \neg A\ \neg B$
(524)　$\neg (AB \vee \neg A\ \neg B) \rightleftharpoons A\ \neg B \vee B\ \neg A$
(525)　$A \vee B \rightleftharpoons (A \rightharpoonup B) \rightharpoonup B$
(53)　$AB \rightharpoonup C \rightleftharpoons AB \rightharpoonup AC$
(531)　$C(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup A \rightharpoonup BC$
(532)　$A \rightharpoonup B \rightharpoonup C \rightleftharpoons AB \rightleftharpoons AC$
(533)　$AB \rightharpoonup C \rightleftharpoons A(AB \rightharpoonup C)$
(535)　$(A \rightharpoonup B)(A \rightharpoonup C) \rightharpoonup A \rightharpoonup (B \rightleftharpoons C)$
(54)　$A \rightharpoonup A \rightharpoonup B \rightleftharpoons A \rightharpoonup B$
(541)　$(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup A \rightharpoonup C \rightleftharpoons A \rightharpoonup B \rightharpoonup C$
(542)　$A \rightharpoonup B \rightharpoonup C \rightleftharpoons A \rightharpoonup B \rightharpoonup AC$
(544)　$(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup (A \rightharpoonup C \rightleftharpoons A \rightharpoonup BC)$
(55)　$A \rightharpoonup (A \rightharpoonup B \rightleftharpoons B)$
(5501)　$A \rightharpoonup (B \rightleftharpoons A \rightleftharpoons B)$
(554)　$(AB \rightleftharpoons A) \rightleftharpoons (AB \rightleftharpoons B)$
(555)　$(A \vee B \rightleftharpoons A) \vee (A \vee B \rightleftharpoons B)$

(56)　(**A ¬B⇀C**)⇌(**A⇀B∨C**)

(561)　(**A∨B**)**¬B⇌A ¬B**

(562)　**AB∨¬B⇌A∨¬B**

(563)　**A∨B⇌A∨¬AB**

(57)　(**A∨C⇌B∨C**)⇌**C∨**(**A⇌B**)

(571)　(**B⇀¬C**)⇀[(**A∨B**)**C⇌AC**]

(574)　(**A⇀B⇀C**)⇀(**A⇀B⇌A⇀C**)

(575)　(**C ⇀¬B**)(**A⇌B∨C**)⇀(**A ¬B⇌C**)

这 97 个式为 ***Cm*** 所除外。可是,在《数学原理》中这些怪论式确是可证公式。

A→B 事实上就是¬**A∨B**(或者¬(**A ¬B**)),表达的都是第 5 号 2 元真值函数关系。如果把 **A→B** 实实在在、老老实实地当做¬**A∨B**(或者当做¬(**A ¬B**),而不是硬把它当做与之完全不同的非纯真值的充分条件关系 **A⇀B**,那么,全部纯真值的二值演算公式在 ***Cm*** 中都可证。

罗素和怀德海是大名鼎鼎的数理逻辑家,他们合著的《数学原理》是数理逻辑史上高档次的巨著。《数学原理》特别选择 5 个原始公式和推导出 191 个导出公式来,作为形式系统的定理介绍给读者,可见这些公式应该是他们的形式系统的特色性代表。可是,当把其中解释成"不是前真而后假"的实质蕴涵→变成解释为充分条件的⇀后,上述 97 个式全都与人的普通逻辑思维实际格格不入,全都不知所云。式(220)、式(221)等著名怪论在逻辑界是路人皆知的。式(511)、式(512)、式(513)的怪论也是很显然的:式(511)怪在"**A**、**B** 为任意二命题,不是'若 **A** 则 **B**'就是'若¬**A** 则 **B**'";式(512)怪在"**A**、**B** 为任意二命题,不是'若 **A** 则 **B**'就是'若 **A** 则¬**B**'";式(513)怪在"**A**、**B** 为任意二命题,不是'若 **A** 则 **B**'就是若'**B** 则 **A**'"。这样的"若,则"真是莫名其妙! 更荒唐的是,承认式(34)、式(51)就会从 **A** 且¬**A** 导致"悖论"!!

我们从 ***Cm*** 的除外式就可以看出 ***Cm*** 作为当代形式系统的先进特色。***Cm*** 有除外式⊣ ¬**A**(**A∨B**)⇀**B**。此式在现行的形式逻辑读本中被误当做"选言推理"。我们在前面已讨论过这一问题。在此,我们要讨论的是 ***Cm*** 系统。***Cm*** 中有 ⊢[¬**A**(**A∨B**)⇀**B**]⇌(**A ¬A∨¬AB⇀B**),⊢(**A ¬A∨¬AB⇀B**)⇌(**A ¬A⇀B**)(**¬AB⇀B**),然而,鉴于下式在 ***Cm*** 中不可证:⊣ (**A ¬A⇀B**)(**¬AB⇀B**)⇀**A ¬A⇀B**,此式是衍式,是 ***Cm*** 的除外式,因此,¬**A**(**A∨B**)⇀**B** 是涵衍式,***Cm*** 必须将其除外。符合人的普通逻辑思维的当代形式逻辑中有:⊢¬**A**(**A↾B**)⇀**B**,⊢**A**(**A↿B**)⇀¬**B**,⊢**A**(**A↑B**)⇀¬**B**,⊢¬**A**(**A↑B**)⇀**B** 等。当代形式逻辑将传统形式逻辑的选言命题三分为非纯真值函数的尽举相容(**A↾B**)、尽举反相容(**A↿B**)和尽举不相容(**A↑B**)的三种,而不是纯真值函数

的相容析取（$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$）、不相容析取（$\mathbf{A} \dot{\vee} \mathbf{B} = \mathbf{df}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \neg \mathbf{A} \neg \mathbf{B}$），因而就有相应的三种尽举选择推理，请参看 8.2 节。

Cm 有公式 $\vdash(\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$（弱归谬律）、$\vdash(\mathbf{A} \rightarrow \neg \mathbf{A}) \rightarrow \neg \mathbf{A}$（类弱归谬律）。鉴于 ***Cm*** 除外下两式，即$\dashv \mathbf{A} \rightarrow (\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A})$、$\dashv \neg \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg \mathbf{A})$，因而 ***Cm*** 除外一个非常典型的式子：$\dashv \mathbf{A} \neg \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \mathbf{A})$。我们称这几个除外式为“免除悖论除外式”。这就是说，即使在人的普通逻辑思维中产生了 $\mathbf{A} \neg \mathbf{A}$ 这样的矛盾，只要用的逻辑是当代形式逻辑，仍然不会产生“$\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \mathbf{A}$”“**A** 与$\neg$**A** 互推”的怪事，仍然不会产生以“$\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg \mathbf{A}$”或“**A** 互推$\neg$**A**”为定义的所谓“悖论”。在人的普通逻辑思考中，矛盾是经常会见到的；然而因此就产生“悖论”则是逻辑的耻辱，当代形式逻辑为之洗雪！

可见，当代形式逻辑形式系统 ***Cm*** 是迄今逻辑领域中的先进系统。

第 14 章　关于 *Cm* 系统的讨论（二）——*Cm* 的判定问题

14.1　范　　式

先介绍几个概念。

（1）纯真值复合式：不出现⊸或不出现由⊸定义的联结号的式。

（2）非纯真值复合式：出现⊸或出现由⊸定义的联结号的式。

（3）公式：可证的式。

（4）纯真值公式：可证的纯真值式。

（5）非纯真值公式：可证的非纯真值式。

在第 12 章关于 *Cm* 的导出公式中，我们只列出公式 51 $\vdash \neg(\mathbf{A} \neg \mathbf{A})$ 和公式 53 $\vdash \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ 这两个纯真值公式，除此之外，都是非纯真值公式。

14.1.1　简单合取式和简单析取式

1. 简单合取式

简单合取式就是命题变元或命题变元的否定，或由它们通过 ∧ 构成的合取式。例如 $\mathbf{p} \neg \mathbf{p}$、$\mathbf{p} \neg \mathbf{qr}$、$\mathbf{pq} \neg \mathbf{pr}$ 都是简单合取式；而 $\mathbf{ppq}$、$\neg(\mathbf{pq})\mathbf{r}$、$\mathbf{pq} \vee \mathbf{r}$ 都不是。简单合取式的一个重要特征是：一简单合取式是矛盾式，当且仅当有一命题变元及其否定在其中出现。例如 $\mathbf{p} \neg \mathbf{p}$、$\mathbf{pq} \neg \mathbf{pr}$ 都是矛盾式。提请注意，我们这里省略了合取号 ∧。以下亦如此。

2. 简单析取式

简单析取式就是命题变元或命题变元的否定，或由它们通过 ∨ 构成的析取式。例如 $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$、$\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q} \vee \mathbf{r}$、$\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vee \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{r}$ 都是简单析取式；而 $\mathbf{p} \vee \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$、$\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})\mathbf{r}$、$\mathbf{pq} \vee \mathbf{r}$ 都不是。简单析取式的一个重要特征是：一简单析取式是重言式，当且仅当，有一命题变元及其否定在其中出现。如 $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$、$\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vee \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{r}$ 都是重言式。

看得出来，有两个特殊的表达式，即仅有一个命题变元（如 $\mathbf{p}$）或命题变元的否定（如 $\neg \mathbf{p}$），它们既是简单合取式，又是简单析取式。

14.1.2　范式

1. 范式是纯真值复合式的优化形式

范式分为合取范式和析取范式两种。

(1) 合取范式:合取范式就是一个简单析取式或由两个以上(含两个)简单析取式构成的合取式。

(2) 析取范式:析取范式就是一个简单合取式或由两个以上(含两个)简单合取式构成的析取式。

成立范式的存在定理。

【范式存在定理】　任一纯真值复合式都有与其互为充要条件的合取范式和析取范式。

范式存在定理的证明,请见龚启荣著《逻辑斯谛——又称“数理逻辑”的二值数学》(贵州教育出版社,1998 年版第 89 页)。

2. 纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的范式

纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的范式有两种。

纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的合取范式 $\mathbf{A}^h$定义为:若 $\mathbf{A}^h$为合取范式,且 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}^h$,则称 $\mathbf{A}^h$为 $\mathbf{A}$ 的合取范式。

纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的析取范式 $\mathbf{A}^x$定义为:若 $\mathbf{A}^x$为析取范式,且 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}^x$,则称 $\mathbf{A}^x$为 $\mathbf{A}$ 的析取范式。

14.1.3　优范式

1. 优范式是纯真值复合式的最优化形式

优范式也有两种:优合取范式和优析取范式。当我们把纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的优合取范式和优析取范式统称为优范式时,我们用 $\mathbf{A}^y$表示 $\mathbf{A}$ 的优范式。

(1) 纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的优合取范式

先介绍新概念——大项:有一组命题变元 $\mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_2$、…、$\mathbf{p}_i$、…、$\mathbf{p}_n$,任一命题变元要么带否定号要么不带否定号地出现一次,并且按命题变元的字典顺序组成的析取式,就称为这组命题变元的大项。

所谓优合取范式就是指,给定 n 个命题变元,由这 n 个命题变元构成的一个大项或由 n 个命题变元构成的两个以上(含两个)的大项经合取构成的合取范式。

例如,由命题变元 $\mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_2$、$\mathbf{p}_3$构成的优合取范式有:

①（$\mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2 \vee \neg \mathbf{p}_3$）；

②（$\mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2 \vee \neg \mathbf{p}_3$）（$\mathbf{p}_1 \vee \neg \mathbf{p}_2 \vee \neg \mathbf{p}_3$）；

③（$\mathbf{p}_1 \vee \neg \mathbf{p}_2 \vee \mathbf{p}_3$）（$\neg \mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2 \vee \mathbf{p}_3$）（$\neg \mathbf{p}_1 \vee \neg \mathbf{p}_2 \vee \mathbf{p}_3$）。

纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的优合取范式 $\mathbf{A}^{yh}$ 定义为：若 $\mathbf{A}^{yh}$ 为优合取范式，且 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}^{yh}$，则称 $\mathbf{A}^{yh}$ 为 $\mathbf{A}$ 的优合取范式。

（2）纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的优析取范式

再介绍一个新概念——小项：有一组命题变元 $\mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_2$、…、$\mathbf{p}_i$、…、$\mathbf{p}_n$，任一命题变元要么带否定号要么不带否定号地出现一次，并且按命题变元的字典顺序组成的合取式，就称为这组命题变元的小项。

所谓优析取范式就是指，给定 n 个命题变元，由这 n 个命题变元构成的一个小项或由这 n 个命题变元构成的两个以上（含两个）的小项经析取构成的析取范式。

例如，由命题变元 $\mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_2$、$\mathbf{p}_3$ 构成的优析取范式有：

①（$\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \neg \mathbf{p}_3$）；

②（$\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \neg \mathbf{p}_3$）$\vee$（$\mathbf{p}_1 \neg \mathbf{p}_2 \neg \mathbf{p}_3$）；

③（$\neg \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$）$\vee$（$\mathbf{p}_1 \neg \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$）$\vee$（$\neg \mathbf{p}_1 \neg \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$）。

在这三式中的每个括号中都省略了两个合取号 $\wedge$。

纯真值复合式 $\mathbf{A}$ 的优析取范式 $\mathbf{A}^{yx}$ 定义为：若 $\mathbf{A}^{yx}$ 为优析取范式，且 $\vdash \mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A}^{yx}$，则称 $\mathbf{A}^{yx}$ 为 $\mathbf{A}$ 的优析取范式。

在 $\boldsymbol{Cm}$ 中可证明下列公式。

公式 105.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{A}_1$

公式 108.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{B}_1) \rightleftharpoons \mathbf{A}_1$

公式 132.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \overline{\mathbf{A}}_1 \vee \mathbf{B}_1$

公式 133.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons (\overline{\mathbf{A}}_1 \vee \mathbf{B}_1)(\overline{\mathbf{B}}_1 \vee \mathbf{A}_1)$

公式 31.　$\vdash \quad \neg (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1) \rightleftharpoons \overline{\mathbf{A}}_1 \vee \overline{\mathbf{B}}_1$

公式 37.　$\vdash \quad \neg (\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{B}_1) \rightleftharpoons \overline{\mathbf{A}}_1 \overline{\mathbf{B}}_1$

公式 10.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \rightleftharpoons \neg \neg \mathbf{A}_1$

公式 23.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \rightleftharpoons \mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_1$

公式 22.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \rightleftharpoons \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_1$

公式 43.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1$

公式 41.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{B}_1 \rightleftharpoons \mathbf{B}_1 \vee \mathbf{A}_1$

公式 69.　$\vdash \quad (\mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1) \mathbf{C}_1 \rightleftharpoons \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1$

公式 65.　$\vdash \quad (\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{B}_1) \vee \mathbf{C}_1 \rightleftharpoons \mathbf{A}_1 \vee (\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{C}_1)$

公式 130.　$\vdash \quad \mathbf{A}_1 (\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{C}_1) \rightleftharpoons \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \vee \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1$

公式 131.　　$\vdash$　$\mathbf{A_1 \vee B_1 C_1 \rightleftharpoons (A_1 \vee B_1)(A_1 \vee C_1)}$

根据这些公式和充要条件定理,我们可以证明:***Cm*** 中的任一纯真值复合式均可获得其范式,然而其范式的长度不是唯一确定的。***Cm*** 中的任一纯真值复合式均可获得其优范式,并且其优范式的长度是唯一确定的——亦即,成立优合取范式(或者优析取范式)的唯一存在定理。

2. 优范式唯一存在定理

【优合取范式(或者优析取范式)唯一存在定理】　任意的纯真值复合式都有一个唯一的优合取范式(或者优析取范式)。

其证明,也请参见龚启荣著《逻辑斯谛——又称"数理逻辑"的二值数学》(贵州教育出版社,1998 年版,第 97 - 98 页和第 101 页)。

若 $\mathbf{A^y}$、$\mathbf{B^y}$分别是 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的优范式,若 $\mathbf{A^y \rightleftharpoons B^y}$不是 ***Cm*** 公式,则称 $\mathbf{A^y}$ 与 $\mathbf{B^y}$ 为不同的优范式。例如,一元的不同的优范式共有 4 个:$\mathbf{p}$,$\mathbf{\neg p}$,$\mathbf{p \vee \neg p}$,$\mathbf{p \neg p}$。二元的不同的优范式共有 166 个。举例如下。

$\mathbf{p \neg p}$	$\mathbf{p \vee \neg p}$
$\mathbf{p \neg p q}$	$\mathbf{p \vee \neg p \vee q}$
$\mathbf{p \neg p \vee q \neg q}$	$\mathbf{p\, q \vee p \neg q \vee \neg p\, q \vee \neg p\, q}$
$\mathbf{p \neg p\, q \neg q}$	$\mathbf{p \vee \neg p \vee q \vee \neg q}$
$\mathbf{p \neg p\, q \vee p \neg p \neg q \vee p\, q \neg q \vee \neg p\, q \neg q}$	$\mathbf{p\, q \vee p \neg q \vee \neg p\, q \vee \neg p \neg q \vee p \neg p \vee q \neg q}$

左边 5 个是永假式,右边 5 个是永真式。显然,依据下面将要证明的重言定理,左边的任意二式之间满足等值关系,右边的任意二式之间也满足等值关系。依据下面将要证明的纯真值后充定理,无论左边的还是右边的任意二式之间都不满足充要条件关系。

下面再举 10 个可真可假的例子。

$\mathbf{pq}$	$\mathbf{p \vee q}$
$\mathbf{pq \vee p \neg p \vee q \neg q}$	$\mathbf{pq \vee p \neg q \vee \neg p\, q}$
$\mathbf{pq \vee \neg p\, q \neg q}$	$\mathbf{pq \vee P \neg q \vee \neg p\, q \vee q \neg p}$
$\mathbf{pq \vee p \neg p \neg q \vee q \neg q}$	$\mathbf{pq \vee P \neg q \vee \neg p\, q \vee q \neg q}$
$\mathbf{pq \vee p \neg p \neg q \vee \neg p\, q \neg q}$	$\mathbf{pq \vee p \neg q \vee \neg p\, q \vee p \neg p \vee q \neg q}$

据重言定理与纯真值后充定理:左边 5 式的任意二式之间满足等值关系,却不满足充要条件关系;右边 5 式的任意二式之间也满足等值关系,却不满足充要条件关系。

14.2 *Cm* 的可判定部分——有关的几个元定理

14.2.1 *Cm* 的重言定理

[**Cm 的重言定理**] 令 **A** 为纯真值复合式,则 ⊢**A** 当且仅当 **A** 为重言式。

证明:

(1) 先证明:若 ⊢**A**,则 **A** 是重言式。

以 ***P*** 表示纯真值的二值系统。将 ***Cm*** 公理中出现的非纯真值的一全部变换成纯真值的→,这样:所获得的式全部是 ***P*** 中的定理;***Cm*** 的规则全部是 ***P*** 的规则;因此,***Cm*** 中的纯真值复合式定理做上述变换后不变。所以,若 ⊢**A**,则 **A** 是重言式。

(2) 我们再来证明:若 **A** 是重言式,则 ⊢**A**。

Cm 中可证明:① $\vdash \mathbf{A}_1 \vee \overline{\mathbf{A}_1}$;② 若 $\vdash \mathbf{A}_1$,则 $\vdash \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{B}_1$。

根据这些形式定理和合取规则,以及纯真值复合式的合取范式存在定理,即可证明:令 **A**′为 **A** 的合取范式,若 **A**′的每一个合取项(为一简单析取式)中至少有一个命题变元与其否定同时出现,则 ⊢**A**。因此,若 **A**′为重言式,则 ⊢**A**。有:若 **A** 为重言式,则 **A**′为重言式。所以,若 **A** 为重言式,则 ⊢**A**。

关于 ***Cm*** 的重言定理说明:***Cm*** 包括纯真值二值系统 ***P*** 中的全部定理。

根据关于 ***Cm*** 的重言定理,可以证明如下规则。

蕴涵分离规则 设 **A**、**B** 为纯真值复合式。若 ⊢**A**, ⊢**A**→**B**,则 ⊢**B**。

因此,***Cm*** 的纯真值复合式部分与纯真值二值系统 ***P*** 等价。显然,***P*** 中既无非纯真值复合式,又无非纯真值公式。因此,纯真值二值系统 ***P*** 是 ***Cm*** 的真子系统。***Cm*** 的纯真值复合式部分是可判定的。

14.2.2 *Cm* 的不矛盾性定理

讨论 ***Cm*** 的不矛盾性定理,涉及其重言定理。已经证明了的关于 ***Cm*** 的重言定理是指:若 **A** 是纯真值复合式,则 ⊢**A** 当且仅当 **A** 为重言式。因此,成立蕴涵分离规则:设 **A**、**B** 是纯真值复合式。若 ⊢**A**, ⊢**A**→**B**,则 ⊢**B**。显然,***Cm*** 的纯真值复合式部分与纯真值的二值系统 ***P*** 等价。鉴于,***P*** 中既无非纯真值复合式,又无非纯真值公式,可见,纯真值的二值系统 ***P*** 是 ***Cm*** 的真子系统。***Cm*** 的纯真值复合式部分是可判定的;***Cm*** 的纯真值后充式部分是可判定的。

下面是 ***Cm*** 的不矛盾性定理。

［***Cm*** 的不矛盾性定理］　***Cm*** 是不矛盾的。

证明:从语构上说,由于 ***Cm*** 比 ***P*** 多一个非纯真值联结号充分条件号⇀,所以,***P*** 是 ***Cm*** 的真子系统。如果把 ***Cm*** 中的非纯真值联结号充分条件号⇀变换成纯真值联结号→后得出的系统为 $\boldsymbol{Cm}^{\rightarrow}$,则 $\boldsymbol{Cm}^{\rightarrow}$是 ***P*** 的真子系统(因为 ***P*** 中的涵衍式在 $\boldsymbol{Cm}^{\rightarrow}$中不可证)。由于 ***P*** 不矛盾,所以 $\boldsymbol{Cm}^{\rightarrow}$不矛盾,因而 ***Cm*** 不矛盾。证毕。

14.2.3　*Cm* 的纯真值后充定理

先引入两个概念。

(1) 纯真值后充式:如果 **A**、**B** 为纯真值复合式,那么称 **A⇀B** 为纯真值后充式。

(2) 因式:如果 **C**、**D** 皆为合取(析取)式且 **D** 的每一个合取(析取)项都是 **C** 的合取(析取)项,那么称 **D** 是 **C** 的因式。

［***Cm*** 的纯真值后充定理］　令 **A⇀B** 为纯真值后充式,**A′**、**B′**分别为 **A**、**B** 的析取范式。则:⊢**A⇀B**,当且仅当,**A′**的每一个析取项都有 **B′**的析取项为其因式。

证明:(1) 先证明从右到左的"若,则"。

依据 ***Cm*** 的下述定理,即可证明:

① 若 $\mathbf{A}_1$、$\mathbf{B}_1$皆为合取式且 $\mathbf{B}_1$为 $\mathbf{A}_1$的因式,则 $\vdash\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B}_1$;

② $\vdash(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B}_1)\rightharpoonup\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B}_1\vee\mathbf{C}_1$;

③ **C** 为析取式,$\mathbf{C}_i$为其析取项。⊢**C⇀D**,当且仅当,对于每一个 $\mathbf{C}_i$,都有 $\mathbf{C}_i\rightharpoonup\mathbf{D}$。

(2) 再来证明从左到右的"若,则"。

这只要证明:若存在 **A′**的析取项没有 **B′**的析取项为其因式,则⊣ **A⇀B**。设有:

$$\mathbf{C}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{C}_i\wedge\cdots\wedge\mathbf{C}_l \tag{14.1}$$

式(14.1) 为 **A′**的一个析取项,且没有 **B′**的析取项为其因式,其中,每一个 $\mathbf{C}_i$不是命题变元就是其否定(这二者合称为准变元)。由于每一个 **B′**的析取项都不是(14.1)的因式,因此,可以在 **B′**的每一个析取项中找到一个准变元 $\mathbf{D}_j$,$\mathbf{D}_j$不在(14.1)中出现。设 **B′**有 m 个析取项,那么,这样的 $\mathbf{D}_j$有 m 个。我们来考察下述式。

$$\mathbf{C}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{C}_i\wedge\cdots\wedge\mathbf{C}_l\rightharpoonup\mathbf{D}_1\vee\cdots\vee\mathbf{D}_j\vee\cdots\vee\mathbf{D}_m \tag{14.2}$$

式(14.2)中,每一个 $\mathbf{C}_i$、$\mathbf{D}_j$最多只含有一个否定号且任意一对准变元 $\mathbf{C}_i$与 $\mathbf{D}_j$都不相同,我们按表 14.1 所述方式对式(14.2)做变换。

表 14.1 中,在左边二列中出现的 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_8$为在命题变元中变的语构变元;在右边二列中出现的 p、q、r 为命题变元。通过上述变换,即由式(14.2)得出:

表 14.1　变换方式

含有同一命题变元的准变元的出现情况		换　以	
在前件中	在后件中	在前件中	在后件中
$\mathbf{p}_1$		q	
	$\mathbf{p}_2$		$\neg$q
$\neg\mathbf{p}_3$		$\neg\neg$q	
	$\neg\mathbf{p}_4$		$\neg$q
$\mathbf{p}_5,\neg\mathbf{p}_5$		p，$\neg$p	
	$\mathbf{p}_6,\neg\mathbf{p}_6$		r，$\neg$r
$\mathbf{p}_7$	$\neg\mathbf{p}_7$	q	$\neg$q
$\neg\mathbf{p}_8$	$\mathbf{p}_8$	$\neg\neg$q	$\neg$q

$$\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{D} \tag{14.3a}$$

C 中的$\neg$**q** 以 q 置换得出 **C′**并消去在 **C′**、**D** 中的出现的重复的合取项、析取项后，由式(14.3a)得出：

$$\mathbf{C''}\rightharpoonup\mathbf{D'} \tag{14.3b}$$

合取式 **C″**一定是 $p\wedge\neg p\wedge q$ 的因式，析取式 **D′**一定是 $r\vee\neg r\vee\neg q$ 的因式。因此，式(14.3)在前件最强、后件最弱的情况下为：

$$p\neg pq\rightharpoonup r\vee\neg r\vee\neg q \tag{14.4}$$

可通过在 13.2 节的 ***Cm*** 的无衍性定理中列出的算数解释方阵证明式(14.4)在 ***Cm*** 中不可证：当 $p=+1,q=-0,r=+2$ 时，式(14.4)取非特选值 -3。由于式(14.3a)是 ***Cm*** 公式，当且仅当式(14.3b)是公式，而式(14.3b)是公式仅当式(14.4)是 ***Cm*** 公式，故而，式(14.3a)在 ***Cm*** 中不可证。由于式(14.3b)具有式(14.2)形，因此，式(14.2)在 ***Cm*** 中不可证，所以$\dashv$ **A**$\rightharpoonup$**B**。

下面是纯真值后充定理的两个系定理。

系定理一　令 **A**$\rightharpoonup$**B** 为纯真值后充式，$\mathbf{A}^{yh}$、$\mathbf{B}^{yh}$分别为 **A**、**B** 的优合取范式，则$\vdash$**A**$\rightharpoonup$**B** 当且仅当 $\mathbf{B}^{yh}$的每一个合取项都有 $\mathbf{A}^{yh}$的合取项为其因式。

系定理二　令 **A**、**B** 为纯真值复合式，$\mathbf{A}^{yf}$、$\mathbf{B}^{yf}$分别为其优析取(合取)范式，则$\vdash$**A**$\rightleftharpoons$**B** 当且仅当 **A′**、**B′**的每一个析取(合取)项都互有对方的析取(合取)项为其因式。

这两个系定理的成立是很明显的。

至今可知，***Cm*** 的可判定部分为：纯真值复合式或纯真值后充式。

14.3　*Cm* 推理式的判定定理

14.3.1　几个概念

（1）后联结号：最后运算（或者说结合力最弱）的那个联结号。

（2）后充式：最后联结号为⇀的式。

（3）后不充式：最后运算的联结号不为⇀的式。

（4）后充公式：可证的后充式。

（5）后充非公式：不可证的后充式。

（6）后不充公式：可证的后不充式。

（7）后不充非公式：不可证的后不充式。

（8）有一：具有第一独立性。就是“可独立于前、后件的真值确定不会是前真而后假”中的“可独立于前、后件的真值确定”。

（9）有二：具有第二独立性。“具有第二独立性”就是“可独立于后件的真值确定前件为真”中的“可独立于后件的真值确定”。

只对后充式说是否有一；只对有一之中的后充式说是否有二。

14.3.2　判定任一后充公式 ⊢**A** 是否为 *Cm* 推理式的算法

据纯真值后充定理，任何纯真值后充公式必定只有一独而无二独，因此，任何具有纯真值后充形或依据纯真值后充定理可化归为纯真值后充形的后充公式必无二独，定非推理式；只有不具有纯真值后充形或依据纯真值后充定理不能化归为纯真值后充形的后充公式才有二独，才是推理式。

判定任一后充公式 ⊢**A** 是否为 ***Cm*** 推理式的算法如下：

（1）消去 **A** 中的!、↾、↿、↑、→、↔、↼、⇌号，使之只含有¬、∧、∨、⇀号，得出 $\mathbf{A}_1$；

（2）令 **B**、**B′**为 $\mathbf{A}_1$ 的纯真值真子式，将 **B** 与 **B′**换成相同的命题变元，当且仅当 ⊢**B**⇌**B′**，得出 $\mathbf{A}_2$；

（3）令 **C**、**C′**为 $\mathbf{A}_2$ 的纯真值后充真子式，若 **C** 与 **C′**相同，则换以相同的命题变元；若 **C** 与 **C′**不同，则换以不同的命题变元，得出 $\mathbf{A}_3$；

（4）反复进行步骤（2）、步骤（3），直至没有真子式可以变换成命题变元，亦即，变换至具有 **D**⇀**D′**形的 $\mathbf{A}_n$，其中，**D**、**D′**为纯真值复合式，且在 $\mathbf{A}_n$ 中没有并非命题变元而又互为充分条件的纯真值真子式。这时，若⊣ $\mathbf{A}_n$，则 ⊢**A** 可表示成⊨ **A**，并称 **A** 为推理式；若 ⊢$\mathbf{A}_n$，则 ⊢**A** 可表示成 ⊩ **A**，并称 **A** 为导出式。

14.3.3 *Cm* 推理式判定定理

Cm 推理式判定定理：*Cm* 的后充公式 $\vdash \mathbf{A}$ 是否为推理式是可判定的。

证明：施归纳于 **A** 的长度，并依据纯真值后充定理。

显然，任一纯真值后充公式都不是推理式；任一纯真值公式（即重言式）也不是推理式。这是从语构上说，我们已经在 6.5 节从语义上阐明重言式不是推理式。

若 $\vDash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$（即 $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ 为推理式），则称 **A**、**B** 间的逻辑关系为推出；若 $\Vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$（即 $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ 为导出式），则称 **A**、**B** 间的逻辑关系为导出；若 $\dashv \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$（即 $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ 不是推导式），则称 **A**、**B** 间的逻辑关系为不可推导。

至此，对 *Cm* 中的式的分类，可做如下鸟瞰（见表 14.2）。

表 14.2 *Cm* 中的式的分类

<table>
<tr><th colspan="5">名　称</th><th>举　例</th></tr>
<tr><td rowspan="7">式</td><td rowspan="2">纯真值复合式</td><td colspan="3">纯真值非公式</td><td>$\dashv \neg \mathbf{A}$　$\dashv \mathbf{AB}$　$\dashv \neg \mathbf{A}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$</td></tr>
<tr><td colspan="3">纯真值公式</td><td>$\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$　$\vdash \neg(\mathbf{A} \neg \mathbf{A})$　$\vdash \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">非纯真值复合式</td><td rowspan="2">后不充式</td><td colspan="2">后不充非公式</td><td>$\dashv \mathbf{A}!\ \mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">后不充公式</td><td>$\vdash \neg(\mathbf{A}! \neg \mathbf{A})$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">后充式</td><td colspan="2">后充非公式
（无一后充式）</td><td>$\dashv \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$　$\dashv \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$
$\dashv \mathbf{A} \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$　$\dashv \neg \mathbf{A}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">后充公式（有一后充式，即推导式）</td><td>有一无二后充式，即导出式</td><td>$\Vdash \mathbf{AB} \rightharpoonup \mathbf{A}$　$\Vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
$\Vdash \mathbf{A}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{AB} \vee \mathbf{AC}$
$\Vdash \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A} \neg \mathbf{B}$
$\Vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td>有一有二后充式，即推理式</td><td>$\vDash (\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$　$\vDash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})(\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$
$\vDash \mathbf{A}(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$　$\vDash \neg \mathbf{A}(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$
$\vDash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C}$
$\vDash (\neg \mathbf{C} \vee \neg \mathbf{D})(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{C})(\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{D}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B}$</td></tr>
</table>

表 14.2 中，最后的那种公式——有一有二后充式就是与命题逻辑推理式相应的 *Cm* 中的形式定理。构造形式系统 *Cm* 的主要目的之一就是从后充式中区分出有一后充式（推导式）来，并从其中再进一步区分出有一有二后充式（推理式）来。

第4篇　当代形式逻辑名词演算 *Cn* 系统

第15章　名词演算 *Cn* 系统的形式语言

在名词演算 ***Cn*** 系统的形式语言中采用的形式符号除联结号外一律以正体拉丁字母表示,加到元语言汉语中来辅助讨论对象语言 ***Cn*** 的形式语言的语构变元一律以黑正体拉丁字母表示。当然,语构变元不是 ***Cn*** 的形式符号。在同一个上下文中:相同的语构变元指称 ***Cn*** 的形式语言中的相同对象;不同的语构变元可以然而未必指称 ***Cn*** 的形式语言中的不同对象。

15.1　*Cn* 的形式符号

(1) 个体变元号:正体小写拉丁字母 x, y,z,加撇或下标表示。黑正体小写拉丁字母 **x**,**y**,**z**,加撇或下标为在个体变元号中变的语构变元号。个体变元号可以简称为个体变元;语构变元号可简称为变元。

(2) 函数号:在不是已有习用符号的情况下,对于任一个自然数 n,n 元函数号采用正体拉丁字母 f,g,h,加撇或下标表示。黑正体小写拉丁字母 **f**,**g**,**h**,加撇或下标为在函数号中变的语构变元。当有必要表明是 n 元函数号时,可以写作 f^n。可以有0元函数 f^0。

(3) 名词号:在不是已有习用符号的情况下,对于任一个自然数 n,n 元名词号采用正体小写拉丁字母 p,q,r,s,加撇或下标表示。黑正体小写拉丁字母 **p**,**q**,**r**,**s**,加撇或下标为在名词号中变的语构变元。当有必要表明是 n 元名词号时,可以写做 p^n。可以有0元名词号 p^0。

(4) 联结号:¬(否定)、∧(合取)、→(充分条件)。括号中标出的为其在元语言汉语中的读法。

(5) 辅助性符号“(” 、“)”和“,” 分别读做:左括号、右括号和逗号。左右括号必定成对出现。成对的括号用来表示联结号、函数号、名词号的辖域;逗号用来分开函数号或名词号的辖域中的项。为了增加可读性,在理论上只是一种括号( ),在实际上按结合力从大到小的顺序分别写做( )、[ ]、{ } 等。

15.2　*Cn* 的形成规则

有限长的形式符号序列称为符号串。黑正体小写拉丁字母 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$,加撇或下标为在 ***Cn*** 的符号串中变的语构变元。

Cn 的项符的形成规则如下:

(1) 任一个体变元号 $\mathbf{x}$ 是项符;

(2) 若 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n$ 是 n 个项符,$\mathbf{f}^n$ 是 n 元函数,则 $\mathbf{f}^n(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n)$ 是项符;

(3) $\mathbf{u}$ 是项符仅当 $\mathbf{u}$ 按(1)、(2)形成。

在项符 $\mathbf{f}^n(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n)$ 中,$(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n)$ 称为 n 目组符,简称目符。目符 $(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n)$ 也称为 n 元函数号 $\mathbf{f}^n$ 的辖域。在语构学的语境中,项符可以简称为项(与语义学中的项有别)。

由于通过 0 元函数 $\mathbf{f}^0$ 和 0 目组符()形成的符号串 $\mathbf{f}^0()$ 符合项的形成规则(此时,$n=0$),因此,$\mathbf{f}^0()$ 是项。用正体小写拉丁字母 e,加撇或下标作为 $\mathbf{f}^0()$ 的缩写,并称 e 为个体常项号。以黑正体小写拉丁字母 $\mathbf{e}$,加撇或下标表示在个体常项号中变的语构变元。个体常项号可以简称为个体常项,并进一步简称为个体(与语义学中的个体不同)。

以黑正体小写拉丁字母 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$、$\mathbf{d}$,加撇或下标表示在项中变的语构变元。

任意的项必有一非负自然数的阶。

我们称具有 $\mathbf{p}^n(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ 形的符号串为原子式,其中,$\mathbf{p}^n$ 为 n 元名词号,$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 n 个项。在原子式 $\mathbf{p}^n(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ 中,$(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ 称为目符。$(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ 是 n 元名词号 $\mathbf{p}^n$ 的辖域。当 n 个 $\mathbf{a}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均为个体变元时,原字式 $\mathbf{p}^n(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ 称为 n 元名词号 $\mathbf{p}^n$ 的命名式。为了简便,当不必显示 $\mathbf{p}^n$ 的辖域及在其中出现的 n 个项时,在理论上不可变通的原子式的写法在实际上往往简单地写做 $\mathbf{p}$;当必须显示 $\mathbf{p}^n$ 的辖域及在其中出现的 n 个项时,这种实际上的简化写法可恢复成理论上不可变通的写法 $\mathbf{p}^n(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$。

Cn 的式的形成规则如下:

(1) 任一原子式 $\mathbf{p}^n(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$ 是式;

(2) 若 $\mathbf{u}$ 是式,则 $\neg\mathbf{u}$ 式;若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 是式,则 $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$、$\mathbf{u}\rightarrow\mathbf{v}$ 是式;

(3) $\mathbf{w}$ 是式,仅当 $\mathbf{w}$ 按(1)、(2)形成。

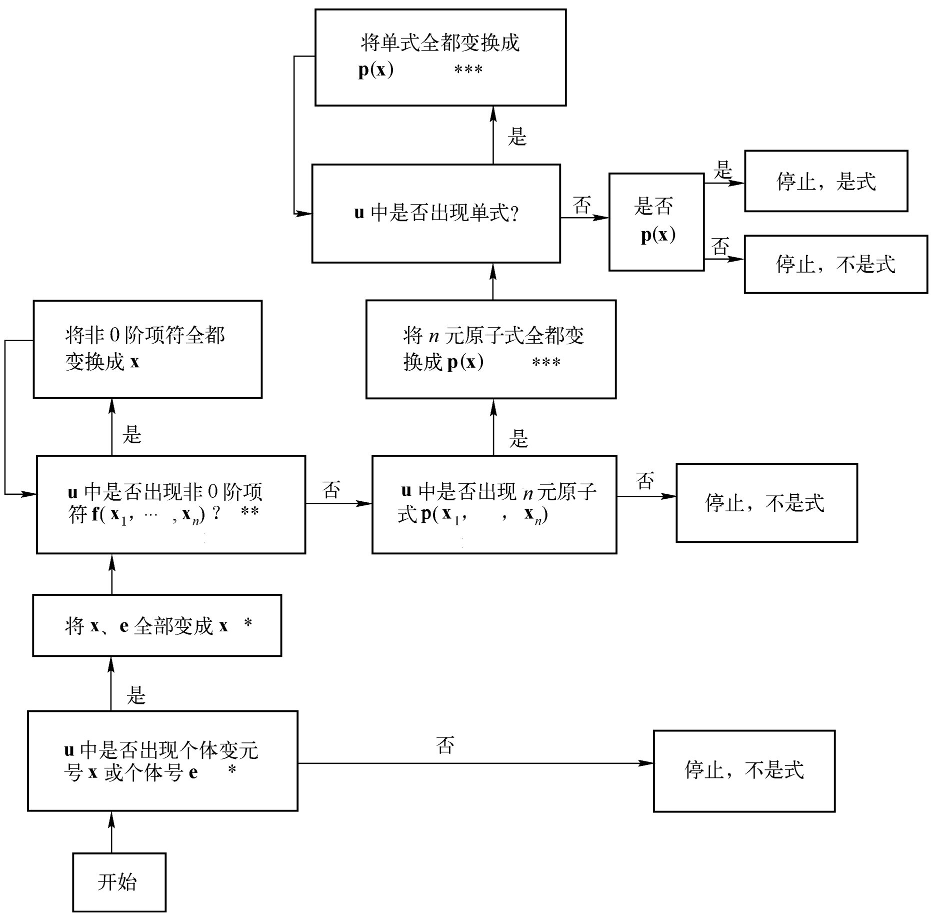
以黑正体大写拉丁字母 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$,加撇或下标表示在式中变的语构变元。

任意的式必有一非负自然数的高和层。

15.3　*Cn* 的式的判定

在 ***Cn*** 的形式语言中,符号串 $\mathbf{u}$ 为式当且仅当 $\mathbf{u}$ 按形成规则形成。

在 ***Cn*** 的形式语言中,任意的符号串 **u** 是否是式,是可判定的,亦即,存在一种确定 **u** 是否为式的算法。我们称出现而且只出现一个联结号的式为单式。下面,我们通过框图来陈述这种关于确定 ***Cn*** 的形式语言中的任意符号串 **u** 是否为式的算法(见图 15. 1)。



注:

∗这里,**u**、**x**、**e** 是语构变元,分别泛指任意的符号串、个体变元号、个体号;**x** 则为确定的、按字母顺序排列为第一个个体变元号。

∗ ∗这里,**f**、**p** 为语构变元,分别泛指任意的函数号、名词号。

∗ ∗ ∗这里,**p** 为确定的、按字母顺序排列为第一个名词号。

图 15. 1　判定 ***Cn*** 的式的算法

在这个算法中,要识别的是:一个符号串 **u** 是否出现个体变元号 **x** 或个体号 **e**、非 0 阶项符 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$、$n$ 元原子式 $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$ 或单式 $\neg\mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}(\mathbf{x})\wedge\mathbf{p}(\mathbf{x})$、$\mathbf{p}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{p}(\mathbf{x})$。显然,这是可以机械地识别的。在这个算法中,要施行的运算是:将 **x**、**e** 全都变换成 **x**,将 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$ 全都变换成 **x**,将

$\mathbf{p}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$全都变换成 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$,将$\neg\mathbf{p}(\mathbf{x})$,$\mathbf{p}(\mathbf{x})\wedge\mathbf{p}(\mathbf{x})$、$\mathbf{p}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{p}(\mathbf{x})$全都变换成 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$。显然,这是可以机械地执行的。而一个符号串 **u** 的长度有穷,这么逐次变换下去,总是要在有限步内到达不能再变换的地步,亦即,这个运算过程一定会在有限步内结束。当变换到不能在变换,亦即,运算终止时,必定是且仅是下述二者之一:是 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$,不是 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$。当是 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$时,**u** 是式;否则,**u** 不是式。

【*Cn* 的式的判定定理】 **u** 是式,当且仅当,按上述算法得出 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$。

施归纳于 **u** 的长度,即可证明此定理。

15.4 *Cn* 的缩写

Cn 有下述关于缩写的规定。

(1)为了增加可读性,在 ***Cn*** 中仍然引入 ***Cm*** 中曾经引入过的缩写,其中含有下述被定义联结号:¯(否定)、∨(析取)、→(蕴涵)、↔(等值)、!(约合)、↾(尽举相容选择)、↿(尽举反相容选择)、↑(尽举不相容选择)、⇌(充要条件)。

(2)为节省括号,仍然规定:

① 联结号的结合力从大到小的顺序为¬(或¯)、∧、∨、!、↾、↿、↑、→、↔、⇀、↽、⇌;

② 相同联结号的右结合;

③ ∧号往往省略。

(3)在 ***Cn*** 中,当 **p** 为不在任何其他场合使用的特殊的“指导名词号”时,还规定下述缩写:

$$D_8: \mathrm{U}_{(\mathbf{a})} —— \mathbf{p}_{(\mathbf{a})} \rightharpoonup \mathbf{p}_{(\mathbf{a})}$$

其中,U 解释为论域,$\mathrm{U}_{(\mathbf{a})}$解释为项 **a** 在论域中。

15.5 *Cn* 的个体变元在式中的约束出现和自由出现

以 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$表示 x 在 **A** 中出现。

若 x 在 **A** 的具有 $\mathbf{B}(\mathrm{x})\rightharpoonup\mathbf{C}(\mathrm{x})$形的子式中出现,则称 x 在 **A** 中的这个出现是约束的;否则,亦即 x 在 **A** 中出现且不在 **A** 的具有 $\mathbf{B}(\mathrm{x})\rightharpoonup\mathbf{C}(\mathrm{x})$形的子式中出现,它就是自由的。

x 在¬**A** 或 **A**∧**B** 中的出现是约束(自由)的,当且仅当 x 在 **A**、**B** 中的出现是约束(自由)的。提请注意,当 x 在 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$、$\mathbf{B}(\mathrm{x})$中的出现是自由的时候,x 在 $\mathbf{A}(\mathrm{x})\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathrm{x})$中的出现却是约束的。这是语构上的规定,有其语义根据。

若对在式 **A** 中出现的个体变元指定一个论域中的个体,则此被指定的个体

称为个体变元的指派。若只有在给予式**A**中的一个体变元的某些出现以确定的指派后，式**A**才具有确定的含义与真值，且其含义与真值随着指派的改变而做相应的变化，则称个体变元在式**A**中的这些出现是自由的。例如，“这支长矛(e_1)能戳透(p)某物(x)”，这在***Cn***中将符号地表示成式$\mathbf{A}_1$:p(e_1,x)，其中，p为2元名词(也可称为2元关系)，(e_1,x)为p的辖域，e_1称为关系前项，x称为关系后项。此式中的个体变元x的这个出现就是自由的。当x的指派为草席时，式$\mathbf{A}_1$为真；x的指派为一块岩石时，式$\mathbf{A}_1$为假。若不给予个体变元在一式**A**中的某些出现以任意指派，式**A**就有唯一确定的含义与真值，则称个体变元在该式**A**中的某些出现是约束的。例如，“兰(q)必定(⇀)虫媒(r)”，这在***Cn***中将符号地表示为$\mathbf{A}_2$:q(x)⇀r(x)。此式中的个体变元x的两次出现就是约束的。尽管不给予x以任意的指派，该式$\mathbf{A}_2$只有一个确定的含义，而且是真的。正由于此，约束出现的个体变元在自然语句中往往略去不提。又譬如，“这支长矛能戳透任何物体”，在***Cn***中与之相应的符号式为$\mathbf{A}_3$:U(x)⇀p(e_1,x)，直译出来是:“在论域中的个体x必定满足这支长矛能戳透个体x”，按约定俗成的汉语规范意译出来即是:“这支长矛能戳透任何物体”；其中出现2次的个体变元x也是约束的:因为在不给予它以任何指派的情况下该$\mathbf{A}_3$就只有一个意思，而且是假的。

又譬如，“任何物体不能戳穿那面盾牌(e_2)”，在***Cn***中与之相应的符号式为$\mathbf{A}_4$:U(y)⇀¬p(y,e_2)在其中出现2次的个体变元y也是约束的。这样，只要有一个代入定理(公式中同一个体变元的全部出现在可代入的条件下代入任意同一的项得出的为公式——我们在后面将给出证明)。我们一方面可从U(x)⇀p(e_1,x)得出U(e_2)⇀p(e_1,e_2)，由于U(e_2)(“那面盾牌是物体”)真，得出p(e_1,e_2)(“这支长矛能戳穿那面盾牌”)；另一方面可从U(y)⇀¬p(y,e_2)得出U(e_1)⇀¬p(e_1,e_2)，由于U(e_1)(“这支长矛是物体”)真，得出¬p(e_1,e_2)(“这支长矛不能戳穿那面盾牌”)。这就是对两千多年前的古人和现代的小学生揭露那个卖矛和盾的商人“自相矛盾”的逻辑思考过程的理论分析。

由于传统形式逻辑的形式语言过于贫乏，不对名词做更细致的分析，因此，对实际的逻辑思维做理论分析的能力非常不足。尽管很多流行的形式逻辑论著在讨论“自相矛盾”时喜欢应用《韩非子》中“矛与盾的故事”，然而，我们没有见到一篇(或一本)形式逻辑论著能够从逻辑理论上依据命题的结构形式严格地分析出那个商人的自相矛盾来。面对两千多年前的古人和现代的小学生都可轻而易举地做出的推论过程，21世纪的今天的形式逻辑论著都不能从逻辑理论上给予分析，实在是说不过去的！

15.6 *Cn* 的项对在式中出现的个体变元的可代入

项 **a** 对在 **A** 中出现的 **x** 是可代入的，当且仅当，若 **a** 中含有 **y**，则在 **A** 中不出现具有 **B**(**x**)⇀**C**(**x**)或 **B**(**y**)⇀**C**(**x**)形的子式。若 **a** 对 **A** 中的 **x** 是可代入的，则以 **A**(**x**) [**a**]表示 **a** 对 **A** 中 **x** 的代入：将 **A** 中的 **x** 全部出现以 **a** 置换。这个项 **a** 对 **A** 中个体变元 **x** 的可代入条件只要求：本来是个体变元的自由出现的地方，若代入后还有个体变元出现，则必须仍然保持是自由的。上述要求与正统的一阶谓词演算 ***F*** 相一致。在可代入方面 ***Cn*** 与 ***F*** 不一致之处：(1)对变元的约束出现也可做代入；(2)对 U(**x**)中的 **x** 也可做代入，U(**a**)、U(**e**)、U(**a**)⇀**A**、U(**e**)⇀**A** 都是 ***Cn*** 中的式。

提请注意：当 **a** 中不含有变元，亦即，**a** 为常项时，**a** 对 **A** 中的任意 **x** 都是可代入的；对在 **A** 中出现的任何常项不可进行代入。

从语义上说，**A**(**x**)[**a**]是 **A**(**x**)的特殊情况，因为，**x** 以论域为变域，可是，**a** 的值域是论域的一个子域；当 **a** 是常项 **e** 时，**A**(**c**)[**e**]是 **A**(**x**)的个别情况，因为，**e** 只指称论域中的一个个体。

令 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$为按字母顺序排列的在 **A** 中出现的 n 个不同的个体变元，$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$为 n 个项。若每一个 $\mathbf{a}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 对 **A** 中的相应的每一个 $\mathbf{x}_i(1\leqslant i\leqslant n)$都是可代入的，则以 $\mathrm{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n)[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_n]$表示以每一个 $\mathbf{a}_i$置换 **A** 中相应的每一个 $\mathbf{x}_i$的全部出现后得出的式。这里，要注意的是：被代入的是 **A** 中的每一个 $\mathbf{x}_i$的全部出现，而不是 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_{i-1})[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{i-1}]$中的每一个 $\mathbf{x}_i$的全部出现，因为，在这二者中 $\mathbf{x}_i$出现的次数当 $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{i-1}$中含有 $\mathbf{x}_i$时是不同的。$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n]$称为 **A** 的例，当某一 $\mathbf{a}_i$中含有变元时称为特殊例，当全部都为常项时称为个别例。在 15.5 节中举出的 U($\mathbf{e}_2$)⇀p($\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$)就是 U(**x**)⇀p($\mathbf{e}_1$,**x**)的个别例，其含义为："若那面盾牌是物体，则这支长矛能戳透那面盾牌。"

15.7 *Cn* 系统的解释

15.7.1 联结号以外的形式符号的解释

表 15.1 列出了 ***Cn*** 的联结号以外的形式符号的解释。

表 15.1 非联结号的形式符号的解释

形式符号	解　　释
个体变元号 **x**	泛指论域中的个体 x

续表

形式符号	解　释
n 元函数号 f^n	论域上的 n 元函数 f^n
项符 $\mathrm{f}^n(\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_n)$	论域上的项 $f^n(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$
个体常项号 $\mathbf{e}$	论域中的确定个体 $\boldsymbol{e}$
n 元名词号 p^n	论域上的一个 n 元关系 p^n；论域上的目组集的一个子集 P
原子式 $\mathrm{p}^n(\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_n)$	论域上的原子事件 $p^n(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$

任意论域上必有两个 0 元关系 $\boldsymbol{p}_0^0$（0 元空关系）和 $\boldsymbol{p}_1^0$（0 元全关系）；0 元空原子事件 $\boldsymbol{p}_0^0$(　)恒无，而 0 元全原子事件 $\boldsymbol{p}_1^0$(　)恒有。因此，0 元空原子式 p_0^0(　)解释为“无”，0 元全原子式 p_1^0(　)解释为“有”。

15.7.2　联结号的解释

Cn 的联结号的解释同 ***Cm***。不过，在命题逻辑中，p→q（p，q 为命题变元）习惯于读做“若 p，则 q”；在名词逻辑中，p→q（p，q 为原子式 $\mathrm{p}^m(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$、$\mathrm{q}^n(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n)$ 的简化写法）习惯于读做“p 必定 q”。名词 p、q 分别对应于传统形式逻辑的主、宾词。

下面要说明一下，在联结号的解释方面，***Cn*** 与正统的谓词演算 ***F*** 不一致之处。这之间的区别主要是由非纯真值的联结号与纯真值的联结号的解释不同所引起的。在 ***Cn*** 中，p(x)→q(x)尽管没有什么量词，但只有一个确定的意思与真值：可在既不需确定 p(x)假又不需要确定 q(x)真的情况下确定不会是 p(x)真而 q(x)假，其含义与真假跟随个体变元 x 究竟指称论域中哪个个体无关。p→q 翻译成自然语言时通常说成：“若 p，则 q”，“p 是 q 的充分条件”，在名词逻辑中，更习惯于说成：“p 必定 q”，“凡 p 皆 q”。例如，“兰必定虫媒”，“凡兰皆虫媒”。这句话只有一个确定的意思：可在既不需要确定某个体不是兰又不需要确定该个体虫媒的情况下确定不会是该个体是兰而又不虫媒。生物学确定了这是个真语句。这种对个体变元不加量词约束的 ***Cn*** 中的 p(x)→q(x)就只有一个确定含义与真值的一对普通的人们来说是很容易接受的，然而，对于看惯了正统的实质蕴涵的极少数专家来说一开头也许会觉得不好接受。我们建议这样的专家做一次下述试验：随便指向房间里一样什么东西，并说一句：“若它不是玻璃的，则它能导电”。这句话符号地表示成 ***Cn*** 中 p(x)→q(x)的呢，还是，***F*** 中的 p(x)→q(x)或者 ∀x(p(x)→q(x))？ 这取决于这句话的意思究竟是下述三者中的哪一种。①一件东西不是玻璃的就必定能导电。因而，这句话只是一个确定的意思，而且是假的，不管指向什么东西，也不管房间里有些什么东西（包括没有任何东西）。②有许多意思，其真假随指向而定：当指向玻璃杯或小刀时为真，当

指向一本书时为假。③其真值取决于:当房间中至少有一件既不是玻璃的又不是导电的东西(如书)时为假;当房间中每件东西是玻璃的或导电,或者什么东西也没有,此时为真。这句话的意思是上述三者中哪一种,有正常理智的人是不难很快做出抉择的。具有②、③这种意思的话普通人从来都不说,因为他们不知道该怎么说。

传统的名词逻辑采用主宾词式的命题构造格局,而正统的谓词演算实际上也不曾超离这种格局,所不同的是定死了将论域作为主词,而将实际上的主宾词在理论上都当做宾词,宾词又称谓词,故而叫做谓词演算。考虑到人们实际上很少拿论域当主词,而论域上的名词在语句中实际上可以是主词或宾词,因此,我们采用了“名词演算”这个名称。

按! 的定义,$U_{(x)}!\mathbf{A}$ 是$\neg(U_{(x)}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})$的缩写;从语构上说,这一点与在 $\boldsymbol{F}$ 中把$\exists x\mathbf{A}$ 当做$\neg\forall x\neg\mathbf{A}$ 的缩写相一致。我们称 $U_{(x)}\rightharpoonup\mathbf{A}$ 为“必定命题”,$U_{(x)}!\mathbf{A}$ 为“可以命题”。兹将这两种命题与 $\boldsymbol{F}$ 中$\forall x\mathbf{A}$ 的相应的全称命题、存在命题$\exists x\mathbf{A}$ 的含义列表对照,如表 15.2 所示。

表 15.2 *Cn* 与 *F* 的对照表

F		***Cn***	
式	含　义	式	含　义
$\forall x\mathbf{A}$	对于论域中的每一个个体 **x** 成立 **A**	$U_{(x)}\rightharpoonup\mathbf{A}$	论域中的个体 **x** 必定满足 **A**
$\exists x\mathbf{A}$	论域中至少有一个体 **x** 成立 **A**	$U_{(x)}!\mathbf{A}$	论域中的个体 **x** 可以满足 **A**

在 *Cn* 中,除了必定命题、可以命题外,还可以有其否定:未必命题、必不命题。我们把上述中的 4 种命题与传统逻辑中按全特称肯否定划分的 4 种命题列表进行对照(见表 15.3)。为了尊重传统逻辑的习惯,我们分别采用 s、p 作为主宾词。

表 15.3 *Cn* 命题与传统逻辑直言命题对照表

Cn			传统逻辑		
式	读　法	含　义	符　号	读　法	含　义
$s\rightharpoonup p$	s 必定 p	满足 s 的个体必定满足 p	sAp	所有 s 是 p	当 s 中的个体不可逐一列举时为 s 必定 p;当 s 中的个体可逐一列举时为每一个是 s 的个体也是 p
$s\rightharpoonup\neg p$ $\neg(s!p)$	s 必不 p s 不可以 p	满足 s 的个体必定不满足 p	sEp	所有 s 不是 p	当 s 中的个体不可逐一列举时为 s 必不 p;当 s 中的个体可逐一列举时为每一个是 s 的个体不是 p
$s!p$ $\neg(s\rightharpoonup\neg p)$	s 可以 p s 未必不 p	满足 s 的个体可以满足(未必不满足)p	sIp	有 s 是 p	当 s 中个体可逐一列举时为至少有一个体是 s 且是 p *

续表

Cn			传统逻辑		
式	读　法	含　义	符　号	读　法	含　义
$\neg(s\rightharpoondown p)$ $s!\neg p$	s 未必 p s 可以不 p	满足 s 的个体未必满足(可以不满足)p	sOp	有 s 不是 p	当 s 中个体可逐一列举时为至少有一个体是 s 且不是 p *

注 * 从承载命题这类"特称命题"的语句的句型来看,其含义当如此,然而,从传统逻辑揭举的名词逻辑推导格式来看,其含义尚不止此,还涉及内涵"可以"和"可以不"命题。

为了结合自然语言中的多种句型,也许还可以规定一些相应的 ***Cn*** 命题形式。不过,从逻辑理论上说,为了分析传统的内涵直言命题,只要有一种必定命题 $s\rightharpoondown p$ 就足够了,其余的各种命题均可由此通过定义得出。由于 $s\rightharpoondown p$ 的含义为:具有 s 的内涵的个体必定具有 p 的内涵,因此,必定命题及由此派生的各种命题(如表 15. 3 中的其余三种命题)统称为内涵命题。内涵命题中的名词所思考的集(外延集)可以是不可逐一列举的有限集、无限集,也可以是空集。

传统的 sAp 的含义当 s 中的个体可简单枚举时为:每一个是 s 的个体也是 p,如"所有这一页上印的汉字少于 20 画"。这句话的含义是:这一页上第 1 个汉字少于 20 画,第 2 个……,……,第 i 个……,……,最后一个……。在 ***Cn*** 中,其符号式为:$p(e_1)\wedge p(e_2)\wedge\cdots\wedge p(e_i)\wedge\cdots\wedge p(e_n)$,其中,p 表示"……少于二十画",$n$ 表示这一页上印的汉字个数,e_i 表示这一页上第 i 个汉字($1\leqslant i\leqslant n$)。为了区别于内涵命题,我们称这种命题及由之派生的命题为外延命题。外延命题与内涵命题在逻辑含义上有重要区别,因此,分别满足不同的规律,起不同的作用。由于"所有 s 是 p"有歧义,有时陈述内涵命题,有时表达外延命题,因此,专门用来指谓内涵命题的"s 必定 p"可以改说成"所有 s 是 p";然而,"所有 s 是 p"未必能改说成"s 必定 p"。譬如,"所有这一页上印的汉字少于 20 画"就不能改说成"这一页上印的汉字必定少于 20 画",因为前者为真而后者可以为假:只要愿意,完全可以在这一页上印一个不少于 20 画的汉字。以外延的命题为大前提的三段论是重言式,因此,是无谓的同语反复,不能得出新知。譬如,从"所有这一页上印的汉字少于 20 画"与"'画'字是这一页上印的汉字"去得出"'画'字少于 20 画"那是毫无意义的,因为,在未预先确定"'画'字少于 20 画"为真之前,是根本无法确定"所有这一页上印的汉字少于 20 画"为真的。然而,以内涵的必定命题为大前提的三段论就不复是重言式,其符号式为$\vDash(r\rightharpoondown p)(s\rightharpoondown r)\rightharpoondown s\rightharpoondown p$,在未确定 $s\rightharpoondown p$ 为真之前即可确定 $r\rightharpoondown p$ 与 $s\rightharpoondown r$ 为真。

Cn 是实空名词逻辑,因此,在内涵命题中可以出现空名词。譬如,①"哥德巴赫猜想的解决者(s)必定是卓越的数学家(p)。"作为 ***Cn*** 中的 $s\rightharpoondown p$ 则是真的;又譬如,②"哥德巴赫猜想的解决者必定长三只眼睛",作为 ***Cn*** 中的 $s\rightharpoondown p$ 则是假的。(附带提一下,要是把它符号地表示成 ***F*** 中的 $\forall x(s(x)\rightarrow p(x))$ 却竟然是

真的！可见,这种 s 一空 p 就可以胡说的正统谓词演算 ***F*** 中的全称命题对普通人来说极其古怪!)提请注意,***Cn*** 中的可以命题 s!p(即¬(s⇀¬p)只要求 s 可以 p(亦即,并非:s 必定不 p),并不要求确实存在是 p 的 s。譬如,③“哥德巴赫猜想的解决者(s)可以是中国人(p)”,作为 ***Cn*** 中的 s! p 则是真的,尽管到目前为止还不存在中国的哥德巴赫猜想解决者。(再顺便提一下,要是把它符号地表示成 ***F*** 中的 $\exists x\,(s(x)\wedge p(x))$ 那它就会是假的！这里举出的普通的人们常说的三个含有空名词的内涵命题,在正统谓词演算 ***F*** 中简直找不出恰当的符号来表示,尽管对于形式化的数学来说 ***F*** 的形式语言是足够丰富的。)

Cn 中的实名词的 s⇀p、s⇀¬p 分别是传统逻辑中的 sAp、sEp 的上位命题;传统逻辑中的 sIp、sOp 分别是 ***Cn*** 中实名词的 s!p、s!¬p 上位命题,尽管 sIp 是实 s!p 的上位命题,sIp 真时实 s!p 必真;然而,人们往往是要在确定不了 sIp 的真假,甚至在确定了 sIp 为假的情况下去确定 s!p 的真假。譬如,人们在第一次登上月球之前很远的年代就确定“人可以登月”为真,通过努力,终于使“有人登月”为真。这就是说,事情往往是:只有当人们确定了 s!p 为真后,在它的指导下,通过努力才争得了 sIp 为真。对于人类在广阔的领域中的认识来说,内涵的“可以”与否在很多情况下比外延的“存在”与否重要得多。内涵的“可以”与否和一定的具有必然性的规律相关联;而外延的“存在”与否只涉及某种实然的现状。

Cn 对可逐一列举域来说是外延逻辑,对不可逐一列举域来说是内涵逻辑。因此,对上述两类不同的对象域来说,***Cn*** 均无需量词。弗雷格草创数理逻辑时引入量词,为逻辑史树起了一座丰碑。然而,当代形式逻辑的发展势必会把这座沉重的石碑从不断前进的逻辑科学的肩上卸下,把它竖立在逻辑史里程的适当的地方。摆脱了量词这个沉重负担的 ***Cn*** 不仅从语义上说更切合普通逻辑思维实际,而且,从语构上说,由于解除了量词在演算技巧上的种种繁冗曲折,将给无量词的形式系统的展开带来巨大的方便。

第 16 章　*Cn* 的公理模式、规则、导出公式和元定理

16.1　*Cn* 的公理模式、原始规则

16.1.1　*Cn* 的公理模式

公理 1. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$　（双否引入律）

公理 2. $\vdash (\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\rightharpoonup\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i))$
$\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i)$
（充分条件易位律）

公理 3. $\vdash (\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\rightharpoonup\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i))\rightharpoonup$
$(\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}'))\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,$
$\mathbf{b}_i)$
（充分条件传递律（ⅰ））

公理 4. $\vdash (\neg\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}'))$
$\rightharpoonup\neg\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$　（充分条件逆否律（ⅰ））

公理 5. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\neg\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')$
$\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}'))$（非充分条件律）

公理 6. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$
（合取重叠律）

公理 7. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$
（合取分解律（ⅰ））

公理 8. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')$
$\rightharpoonup\mathrm{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$　（合取交换律）

公理 9. $\vdash (\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}'))(\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i))$
$\rightharpoonup\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightharpoonup\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i)$
（合取构成律）

公理 10. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\neg(\neg\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}')\neg\mathrm{C}(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i))$
$\rightharpoonup\neg[\neg(\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathbf{B}(\mathbf{a}_1{}',\cdots,\mathbf{a}_n{}'))\neg(\mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathrm{C}$
$(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i))]$
（合取对析取变形分配律）

16.1.2 *Cn* 的原始规则

规则Ⅰ. 从 $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$ 与 $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$

得出 $\vdash \mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$ 。　　　　（充分条件分离规则）

规则Ⅱ. 从 $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$ 与 $\vdash \mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$

得出 $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$。（合取构成规则）

此二规则也可以分别表示为

Ⅰ. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m),\ \vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$

$\vdash\!\!-\ \vdash \mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$;

Ⅱ. $\vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m),\ \vdash \mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')\ \vdash\!\!-\ \vdash \mathbf{A}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\mathbf{B}(\mathbf{a}_1',\cdots,\mathbf{a}_n')$。

提请注意,鉴于 ***Cn*** 与 ***Cm*** 的形式语言不同,因而,对二者来说,所采用的语构变元的变域不同。当然,从陈述上说,二者的公理模式和原始规则完全相同,我们可以将 ***Cn*** 中的 n 目组略去不写,***Cm*** 可以看做是对原子式不做分析的 ***Cn*** 的特殊情况。然而,二者仍然是不同的形式系统,***Cm*** 适用于事件逻辑,***Cn*** 适用于项逻辑。在后面对 ***Cn*** 的阐述中,一般情况下,我们将式中的 n 目组略去不写。

16.2 与 *Cm* 定理相应的 *Cn* 定理

由于 ***Cm*** 与 ***Cn*** 的公理模式在陈述上完全相同,因此,只要把 ***Cm*** 定理中涉及的命题变元当做 ***Cn*** 中的原子式的变通的简化写法(这二者我们采用了相同的形式符号),就可以得出相应的 ***Cn*** 定理(形式定理或元定理)。这样直接从 ***Cm*** 定理得出的 ***Cn*** 定理以原子式为最小单位。当把省去 n 目组符的原子式解释为原子命题时,属于命题逻辑的范围;当把带有 n 目组符的原子式解释为原子命题时,属于名词逻辑的范围。例如:

331 $(r\rightarrow p)(s\rightarrow r)\rightarrow s\rightarrow p$ 为定理,当把其中的 p、q、r 解释为基础命题时,为命题逻辑充分条件关系传递律;

331 $[r(x)\rightarrow p(x)][s(x)\rightarrow r(x)]\rightarrow s(x)\rightarrow p(x)$,为 ***Cn*** 定理,当把其中的 p、q、r 解释为大、小、中词,把 p(x)、q(x)、r(x) 解释为开原子命题时,则为名词逻辑内涵三段论。

由于关于 ***Cm*** 的充要条件定理、置换定理、亚演绎定理与是否分析原子式的内部结构无关,因此,和上述诸定理的陈述完全相同的定理就分别成了关于 ***Cn*** 的充要条件定理、置换定理、亚演绎定理。正由于此,我们就采用完全相同的名称和代号。

Cn 的无矛盾性。可以在 ***Cn*** 和 ***Cm*** 之间建立下述语构的对应关系:消去 ***Cn***

原子式中的目符，将 ***Cn*** 的原子式和 ***Cm*** 命题变元号相对应。这样一来，***Cn*** 的任意的形式定理必定对应 ***Cm*** 的相应的形式定理。由于 ***Cm*** 是不矛盾的（**A**、¬**A** 中至少有一不可证），所以，***Cn*** 也是不矛盾的。这就证明了的 ***Cn*** 无矛盾性。

Cn 的无衍性。鉴于 ***Cm*** 是无衍系统：若 ⊢**A**⇀**B** 则 **A**⇀**B** 必定不是衍式，**A**、**B** 中必定含有共同的命题变元。故而，对于 ***Cn*** 来说，若 ⊢**A**⇀**B**，则 **A**、**B** 中必定含有共同的原子式，因此，**A**、**B** 中必定含有共同的个体变元。这个结果可以称为 ***Cn*** 无衍性定理。

16.3　*Cn* 的形式定理、导出规则和元定理（1）

这里要介绍的是从语构上说与 n 元名词号、项符有关因而从语义上说与 n 元关系、项有关的 ***Cn*** 定理。这些定理应纳入项逻辑的范围。

为了节省笔墨，此后在公式证明的每一步之后的附注中，只写出公式、公理的番号，不再写公式、公理的名称。

16.3.1　论域公式

在 ***Cm*** 中有公式 5 ⊢**A**⇀**A**，相应地，在 ***Cn*** 中有：

公式 200. ⊢**U**（**a**）　　项 **a** 在论域 **U** 中。

证明：

（1）	⊢**p**（**a**）⇀**p**（**a**）	（公式 5）
（2）	⊢**U**（**a**）	（（1），**U**（**a**）的定义）

Q. E. D

这个 ***Cn*** 公式 **U**（**a**）就称为论域公式。从语义上说，**U** 的含义为论域，**U**（**a**）的含义为项 **a** 在论域 **U** 中，因此恒真。当代形式逻辑把符号串 **U**（**a**）⇀、**U**（**a**）！当做与联结号并列的 ***Cn*** 中的算子使用。**U**（a）⇀**A**（a）、**U**（a）！ **A**（a）的含义分别是“**a** 在 **U** 中必定 **a** 满足 **A**”、“**a** 在 **U** 中可以 **a** 满足 **A**”，上述含义可分别简化为“必然 **A**（**a**）”、“可能 **A**（**a**）”。这里的“必然”、“可能”与传统形式逻辑中讨论的“必然”、“可能”相一致，与数理逻辑中各种各样模态逻辑的“模态”全然不同。

在 ***Cn*** 中，较为常用的算子是 **U**（**x**）⇀、**U**（**x**）！ 和 **U**（**e**）⇀、**U**（**e**）！，尤其是前面一对常用。如果姑且不去区分语义上的重大差异，***Cn*** 中的上述算子与正统一阶谓词演算 ***F*** 中的量词做纯语构的对照，有以下对应关系。

Cn 的算子	***F*** 的算子
U（**x**）⇀	∀**x**

$\mathbf{U(x)!}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\exists\mathbf{x}$

从语构上说，***Cn*** 的这些算子作为 ***Cn*** 的符号串，当其单独出现时是不合适的，只有当在后面紧跟一个式时才是合适的。对于这一点，***Cn*** 的这些算子与 ***F*** 的量词相一致。可是，二者有实质性的重大差异：

（1）在 ***F*** 的 $\forall\mathbf{x}$、$\exists\mathbf{x}$ 中没有本身是式的部分；在 ***Cn*** 的 $\mathbf{U(x)}\rightharpoonup$、$\mathbf{U(x)!}$ 中不仅含有本身是式的部分 $\mathbf{U(x)}$，而且 $\mathbf{U(x)}$ 还是公式。

（2）不能用任意的项 **a** 对 ***F*** 的 $\forall\mathbf{x}$、$\exists\mathbf{x}$ 中的指导变元 **x** 做代入；但是，***Cn*** 的 $\mathbf{U(a)}$、$\mathbf{U(a)}\rightharpoonup\mathbf{A}$、$\mathbf{U(a)!\,A}$ 不仅全都是式，而且其中的 $\mathbf{U(a)}$ 还是公式。***Cn*** 算子的这些显著特征在 ***Cn*** 的公式的证明过程中将发挥重要作用，使证明的进展非常简便和顺当。

16.3.2 *Cn* 的对偶原理

为了区别 ***Cm*** 中的对偶原理（1），我们称 ***Cn*** 中的对偶原理为"对偶原理（2）"。现在先证明两个预备公式。

公式 201. $\vdash\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{U(x)!}\neg\mathbf{A})$ （！定义$\rightharpoonup$律）

证明：

（1）$\vdash\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg\neg(\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\mathbf{A})$ （公式 10）

（2）$\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{A}$ （公理 1）

（3）$\vdash\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg\neg(\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{A})$ （（1）、（2），置换定理）

（4）$\vdash\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{U(x)!}\,\neg\mathbf{A})$ （（3），！的定义）

Q. E. D

公式 202. $\vdash\mathbf{U(x)!A}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})$ （$\rightharpoonup$定义！律）

证明：

（1）$\vdash\mathbf{U(x)!A}\rightleftharpoons\mathbf{U(x)!A}$ （公式 6）

（2）$\vdash\mathbf{U(x)!A}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})$ （（1），！的定义）

Q. E. D

若可以含有被定义联结号或算子的 ***Cn*** 的式 **A** 中最多只包含$\neg$、$\vee$、$\wedge$、$\upharpoonright$、!、$\rightharpoonup$等 6 种联结号和两种算子 $\mathbf{U(a)}\rightharpoonup$、$\mathbf{U(a)!}$（在其中出现的$\rightharpoonup$、！不再当做联结号，$\mathbf{U(a)}$不再当做式），且 **B** 为在 **A** 中出现的不含有联结号 $\rightharpoonup$的不能再长的子式，则称 **B** 为 **A** 的无充子式。若 **B**、**C** 为 **A** 的无充子式且 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ 在 **A** 中出现，则称 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ 为 **A** 的后充子式。若 **D** 为 **A** 的无充子式且不在 **A** 的后充子式中出现，则称 **D** 为 **A** 的孤立子式。$\mathbf{B}^{\circ}$为将在 **A** 的无充子式 **B** 中出现的$\vee$与$\wedge$、$\upharpoonright$与!、$\mathbf{U(a)}\rightharpoonup$与 $\mathbf{U(a)!}$ 互相替代后而得。若 $\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C}$ 为 **A** 的后充子式，

则称 **C°⇁B°** 为 **A** 的相应的对偶后充子式；若 **D** 为 **A** 的孤立子式，则称 ¬**D°** 为 **A** 的相应的对偶孤立子式 。若 $\mathbf{A}^d$ 为将在 **A** 中出现的后充子式 **B⇁C**、孤立子式 **D** 分别换以相应的对偶后充子式 **C°⇁B°**、对偶孤立子式的¬**D°** 而得，则称 $\mathbf{A}^d$ 为 A 的对偶式。

［**对偶定理(2)**］若 $\mathbf{A}^d$ 为 **A** 的对偶式，$\mathbf{A}^d_{\neg}$ 为把 $\mathbf{A}^d$ 中的全部原子式换以其否定而得，则 ├**A**⇌$\mathbf{A}^d_{\neg}$。

根据证明 ***Cm*** 中的对偶原理(1)的依据和公式 201、公式 202，施归纳于 **A** 的层，就可以证明对偶定理(2)。

［**对偶原理(2)**］├**A** 当且仅当 ├$\mathbf{A}^d$，其中，$\mathbf{A}^d$ 为 **A** 的对偶式。

由 ***Cn*** 的对偶定理(2)，加上⇌的定义、公理 7 合取分解律(ⅰ)和分离规则便可证明对偶原理(2)。

为了阐述 ***Cn*** 的对偶原理(2)的用法，我们先证明下面的公式。

公式 203. ├(**U**(**x**)⇁**A**)⇁ **A** (**若必然 A 则 A 律**)

证明：

(1) ├**U**(**x**)　　　　(公式 200)

(2) ├ (**U**(**x**)⇁**A**)⇁(**U**(**x**)⇁**A**)　　　　(公式 5)

(3) ├((**U**(**x**)⇁**A**)⇁(**U**(**x**)⇁**A**))⇁**U**(**x**)⇁(**U**(**x**)⇁**A**)⇁**A**

　　　　(公理 2)

(4) ├**U**(**x**)⇁(**U**(**x**)⇁**A**)⇁**A**　　　　((2)、(3))，分离)

(5) ├(**U**(**x**)⇁**A**)⇁**A**　　　　((1)、(4)，分离)

Q. E. D

当应用 ***Cn*** 的对偶原理(2)时，式(**U**(**x**)⇁**A**)⇁**A** 的无制子式为(**U**(**x**)⇁**A**、**A**(提请注意，这时的符号串 **U**(**x**)⇁看做不可分割的算子)，其相应的对偶中制子式为 **A**⇁**U**(**x**)!**A**。因此，据对偶原理(2)即可得：

公式 204. ├**A**⇁**U**(**x**)!**A**　　　　(若 **A** 则可能 **A** 律)

证明：

(1) ├(**U**(**x**)⇁**A**)⇁**A**　　　　(公式 203)

(2) ├ **A**⇁**U**(**x**)!**A**　　　　((1)，对偶原理(2))

Q. E. D

公式 204 也可以从公式 203 应用 ***Cm*** 的对偶原理(1)再辅之以其他依据得出。此时，式(**U**(**x**)⇁**A**)⇁ **A** 应视为{[p(x)⇁p(x)]⇁ **A**}⇁ **A**，其无充子式为前后出现的两个 p(x)和两个 **A**，后充式为 p(x)⇁p(x)，即 **U**(**x**)，而前后出现的两个 **A** 则为孤立子式，故，其对偶后充式为 p(x)⇁p(x)，对偶孤立子式为两

个$\neg$**A**,其对偶式为{[p(x)$\rightharpoonup$p(x)]$\rightharpoonup\neg$**A**}$\rightharpoonup\neg$**A**。但是,应用 ***Cm*** 的对偶原理(1)进行证明时,不会带来什么方便。

符号串 **U**(**x**)$\neg$、**U**(**x**)! 在下述情况下作为不可分的整体:作为语义的把握时理解为"必然"、"可能";运用 ***Cn*** 的对偶原理(2)时作为 1 元算子(其辖域中出现 1 个式)。在此外的作为纯语构的变元时,则分解为公式 **U**(**a**)和非正统联结号$\neg$、!。在不同的场合下可分可合,灵活运用。是分是合,完全取决于在不同场合下的需要和方便。

16.3.3 代入定理

引理 若$\vdash$**A**(x),则$\vdash$**A**(x)[a]。

证明:据 ***Cm*** 的亚演绎定理,***Cn*** 有:若$\vdash$**T**(x)$\rightharpoonup$**A**(x),则$\vdash$**T**(x)$\rightharpoonup$**A**(x),其中,**T**(x)为 $\mathbf{T}_1$(x) $\wedge\cdots\wedge$ $\mathbf{T}_n$(x),$\mathbf{T}_i$(x)($1\leqslant i\leqslant n$)为公理。由于 ***Cn*** 采用公理模式,故而,把在$\vdash$**T**(x)$\rightharpoonup$**A**(x)的证明中出现的 $\mathbf{T}_i$(x)、**A**(x)变换成 $\mathbf{T}_i$(x)[a]、**A**(x)[a],就成了$\vdash$**T**(x)[a]$\rightharpoonup$**A**(x)[a]的证明,后者具有前者的形;因此,若$\vdash$**T**(x)$\rightharpoonup$**A**(x),则$\vdash$**T**(x)[a]$\rightharpoonup$**A**(x)[a]。据 ***Cm*** 亚演绎定理,***Cn*** 有:若$\vdash$**T**(x)[a]$\rightharpoonup$**A**(x)[a],则$\vdash$**A**(x)[a]。所以:若$\vdash$**A**(x),则$\vdash$**A**(x)[a]。

若 **A**′为 **A**($\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$)[$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$],则称 **A**′为 **A** 的例。

[代入定理] 若$\vdash$**A**,则$\vdash$**A**′,其中,**A**′为 **A** 的例。

证明:设 $\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_n$ 为 n 个不在 **A** 或 **A**′出现的新变元,逐次使用引理,若$\vdash$**A**,则相继地有:

$$\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{y}_1],\ \vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2],\cdots,$$
$$\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)[\mathrm{y}_1,\cdots,\mathrm{y}_n]$$

我们从最后一个公式开始,再逐次使用引理,相继地有:

$$\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)[\mathbf{a}_1,\mathbf{y}_2,\cdots,\mathbf{y}_n]$$
$$\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{y}_n]$$
$$\vdots$$
$$\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$$

这里之所以要引用新变元 $\mathrm{y}_1,\cdots,\mathrm{y}_n$ 就是为了保证通过逐次代入得出的确实是:

$$\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$$

16.3.4 分配公式与分配规则

1. 分配公式

公式 205. $\vdash$(**A**$\rightharpoonup$**B**)$\rightharpoonup$(**U**(**x**)$\rightharpoonup$**A**)$\rightharpoonup$**U**(**x**)$\rightharpoonup$**B** (分配公式(1))

这是公理 3 的特殊情况,即特例。

公式 206. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{B}$　　（分配公式（2））

证明：

（1）$\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{A}$　　（公式 205）

（2）$\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{B}$　　（（1），对偶原理（2））

Q. E. D

2. 分配规则

Ⅷ. 分配规则（ⅰ）

$\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\vdash\!\!\!-\ \vdash(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B}$

证明：

（1）$\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B}$　　（公式 205）

（2）$\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$　　（题设）

（3）$\vdash(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B}$　　（（1）、（2），分离）

Q. E. D

Ⅸ. 分配规则（ⅱ）

$\vdash A\rightharpoonup B\vdash\!\!\!-\ \vdash(U(\mathbf{x})!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{B}$

证明：

（1）$\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{B}$　　（公式 206）

（2）$\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$　　（题设）

（3）$\vdash(\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})!\mathbf{B}$　　（（1）、（2），分离）

Q. E. D

对正统的一阶谓词演算系统来说：成立分配规则，却不成立分配公式。譬如，$(x=x\rightarrow x=0)\rightarrow\forall x(x=x)\rightarrow\forall x(x=0)$ 不恒真，当 $x=0$ 时为假。然而，对于建立在非正统的命题演算当代形式逻辑系统 ***Cm*** 的基础上的名词演算 ***Cn*** 系统来说，成立 $\vdash(x=x\rightharpoonup x=0)\rightharpoonup(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup x=x)\rightharpoonup\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup x=0$，因为，此公式中，没有 x 的自由出现，从语义上说，它只有一个确定的意思：若 $x=x$（竟然）是 $x=0$ 的充分条件，则 x 在论域中必定 $x=x$（将该）是 x 在论域中必定 $x=0$ 的充分条件（啦）。为了尽量接近自然语言，我们把 $\rightharpoonup$ 在不同的场合分别读做"若，则"、"……是……的充分条件"、"必定"，并在适当的地方加入括弧的"竟然"、"将该"、"啦"。显然这是真语句。此语句为真，就与"若木头（竟然）是金属，则木头（将该）是导电的（啦）"为真一样。这些地方，务必请习惯于正统的一阶谓词演算的人们注意。

16.3.5 闭包定理

引理 $\vdash(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}$。

这就是公式 203。

令 **A** 为式，x_1，⋯，x_n 为按字母顺序排列的在 **A** 中自由出现的个体变元，则称

$\mathbf{U}(x_1)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A}$

为 **A** 的闭包。

显然，当 **A** 为 n 元开式时，**A** 的闭包 **A**′必为闭式。这就是闭包这个名称的由来。

［**闭包定理**］ $\vdash(\mathbf{U}(x_1)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}$。

证明：

据引理，有：

$\vdash(\mathbf{U}(x_1)\rightharpoonup\mathbf{U}(x_2)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup(\mathbf{U}(x_2)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})$,

$\vdash(\mathbf{U}(x_2)\rightharpoonup\mathbf{U}(x_3)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup(\mathbf{U}(x_3)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})$,

⋮

$\vdash(\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}$。

逐次使用传递规则，即得

$$\vdash(\mathbf{U}(x_1)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup\mathbf{U}(x_n)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}$$

闭包定理的含义：n 个变元全部都必然满足 **A** 是 **A** 的充分条件。

据上述定理，使用对偶原理(2)，即可得出：

$$\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{U}(x_1)\ !\ \cdots\ !\ \mathbf{U}(x_n)\ !\ \mathbf{A}。$$

此定理的含义：**A** 是 n 个变元全都可能满足 **A** 的充分条件。

上述定理不以原子式为对之不进行分析的最小单位，深入到项，因此只属于名词逻辑的范围。至此，当建立了名词演算 ***Cn*** 系统后，命题演算 ***Cm*** 系统可以看做是当不深入到项而以原子式为对象对其进行分析的最小单位并从而略取其目符时的 ***Cn*** 的特殊情况。

下面，还要结合关于 ***Cn*** 系统的讨论继续给出并证明 ***Cn*** 的一系列形式定理。

第 17 章 关于 *Cn* 系统的讨论(一)——*Cn* 与传统形式逻辑

鉴于传统直言命题理论至今还存在种种逻辑理论上的问题,为了便于讨论 *Cn* 与传统形式逻辑的关系,我们先讨论当代形式逻辑是如何解决传统直言命题理论中存在的问题的。

17.1 当代形式逻辑对传统直言命题理论问题的解决

17.1.1 传统直言命题理论中存在的问题

传统直言命题作为“命题形式”其逻辑语义没有规定清楚,逻辑结构尚未完全定型,因而至今还存在种种逻辑理论上的问题。

(1)主词是否可空?这个问题在传统形式逻辑界迄今还有争议。有一种意见认为传统的特称命题要求主词 s 存在,认为,当 s 为空词时,特称命题便假。可是,按照这种意见,“有些哥德巴赫猜想的解决者是中国人”,“有些哥德巴赫猜想的解决者不是中国人”便都是假的了。传统的全称命题是否也要求主词 s 存在,至今尚有争议。例如,“所有哥德巴赫猜想的解决者都是数学家”究竟是真是假,仍有不同的看法。又一种意见则认为传统的直言命题只处理实名词,主词 s 一空便无意义,亦即,像“所有哥德巴赫猜想的解决者都是数学家”这样的直言命题到底是真是假,传统逻辑说不清楚。

(2)当主词 s 的外延是无限集、不可逐一列举的有限集或空集时,全称量词“所有” 和特称量词“有些”究竟是什么意思?是不是仍然还是“每一个”、“至少有一个”?如果是,那么全称命题“凡人皆有死”即“每一个人皆有死”,须等到世界上所有人都死掉以后才能确定其为真,而特称命题“有些桌子是十七边形的”(即“至少有一张桌子是十七边形的”)至今无法确定其为假。传统逻辑在逻辑理论上引入所谓逻辑量词,势必导致在认识过程中对不可逐一列举域探究每一个个体。显然,要确定不可逐一列举域的每一个(全称量词)个体有某种性质为真,至少有一个(特称量词)个体有某种性质为假(即每一个个体无某种性质为真),那确实是超乎精力和生命都有限的人类的能力的。如此,倘若有逻辑量词,就不能确定关于不可逐一列举域的真知。可是,在已为人类确定的关于不可逐一列举域的真知中根本就没有逻辑量词(当然,在语言载体中可以有语言量

词)。自然,当主词 s 为空集时,“逻辑量词”更显得荒唐。

(3)所谓“系词”,其语义也不清楚。传统逻辑认为在逻辑结构中有肯定、否定逻辑系词。从而认为“直言命题”有既对立又并列的肯定、否定之分。这是受在某些自然语句中出现的肯定、否定语言系词的迷惑而造成的。从逻辑结构上说,不仅在多元关系命题中没有什么逻辑系词,即使在所谓的“直言命题”(其实是从原子命题出发的复合命题)中也并无逻辑系词。从逻辑上说,任何命题都是肯定的,无论是原子命题还是复合命题;否定命题(最后联结词为否定词)是一类复合命题(任何原子命题都不是否定命题);毫不例外,作为一类特殊的复合命题的否定命题当然也是肯定的,从逻辑结构上说。“否定”是 1 元联结词,“肯定”则不是联结词,而是为任何命题所必具的逻辑性质(命题倘无此性质,那还有什么真假可言);因此,此二者之间既不对立又不并列。

(4)传统全称肯定命题 **A** 命题的宾词是否可周延?有的认为“可以周延”,有的认为“不周延”,至今争论不休。可是究竟何谓“周延”,何谓“不周延”,也是规定不清楚的。如果“断定主词(或宾词)的全部外延”为“周延”,“只断定主词(或宾词)的外延的真子部分”为“反周延”,那么传统逻辑的“不周延”就是“断定主词(或宾词)的全部外延或断定其外延的真子部分”,亦“不周延”应为“周延或反周延”。这样一来,“周延”就是“不是反周延的不周延”。于是,“周延是不周延”,“不周延有时周延”。这就像“汉人是黄种人”、“黄种人有的是汉人”一样自然了。

17.1.2 当代形式逻辑对传统直言命题理论问题的解决

以上长期争论不休、久悬未决的难题,当代形式逻辑给予了确定而又合理的解决。下面,我们按照 **A**、**E**、**I**、**O** 的顺序阐述当代形式逻辑对上述难题的处理。

1. 关于 A 命题

A 命题的句型为“所有 s 是 p”,在传统逻辑中的符号表达式为“s**A**p”。相对于为其所思考的事件的逻辑结构,如下四例大致相应于 s**A**p。

(1)所有参加撰写本书的人都是黄种人。

(2)凡人皆有死。

(3)所有天体都是运动的。

(4)哥德巴赫猜想的解决者都是数学家。

这四个实例代表了四类不同的命题。第 1 个实例,由于“参加撰写本书的人”为可逐一列举的有限集,所以它是一个外延命题,其真值是可确定的。由于迄今世界上的人是不可逐一列举的有限集,“天体”是无限集,因此在传统直言命题中,第 2、3 个命题是否为真取决于“凡”、“所有”的逻辑语义,倘为“外延合

取”,则迄今无法确定。第 4 个实例,其主词所思考的是空集。在传统形式逻辑中,当 s 思考空集时,sAp 究竟如何处理,至今久悬未决,因此其真假更无法确定。

当代形式逻辑对上述四类命题已有确定而合理的解决,当代形式逻辑将传统直言命题 s**A**p 二分为外延合取命题和内涵充分条件假言命题。依据在当代形式逻辑中的逻辑语义和经验内容,第 1、2、3、4 个实例都能确定为真。第 1 个命题的式为:

$$p(e_1) \wedge p(e_2) \wedge \cdots \wedge p(e_i) \wedge \cdots \wedge p(e_m)$$

属于客体说形式逻辑中“以 *m* 个闭 1 元原子命题为合取支的闭合取命题”,简称“外延合取命题”,其句型为“每一个可逐一列举的 s 是 p”。第 2、3、4 个命题的式为:

$$s(x) \rightarrow p(x) \text{或} \neg(s(x)\,!\,\neg p(x))$$

属于当代形式逻辑中的“以开 1 元原子命题为前、后件的闭充分条件假言命题”或“以开 1 元原子命题和开 1 元原子命题的否定为约合肢的闭约合命题的否命题”,简称“内涵充分条件假言命题”,亦可称做“内涵必定命题”,其自然语言的句型为“s 必定 p”或“s 不可以不 p”。

2. 关于 E 命题

E 命题的句型为“所有 s 不是 p”。在传统形式逻辑中的符号表达式为 s**E**p。相对于为其所思考的事件的逻辑结构,如下四例大致相应于 s**E**p:

(5) 所有参加撰写本书的人都不是白种人。

(6) 所有兰花都不是风媒的。

(7) 凡天体都不是静止不动的。

(8) 哥德巴赫猜想的解决者不是文盲。

此四个实例也代表四类不同的命题。第 5 个实例是一个外延命题,由于参加撰写本书的人可逐一列举,故其真值为真可以确定。第 6 个实例,兰花不可逐一列举,迄今,虽然兰花是有限的,但人们弄不清楚究竟有多少种;第 7 个实例的“天体”为无限集;因此在传统形式逻辑直言命题中,第 6 个和第 7 个命题是假是真,最终取决于“所有”、“凡”的逻辑语义,若为“外延合取”则迄今无法确定。第 8 个实例,在传统逻辑中,因为 s 思考空集,故而其真假亦无法确定。

当代形式逻辑对这四类命题也有确定而合理的解决。当代形式逻辑将 s**E**p 二分为外延合取命题和内涵充分条件假言命题。依据在当代形式逻辑中的逻辑语义和经验内容,上述四类实例都能确定为真。第 5 个命题的式为:

$$\neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(e_i) \wedge \cdots \wedge \neg p(e_m)$$

属于当代形式运辑中“以 *m* 个闭 1 元原子命题的否定为合取肢的闭合取命

题”，简称“外延合取命题”，其句型为“每一个可逐一列举的 s 不是 p”。第 6、7、8 个命题的式为：

$$s(x)\rightharpoonup\neg p(x)\text{或}\neg(s(x)!\ p(x))$$

属于当代形式逻辑中的“以开 1 元原子命题、开 1 元原子命题的否定为前、后件的闭充分条件假言命题”或“以开 1 元原子命题为约合肢的闭约合命题的否定命题”，简称“内涵充分条件假言命题”，也可称做“内涵必定命题”，其自然语言的句型为“s 必不 p”或“s 不可以 p。”

3. 关于 I 命题

I 命题的句型为“有 s 是 p”，在传统逻辑中符号表达式为 s**I**p。相对于为其所思考的事件的逻辑结构，如下五例大致相应于 s**I**p。

(9) 有些参加撰写本书的人是黄种人。

(10) 有些参加撰写本书的人是贵阳人。

(11) 有的桌子是十七边形的。

(12) 有天体是静止不动的。

(13) 有哥德巴赫猜想的解决者是中国人。

这代表了五类不同的命题。第 9 个例子和第 10 个例子只是主、宾词所思考的外延的关系不一样。第 9 个例子中，事实上全体参加撰写本书的人都是黄种人，第 10 个例子中，事实上只有部分参加撰写本书的人是贵阳人。此二例中“参加撰写本书的人”皆为可逐一列举的有限集，它们都是外延命题，其真值是可确定的。第 11 个和 12 个实例，由于至今为止的桌子是不可逐一列举的有限集，天体是无限集，因此，在传统形式逻辑中“有的桌子是十七边形的”和“有天体是静止不动的”是否为假，取决于“有的”的逻辑语义，倘为外延的，则迄今无法确定（因为这等于逐一确定“每一张桌子都不是十七边形的”和“每一个天体都不是静止不动的”为真）。第 13 个实例，s 为空词，究竟是真是假，传统形式逻辑无法确定。

当代形式逻辑对上述五种命题亦有确定而合理的解决。当代形式逻辑将 s**I**p 二分为外延析取命题和内涵约合命题。依据在当代形式逻辑中的逻辑语义和经验内容，第 9、10、11、12、13 个实例都能确定为真。第 9、10 个命题的式为：

$$p(e_1)\vee p(e_2)\vee\cdots\vee p(e_i)\vee\cdots\vee p(e_m)$$

属于当代形式逻辑中“以 m 个闭 1 元原子命题为析取肢的闭析取命题”，简称“外延析取命题”，其句型为“可逐一列举的 s 中至少有一个是 p”。第 11、12、13 个命题的式为：

$$S(x)!\ p(x)\ \text{或}\neg(s(x)\rightharpoonup\neg p(x))$$

属于当代形式逻辑中“以开 1 元原子命题为约合肢的闭约合命题”或“以开 1 元原子命题、开 1 元原子命题的否定为前、后件的闭充分条件假言命题的否定命题”。简称“内涵约合命题”,其句型为“s 可以 p”或“s 未必不 p”。

4. 关于 O 命题

O 命题的句型为“有 s 是 p”,在传统形式逻辑中符号表达式为 s**O**p。为其所思考的事件的逻辑结构,如下五例大致相应于 s**O**p:

(14) 有些参加撰写本书的人不是白种人。

(15) 有些参加撰写本书的人不是贵阳人。

(16) 有的桌子不是非十七边形的。

(17) 有些天体不是运动的。

(18) 有的哥德巴猜想的解决者不是美国人。

这代表了五类不同的命题。第 14 和第 15 个例子只是主宾词所思考的外延的关系不一样,第 14 个例子事实上全体参加撰写本书的人不是白种人,第 15 个例子只有部分参加撰写本书的人不是贵阳人:此二例中“参加撰写本书的人”皆为可逐一列举的有限集,它们都是外延命题,其真值是可以确定的。第 16 个例子和 17 个例子,由于迄今的桌子是不可逐一列举的有限集,天体是无限集,因此在传统形式逻辑中,这两例是否为假,取决于“有些”、“有的”的逻辑语义,倘为外延的,则迄今无法确定。第 18 个例子,由于主词为空词,故传统形式逻辑无法确定其真假。

当代形式逻辑对上述五类命题的确定而合理的解决方案是将其二分为外延析取命题和内涵约合命题。依据在当代形式逻辑中的逻辑语义和经验内容,五类实例都能确定为真。第 14、15 个命题的式为:

$$\neg p(e_1) \vee \neg p(e_2) \vee \cdots \neg p(e_i) \vee \cdots \neg p(e_m)$$

属于当代形式逻辑中“以 m 个闭 1 元原子命题的否定为析取肢的闭析取命题”,简称“外延析取命题”。其句型为“可逐一列举的 s 中至少有一不是 p”。第 16、17、18 个命题的式为:

$$s(x)\,!\neg p(x) \text{ 或} \neg(s(x) \rightharpoonup p(x))$$

属于当代形式逻辑中“以开 1 元原子命题、开 1 元原子命题的否定为约合肢的闭约合命题”或“以开 1 元原子命题、开 1 元原子命题为前、后件的闭充分条件假言命题的否定命题”,其句型为“s 可以不 p”或“s 未必 p”。

应当说明的是,上述 18 个实例,未必能为传统直言命题全部容纳。因此,不能简单地认为每一种直言命题就是相应的外延命题和内涵命题的综合。如前所述,传统直言命题作为“命题形式”至今还存在种种逻辑理论上的问题。

17.1.3 传统直言命题和与之相应的外延命题、内涵命题之间的区别

为了对比传统逻辑中的直言命题和与之相应的外延命题、内涵命题之间的区别，我们以全称肯定命题和与之相应的外延合取命题、内涵充分条件假言命题为例进行说明。

（1）传统全称肯定命题的句型为“所有 s 都是 p”，符号表达式为“s**A**p”，其主词 s 的外延集的元未必可逐一列举，而对 s 的外延可否为空集至今仍有争议；外延合取命题的句型是“每一个可逐一列举的 s 是 p”，符号表达式为：

$$p(e_1)\wedge p(e_2)\wedge\cdots\wedge p(e_i)\wedge\cdots\wedge p(e_m)$$

其主词 s 的外延集为 $S=(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_m)$，$m$ 为大于零的确定的自然数，从 e_1 到 e_m，可逐一列举；内涵充分条件假言（必定）命题的句型为“s 必定 p”，符号表达式为 s(x)→p (x)，其中 s 的外延为其元不可逐一列举的有限集、无限集或空集。

（2）在传统命题的分类中，传统全称肯定命题为简单命题、直言（或性质）命题、全称命题、肯定命题；而外延合取命题和内涵充分条件假言（必定）命题皆为复合命题，无所谓“直言（性质）”与否，无所谓“全称”、“特称”、“肯定”、“否定”。

（3）传统全称肯定命题含有全称量词（这是受惑于语言量词）；而外延合取命题和内涵充分条件假言命题无任何量词（这是着眼于客观世界逻辑结构的结果）。

（4）传统全称肯定命题一律带有肯定系词“是”，而不管陈述的语句是否使用“是”字；外延合取命题和内涵充分条件假言（必定）命题都以 n 元关系及其辖域和联结词来体现逻辑结构，一律无所谓系词。

（5）传统全称肯定命题的主词 s 周延，对宾词 p 通常认为不周延，但至今仍有争议；外延合取命题和内涵充分条件假言（必定）命题无所谓周延不周延。

（6）在分析深度方面，传统形式逻辑对全称肯定命题的分析，以 1 元名词为最小单位（实质上是以原子命题为最小单位），不对之做进一步分析；当代形式逻辑在分析外延合取命题和内涵充分条件假言（必定）命题时，则对原子命题做更深入的分析，从中分析出 n 元名、n 元函数词、个体变元词、个体词来。

（7）在形式化程度方面，传统全称肯定命题表达式中的字母“A”只不过是“所有……是……”（即全称量词和肯定系词）的一种带有“简称”性质的代号，故而形式化不彻底；当代形式逻辑对命题的形式化则全部采用人工符号，按严格的形成规则编写，能揭举命题的逻辑结构，形式化彻底。

最后，我们要指出的是，四种外延命题和主词可空而不自相矛盾的四种内涵

命题全都满足对当关系等传统推理格式。当然,关于四种外延命题对主词只要求其为实名词。然而,关于四种内涵命题,则对主词只要求其不自相矛盾,但可为空名词。十分显然,自相矛盾的名词一定是空的,但空名词未必自相矛盾。例如,迄今,“哥德巴赫猜想的解决者”是空的,但并不自相矛盾。一名词是否空,一般说来,逻辑科学确定不了;可是,确定一名词是否自相矛盾,则是逻辑科学责无旁贷的责任。我们以主词为空名词“哥德巴赫猜想的解决者”的四种内涵命题满足对当关系为例,说明主词为空但不自相矛盾的四种内涵命题完全满足全部传统推理格式,其逻辑方阵如图 17. 1 所示。

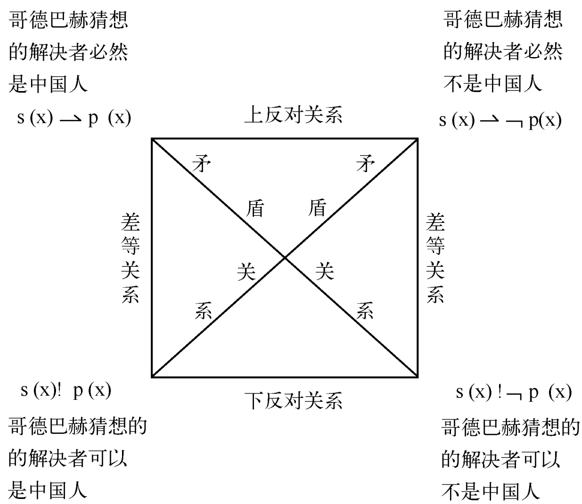


图 17. 1　逻辑方阵

可见,那种认为传统形式逻辑是实名词逻辑的观点是对传统形式逻辑的莫大误解。

17. 2　当代形式逻辑对传统直接推理、间接推理理论问题的解决

由于传统的直言命题实际上是外延命题和内涵命题的混沌的混合体,因此,建立在直言命题上的传统的名词逻辑实际上是外延名词逻辑和内涵名词逻辑的混沌的混合体,其所提供的只能说是有时未必出新知的推导格式,而不能说全都是能出新知的推理格式:当在其中出现的是外延命题(即是外延名词逻辑)时为本质上是同语反复的不能得出新知的导出式,只有在其中出现的是内涵命题(即是内涵名词逻辑)时才是能得出新知的推理式。

17.2.1 关于传统直接推导

1. 外延的对当关系和换质、换位导出式

根据主词 s 是否思考可逐一列举的有限集,传统命题二分为外延命题和内涵命题。当主词 s 思考可逐一列举的有限集时,传统直言命题对应于当代形式逻辑中的外延命题,被称为“直接推理”的所谓传统名词逻辑对当关系,换质、换位推理格式全部对应于当代形式逻辑导出式,不能据以从已知得出新知。

1)外延对当关系导出式

当主词 s 所思考的是可逐一列举的有限集时,所谓对当关系推理格式全部是当代形式逻辑的命题逻辑导出式。为便于理解,设 $S=\{e_1,e_2\}$,我们在下面左边列出传统格式,右边列出与其相对应的当代形式逻辑导出式。

Ⅰ. 外延上反对关系导出式。

(1) $s\mathbf{A}p\rightarrow\neg(s\mathbf{E}p)$ $p(e_1)\wedge p(e_2)\rightarrow\neg(\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2))$

(2) $s\mathbf{E}p\rightarrow\neg(s\mathbf{A}p)$ $\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)\rightarrow\neg(\neg p(e_1)\wedge p(e_2))$

Ⅱ. 外延下反对关系导出式。

(3) $\neg(s\mathbf{I}p)\rightarrow s\mathbf{O}p$ $\neg(p(e_1)\vee p(e_2))\rightarrow\neg p(e_1)\vee\rightarrow p(e_2)$

(4) $\neg(s\mathbf{O}p)\rightarrow s\mathbf{I}p$ $\neg(\rightarrow p(e_1)\vee\neg p(e_2))\rightarrow p(e_1)\vee p(e_2)$

Ⅲ. 外延差等关系导出式。

(5) $s\mathbf{A}p\rightarrow s\mathbf{I}p$ $p(e_1)\wedge p(e_2)\rightarrow p(e_1)\vee p(e_2)$

(6) $\neg(s\mathbf{I}p)\rightarrow\neg(s\mathbf{A}p)$ $\neg(p(e_1)\vee p(e_2))\rightarrow\neg(p(e_1)\wedge p(e_2))$

(7) $s\mathbf{E}p\rightarrow s\mathbf{O}p$ $\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)\rightarrow\neg p(e_1)\vee\neg p(e_2)$

(8) $\neg(s\mathbf{O}p)\rightarrow\neg(s\mathbf{E}p)$ $\neg(\neg p(e_1)\vee\neg p(e_2))\rightarrow\neg(\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2))$

Ⅳ. 外延矛盾关系导出式。

(9) $s\mathbf{A}p\rightleftharpoons\neg(s\mathbf{O}p)$ $p(e_1)\wedge p(e_2)\rightleftharpoons\neg(\neg p(e_1)\vee\neg p(e_2))$

(10) $s\mathbf{O}p\rightleftharpoons\neg(s\mathbf{A}p)$ $\neg(e_1)\vee\neg p(e_2)\rightleftharpoons\neg(p(e_1)\wedge p(e_2))$

(11) $s\mathbf{E}p\rightleftharpoons\neg(s\mathbf{I}p)$ $\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)\rightleftharpoons\neg(p(e_1)\vee p(e_2))$

(12) $s\mathbf{I}p\rightleftharpoons\neg(s\mathbf{E}p)$ $p(e_1)\vee p(e_2)\rightleftharpoons\neg(\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2))$

2)外延换质、换位导出式

当主词所思考的是可逐一列举的有限集时,所谓换质、换位推理格式也全部是当代形式逻辑的命题逻辑导出式。下面列在左边的是传统格式,右边的是与其相对应的当代形式逻辑导出式。

Ⅰ. $s\mathbf{A}p$ 的换质、换位导出式。

设 $S=\{e_1,e_2\}$,$P=\{e_1,e_2,e_3\}$。

(1) $s\mathbf{A}p\rightleftharpoons s\mathbf{E}\sim p$ $p(e_1)\wedge p(e_2)\rightleftharpoons\neg\neg p(e_1)\wedge\neg\neg p(e_2)$

(2) s**A**p$\rightleftharpoons$p**I**s　　　$p(e_1)\wedge p(e_2)\rightarrow s(e_1)\vee s(e_2)\vee s(e_3)$

式(1)中的 ~p 读做“补 p”,是对 p 所思考的集合 P 的补集 $\sim P$ 的思考。下同。

Ⅱ. s**E**p 的换质、换位导出式。

设 $S=\{e_1,e_2\}$,$P=\{e_3,e_4\}$。

(3) s**E**p$\rightleftharpoons$s**A**~p　　　$\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)\rightleftharpoons\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)$

(4) s**E**p$\rightleftharpoons$p**E**s　　　$\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)\rightleftharpoons\neg s(e_3)\wedge\neg s(e_4)$

Ⅲ. s**I**p 的换质、换位导出式。

设 $S=\{e_1,e_2\}$,$P=\{e_2,e_3\}$。

(5) s**I**p$\rightleftharpoons$s**O**~p　　　$p(e_1)\vee p(e_2)\rightleftharpoons\neg\neg p(e_1)\vee\neg\neg p(e_2)$

(6) s**I**p$\rightleftharpoons$p**I**s　　　$p(e_1)\vee p(e_2)\rightleftharpoons s(e_2)\vee s(e_3)$

Ⅳ. s**O**p 的换质导出式。

设 $S=\{e_1,e_2\}$。

(7) s**O**p$\rightarrow$s**I**~p　　　$\neg p(e_1)\vee\neg p(e_2)\rightleftharpoons\neg p(e_1)\vee\neg p(e_2)$

2. 内涵的对当关系和换位推理式、换质导出式

1) 内涵的对当关系推理式

当主词 s 所思考的是不可逐一列举的有限集、空集或无限集时,所谓传统名词逻辑的对当关系推理格式全部是当代形式逻辑的命题逻辑推理式,能据以从已知得出新知。为了顺应传统的习惯,我们在此用 s、p 表示命题变元。下面列在左边的是传统格式,右边是与其相对应的当代形式逻辑推理式。

Ⅰ. 上反对关系推理式。

(1) s**A**p$\rightarrow\neg$(s**E**p)　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[(s\rightarrow p)\rightarrow\neg(s\rightarrow(p)]$ *

(2) s**E**p$\rightarrow\neg$(s**A**p)　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[(s\rightarrow\neg p)\rightarrow\neg(s\rightarrow p)]$ *

Ⅱ. 下反对关系推理式。

(3) $\neg$(s**I**p)$\rightarrow$s**O**p　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[\neg(s!p)\rightarrow(s!\neg p)]$ *

(4) $\neg$(s**O**p)$\rightarrow$s**I**p　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[\neg(s!\neg p)\rightarrow(s!p)]$ *

Ⅲ. 差等关系推理式。

(5) s**A**p$\rightarrow$s**I**p　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[(s\rightarrow p)\rightarrow(s!p)]$ *

(6) $\neg$(s**I**p)$\rightarrow\neg$(s**A**p)　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[\neg(s!p)\rightarrow\neg(s\rightarrow p)]$ *

(7) s**E**p$\rightarrow$s**O**p　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[(s\rightarrow\neg p)\rightarrow(s!\neg p)]$ *

(8) $\neg$(s**O**p)$\rightarrow\neg$(s**E**p)　　　$\neg(s\rightarrow p!\neg p)\rightarrow[\neg(s!\neg p)\rightarrow\neg(s\rightarrow\neg p)]$ *

Ⅳ. 矛盾关系推理式。

(9) s**A**p$\rightleftharpoons\neg$(s**O**p)　　　$(s\rightarrow p)\rightleftharpoons\neg(s!\neg p)$

(10) s**O**p$\rightleftharpoons\neg$(s**A**p)　　　$s!\neg p\rightleftharpoons\neg(s\rightarrow p)$

（11）$s\mathbf{E}p \rightleftharpoons \neg(s\mathbf{I}p)$　　$(s\rightharpoonup\neg p)\rightleftharpoons\neg(s!p)$

（12）$s\mathbf{I}p \rightleftharpoons \neg(s\mathbf{E}p)$　　$s!p\rightharpoonup\neg(s\rightleftharpoons\neg p)$

2）内涵换位推理式、换质导出式

当主词所思考的是不可逐一列举的有限集、空集或无限集时，所谓传统名词逻辑的换位推理格式全部对应于当代形式逻辑的命题逻辑推理式，能据以从已知得出新知。而传统的换质推理格式全部对应于当代形式逻辑的命题逻辑导出式，不能据以从已知得出新知。我们仍用 s、p 表示命题变元。下面列出的，左边为传统格式，右边为当代形式逻辑推导式。

Ⅰ. **A**、**E**、**I**、**O** 的内涵换位推理式。

（1）$s\mathbf{A}p\rightharpoonup p\mathbf{I}s$　　$\neg(s\rightharpoonup p!\neg p)\rightharpoonup[(s\rightharpoonup p)\rightharpoonup p!s]$ *

（2）$s\mathbf{E}p\rightleftharpoons p\mathbf{E}s$　　$(s\rightharpoonup\neg p)\rightleftharpoons(p\rightharpoonup\neg s)$

（3）$s\mathbf{I}p\rightleftharpoons p\mathbf{I}s$　　$s!p\rightleftharpoons p!s$

（4）$s\mathbf{O}p$（不能换位）　　$s!\neg p\rightleftharpoons\neg p!s$（成立对应于 **O** 命题的内涵 $s!\neg p$ 命题的换位推理）

提请注意，传统命题 s**O**p 不能换位，可是，与其相对应的当代形式逻辑的内涵可以命题 s!p 可以换位。

Ⅱ. **A**、**E**、**I**、**O** 的内涵换质导出式。

（1）$s\mathbf{A}p\rightleftharpoons s\mathbf{E}\sim p$　　$(s\rightharpoonup p)\rightleftharpoons(s\rightharpoonup\neg\neg p)$

（2）$s\mathbf{E}p\rightleftharpoons s\mathbf{A}\sim p$　　$(s\rightharpoonup\neg p)\rightleftharpoons(s\rightharpoonup\neg p)$

（3）$s\mathbf{I}p\rightleftharpoons s\mathbf{O}\sim p$　　$s!p\rightleftharpoons s!\neg\neg p$

（4）$s\mathbf{O}p\rightleftharpoons s\mathbf{I}\sim p$　　$s!\neg p\rightleftharpoons s!\neg p$

17.2.2　关于传统三段论

1. 外延三段论的导出式

当主词思考可逐一列举的有限集，传统直言命题对应于当代形式逻辑中相应的外延命题后，作为传统名词逻辑核心的传统三段论格式全部对应于当代形式逻辑的命题逻辑导出式。不能据以从已知得出新知。我们在下面右边列出与三段论的 19 个式相应的当代形式逻辑的命题逻辑导出式。

1）第一格的四个导出式

设在此格作为主词的 s 和 m 所思考的可逐一列举的有限集为：

$$S=\{e_1,e_2\},M=\{e_1,e_2,e_3\}$$

（1）**AAA**　$(p(e_1)\wedge p(e_2)\wedge p(e_3))\wedge(m(e_1)\wedge m(e_2))\rightharpoonup p(e_1)\wedge p(e_2)$

（2）**AII**　$(p(e_1)\wedge p(e_2)\wedge p(e_3))\wedge(m(e_1)\vee m(e_2))\rightharpoonup p(e_1)\vee p(e_2)$

（3）**EAE**　$(\neg p(e_1)\wedge\neg p(e_2)\wedge\neg p(e_3))\wedge(m(e_1)\wedge m(e_2))\rightharpoonup$

$\neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2)$

(4) **EIO**　$(\neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2) \wedge \neg p(e_3)) \wedge (m(e_1) \vee m(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \vee \neg p(e_2)$

2）第二格的四个导出式

设在此格作为主词的 s 和 p 所思考的可逐一列举的有限集为：

$$S = \{e_1, e_2\}, P = \{e_3, e_4\}$$

(5) **AEE**　$(m(e_3) \wedge m(e_4)) \wedge (\neg m(e_1) \wedge \neg m(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2)$

(6) **AOO**　$(m(e_3) \wedge m(e_4)) \wedge (\neg m(e_1) \vee \neg m(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \vee \neg p(e_2)$

(7) **EAE**　$(\neg m(e_3) \wedge \neg m(e_4)) \wedge (m(e_1) \wedge m(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2)$

(8) **EIO**　$(\neg m(e_3) \wedge \neg m(e_4)) \wedge (m(e_1) \vee m(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \vee \neg p(e_2)$

3）第三格的六个导出式

设在此格作为主词的 s 和 m 所思考的可逐一列举的有限集为：

$$M = \{e_1, e_2\},\ S = \{e_1, e_2, e_3\}$$

(9) **AAI**　$(p(e_1) \wedge p(e_2)) \wedge (s(e_1) \wedge s(e_2)) \rightharpoonup p(e_1) \vee p(e_2) \vee p(e_3)$

(10) **AII**　$(p(e_1) \wedge p(e_2)) \wedge (s(e_1) \vee s(e_2)) \rightharpoonup p(e_1) \vee p(e_2) \vee p(e_3)$

(11) **EAO**　$(\neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2)) \wedge (s(e_1) \wedge s(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \vee \neg p(e_2) \vee \neg p(e_3)$

(12) **EIO**　$(\neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2)) \wedge (s(e_1) \vee s(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \vee \neg p(e_2) \vee \neg p(e_3)$

(13) **IAI**　$(p(e_1) \vee p(e_2)) \wedge (s(e_1) \wedge s(e_2)) \rightharpoonup p(e_1) \vee p(e_2) \vee p(e_3)$

(14) **OAO**　$(\neg p(e_1) \vee \neg p(e_2)) \wedge (s(e_1) \wedge s(e_2)) \rightharpoonup \neg p(e_1) \vee \neg p(e_2) \vee \neg p(e_3)$

4）第四格的五个导出式

设在(15)**AAI** 式中作为主词的 s、m、p 所思考的可逐一列举的有限集为：

$$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, M = \{e_1, e_2, e_3\}, P = \{e_1, e_2\}$$

(15) **AAI**　$(m(e_1) \wedge m(e_2)) \wedge (s(e_1) \wedge s(e_2) \wedge s(e_3)) \rightharpoonup p(e_1) \vee p(e_2) \vee p(e_3) \vee p(e_4)$

设在(16)**AEE** 式中作为主词的所思考的可逐一列举的有限集为：

$$P = \{e_1, e_2\},\ M = \{e_1, e_2, e_3\},\ S = \{e_1, e_5\}$$

(16) **AEE**　$(m(e_1) \wedge m(e_2)) \wedge (\neg s(e_1) \wedge \neg s(e_2) \wedge \neg s(e_3) \rightharpoonup \neg p(e_4) \wedge \neg p(e_5))$

设在(17)**EAO** 式中作为主词的 s、m、p 所思考的可逐一列举的有限集为：

$$P = \{e_1, e_2\},\ M = \{e_3, e_4\},\ S = \{e_3, e_4, e_5\}$$

(17) **EAO**　$(\neg m(e_1) \wedge \neg m(e_2) \wedge (s(e_3) \wedge s(e_4)) \rightharpoonup \neg p(e_3) \vee \neg p(e_4) \vee \neg p(e_5)$

设在(18) **EIO** 式中作为主词的 s、m、p 所思考的可逐一列举的有限集为:

$$P=\{e_1,e_2\},\ M=\{e_3,e_4\},\ S=\{e_1,e_3\}$$

(18) **EIO** $(\neg m(e_1)\wedge\neg m(e_2))\wedge(s(e_3)\vee s(e_4))\rightarrow\neg p(e_1)\vee\neg p(e_3)$

设在(19)IAI 式中作为主词的 s、m、p 所思考的可逐一列举的有限集为:

$$P=\{e_1,e_2\},\ M=\{e_2,e_3\},\ S=\{e_2,e_3,e_4\}$$

(19) **IAI** $(m(e_1)\vee m(e_2))\wedge(s(e_2)\wedge s(e_3))\rightarrow p(e_2)\vee p(e_3)\vee p(e_4)$

2. 内涵三段论推理式

当主词思考不可逐一列举的有限集、空集或无限集时,传统直言命题对应于当代形式逻辑中相应的内涵命题后,作为传统名词逻辑核心的三段论格式全部对应于当代形式逻辑的命题逻辑推理式。能据以从已知得出新知。我们在下面右边列出与三段论 19 式相对应的当代形式逻辑的命题逻辑推理式。设 p、r、s 为命题变元。

1) 第一格的四个推理式

(1) **AAA** $(r\rightarrow p)\wedge(s\rightarrow r)\rightarrow(s\rightarrow p)$

(2) **AII** $(r\rightarrow p)\wedge(s!r)\rightarrow s!p$

(3) **EAE** $(r\rightarrow\neg p)\wedge(s\rightarrow r)\rightarrow(s\rightarrow\neg p)$

(4) **EIO** $(r\rightarrow\neg p)\wedge(s!r)\rightarrow s!\neg p$

2) 第二格的四个推理式

(5) **AEE** $(p\rightarrow r)\wedge(s\rightarrow\neg r)\rightarrow(s\rightarrow\neg p)$

(6) **AOO** $(p\rightarrow r)\wedge(s!\neg r)\rightarrow s!\neg p$

(7) **EAE** $(p\rightarrow\neg r)\wedge(s\rightarrow r)\rightarrow(s\rightarrow\neg p)$

(8) **EIO** $(p\rightarrow\neg r)\wedge(s!r)\rightarrow s!\neg p$

3) 第三格的六个推理式

(9) **AAI** $\neg(r\rightarrow s!s)\rightarrow[(r\rightarrow p)\wedge(r\rightarrow s)\wedge s!p]*$

(10) **AII** $(r\rightarrow p)\wedge(r!s)\rightarrow s!p$

(11) **EAO** $\neg(r\rightarrow s!s)\rightarrow[(r\rightarrow\neg p)\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow s!\neg p]*$

(12) **EIO** $(r\rightarrow\neg p)\wedge(r!s)\rightarrow s!\neg p$

(13) **IAI** $(r!p)\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow s!p$

(14) **OAO** $(r!\neg p)\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow s!\neg p$

4) 第四格的五个推理式

(15) **AAI** $\neg(r\rightarrow s!s)\rightarrow[(p\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow s!p]*$

(16) **AEE** $(p\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow\neg s)\rightarrow(s\rightarrow\neg p)$

(17) **EAO** $\neg(r\rightarrow s!s)\rightarrow[(p\rightarrow\neg r)(r\rightarrow s)\rightarrow s!\neg p]*$

(18) **EIO** $(p\rightarrow\neg r)\wedge(r!s)\rightarrow s!\neg p$

(19) **IAI**　　　　$(p!r) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow s!p$

以上共列出与传统名词逻辑直接推理和间接推理相对应的当代形式逻辑命题逻辑导出式 42 式、推理式 35 式。从上述对应情况不难看出:由于传统的直言命题实际上是外延命题和内涵命题的混沌的混合体。因此,建立在直言命题上的传统的名词逻辑实际上是外延逻辑和内涵逻辑的混沌的混合体。传统外延逻辑由命题逻辑导出式组成,只适用于可逐一列举的有限域,不能据以从已知得出新知,本质上是同语反复;传统内涵逻辑由命题逻辑推理式和导出式组成,适用于不可逐一列举的有限域、空域或无限域,其中的推理式能据以从已知推出新知。传统形式逻辑将二者混为一谈,区别不出外延的与内涵的,分辩不清导出式与推理式。直到现今流行的传统逻辑读物仍然推、导不分,内、外杂糅,将不能出新知的导出式误当做能出新知的推理式。作为传统形式逻辑当代发展的当代形式逻辑,既是外延逻辑又是内涵逻辑,但以内涵逻辑为主,且内、外分开,推、导两清,突出了推理作为能从已知获取新知的逻辑工具的特点。

与内涵传统名词逻辑相对应的 35 个推理式中,标有“ * ”的有 13 式。这 13 式需加以 $\neg(s \rightarrow p!\neg p)$ 等条件限制。由于 p 与 $\neg p$ 互为否定,因此,我们称 $p!\neg p$ 为“可以矛盾”。s 如果满足 $s \rightarrow p!\neg p$,也就是说,如果 s 是可以矛盾的充分条件,那么我们称 s 为可以矛盾;反之,当 s 满足 $\neg(s \rightarrow p!\neg p)$ 时,亦即,如果 s 不是可以矛盾的充分条件,那么,我们称 s 为不可矛盾。标有星号的 13 个推理式的有效性必须有这样的先决条件:有关名词是不可矛盾名词。

我们知道,可以矛盾的名词必定为空名词,可是空名词不一定是可以矛盾的名词。例如,“哥德巴赫猜想的解决者”、“金银山”、“以太”等都是空名词,然而都不是可以矛盾名词;“飞碟”、“外星人”、“不等于两个素数之和的偶数”等,尽管至今还未确定其是否为空名词,但都不是可以矛盾名词。传统内涵名词逻辑对这些不是可以矛盾的名词来说,全都有效。

已经详细证明了:传统外延名词逻辑当然是实名词逻辑。而传统内涵名词逻辑却是不可以矛盾的名词(包含不可以矛盾的空名词)逻辑。因此,整个来说,传统名词逻辑并非仅仅是实名词逻辑,而是不可以矛盾的实空名词逻辑。

正统的数理逻辑管窥蠡测,宣称传统的形式逻辑为实名词逻辑,说什么“一旦出现空名词就会使其中的一系列推导格式不复有效”。这是逻辑史上由于正统数理逻辑自身在逻辑上无能而对传统形式逻辑的莫大冤枉。作为传统形式逻辑当代发展的当代形式逻辑诞生后,我们据实为之正名:传统名词逻辑是不可矛盾的实空名词逻辑。其实,倘若传统名词逻辑只不过是实名词逻辑,那么传统逻辑的处境就显得非常可悲:不仅对一系列十分有意义的不可矛盾的空名词无力问津,而且,传统逻辑还确定不了自己究竟在什么场合不能用,因为传统名词逻

辑区分不了名词的实、空。不过,传统逻辑事实上在两千三百年的发展过程中,从来就没有进入正统数理逻辑为它安排好的那种凄惨的困境。它事实上始终在充满各种各样不可矛盾的空名词的普通逻辑思考领域中发挥效用。给传统形式逻辑设置困境的正统数理逻辑倒是真的陷入了难以自拔的困境:它不可能将传统直言命题分为外延命题和内涵命题,因为它本身只能处理外延的问题,无力问津内涵;它也不可能区分实然的矛盾 $p \wedge p$ 和必然的可以矛盾 $p!p$,亦即,不能区分“不矛盾”和“不可矛盾”。因此,从正统数理逻辑出发,无法解释传统名词逻辑何以能在不可矛盾的空名词领域内生效,也无从讨论什么是传统名词逻辑生效的充分条件或必要条件。倘若株守正统数理逻辑,那么传统形式逻辑的精髓将被弃如敝屣,发展前景势必会彻底断送。

依据十分显然的常理,要发展传统形式逻辑,必须坚持传统形式逻辑深刻而正确的主导思想。

17.3 *Cn* 的形式定理、导出规则和元定理(2)——*Cn* 与传统形式逻辑内涵名词逻辑

我们在 17.2 节已经证明了,对于和传统的四类直言命题相应的外延命题来说,传统名词逻辑的全部导出格式(逻辑方阵 6 个、换质换位 8 个、三段论 19 个、完全归纳 1 个、附性 1 个,计 35 个)都是 ***Cn*** 的有效式。不过,没有一个是能得出新知的推理式,全都是同语反复的导出式。

本节要证明的是与传统内涵名词逻辑相应的 ***Cn*** 定理。

由于有

$$\vdash p\ \neg p \to p!\neg p \qquad (\text{公式 } 50)$$

因此有下面的公式。

公式 207. $\vdash(s\to p\ \neg p)\to(s\to p!\neg p)$

证明:

(1) $\vdash p\ \neg p\to p!\neg p$ (公式 50)

(2) $\vdash p\ \neg p\to p!\neg p\to(s\to p\ \neg p)\to(s\to p!\neg p)$ (公理 3)

(3) $\vdash(s\to p\ \neg p)\to(s\to p!\neg p)$ ((1)、(2),分离)

Q. E. D

公式 208. $\vdash\neg(s\to p!\neg p)\to\neg(s\to p\ \neg p)$

证明:

(1) $\vdash(s\to p\ \neg p)\to(s\to p!\neg p)$ (公式 207)

(2) $\vdash(s\to p\ \neg p)\to(s\to p!\neg p)\to\neg(s\to p!\neg p)\to\neg(s\to p\ \neg p)$

（公式 12）

（3）$\vdash \neg(\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{p}!\neg \mathbf{p}) \rightarrow \neg(\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{p}\ \neg \mathbf{p})$　　（（1）、（2），分离）

Q. E. D

可见，从逻辑上说，“不可矛盾”比“不矛盾”强，前者是后者的充分条件。传统内涵名词逻辑是不可矛盾名词逻辑，对于任意不可矛盾的名词来说，是普遍有效的。当然，矛盾的名词必定是空的，可以矛盾的名词也必定是空名词；但是，空名词未必矛盾，也未必可以矛盾。譬如，“哥德巴赫猜想的解决者”、“金山”、“燃素”等都是空名词，然而都既非矛盾，又非可以矛盾；而“火星生物”、“飞碟”、“不等于两个素数之和的偶数”等，尽管至今还确定不了是否为空名词，可是，也都既非矛盾名词又非可以矛盾名词。传统内涵名词逻辑对于这类已确定为空或尚不能确定是否为空然而都不可矛盾的名词来说，全都有效。

对于普通的逻辑思维来说，可以矛盾的名词 **s** 是十分罕见的。据！（约合）的定义，$\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{p}!\neg$p 应为 $\mathbf{s} \rightarrow \neg(\mathbf{p} \rightarrow \neg\neg \mathbf{p})$，等价于 $\mathbf{s} \rightarrow \neg(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p})$。这就是说，可以矛盾的名词 **s** 是“**p** 不是 **p** 的充分条件”的充分条件。尽管空名词是司空见惯的，然而，这种竟然可由之得出“**p** 不是 **p** 的充分条件”的可以矛盾的空名词却几乎是不可思议的古今奇谈。如果不是精于逻辑的林邦瑾教授有意识地费尽心思地去构造，在普通的逻辑思考中，几乎不会自然地产生。正因为如此，我们举不出一个现成的可以矛盾的空名词的实例。亦即，“不可矛盾”这个条件可以说是为普通逻辑思考所自然地满足的。这大概就是传统形式逻辑的创始人和后继者在漫长的 2300 多年间都不曾感到有必要增加这个条件的原因。尽管传统名词逻辑事实上只在不可矛盾名词的领域内有效，而传统形式逻辑又不曾揭示这个条件，然而，由于可以矛盾名词事实上不在普通逻辑思维实际中出现，因而揭举此条件后的传统名词逻辑事实上可以放大胆地在普通逻辑思维中使用。

下面，继续证明在 ***Cn*** 中和传统内涵名词逻辑对应的定理。为了证明的展开，我们先证明几个导出规则和公式。

规则Ⅴ. $\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} \vdash\!\!- \vdash \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$　　（充分条件互易规则）

证明：

（1）$\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$　　（公理 2）

（2）$\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$　　（ 题设）

（3）$\vdash \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$　　（（1）、（2），分离）

Q. E. D

规则Ⅵ. $\vdash \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ ，$\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} \vdash\!\!- \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$　（前件强化规则）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A \to B \to C}$ (题设)
(2) $\vdash \mathbf{B \to A \to C}$ ((1),规则Ⅴ)
(3) $\vdash \mathbf{D \to B}$ (题设)
(4) $\vdash \mathbf{D \to A \to C}$ ((3)、(2),规则Ⅲ)
(5) $\vdash \mathbf{A \to D \to C}$ ((4),规则Ⅴ)

Q. E. D

规则Ⅶ. $\vdash \mathbf{A \to B \to C}$, $\vdash \mathbf{C \to D} \vdash\!\!-\, \vdash \mathbf{A \to B \to D}$(后件弱化规则)

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A \to B \to C}$ (题设)
(2) $\vdash \mathbf{C \to D}$ (题设)
(3) $\vdash (\mathbf{C \to D}) \to (\mathbf{B \to C}) \to \mathbf{B \to D}$ (公理3)
(4) $\vdash (\mathbf{B \to C}) \to \mathbf{B \to D}$ ((3)、(2),分离)
(5) $\vdash \mathbf{A \to B \to D}$ ((1)、(4),规则Ⅲ)

Q. E. D

公式209. $\vdash (\mathrm{A} \upharpoonleft \mathbf{A}) \upharpoonleft \mathbf{B \to A} \upharpoonleft \mathbf{B}$

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A \to A}$ (公式21)
(2) $\vdash (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A \to A}) \to \neg \mathbf{A} \to \neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A})$ (公式12)
(3) $\vdash \neg \mathbf{A} \to \neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A})$ ((1)、(2),分离)
(4) $\vdash [\neg \mathbf{A} \to \neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A})] \to [\neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A}) \to \mathbf{B}] \to \neg \mathbf{A \to B}$
(公式1)
(5) $\vdash [\neg (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A}) \to \mathbf{B}] \to \neg \mathbf{A \to B}$ ((3)、(4),分离)
(6) $\vdash (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{A}) \upharpoonleft \mathbf{B \to A} \upharpoonleft \mathbf{B}$ ((5),两次↾的定义)

Q. E. D

公式210. $\vdash (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B}) ! (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{C}) \to \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C}$

证明:

(1) $\vdash \mathbf{B} \to (\mathbf{C \to B} ! \mathbf{C})$ (公式83)
(2) $\vdash (\mathbf{C \to B} ! \mathbf{C}) \to \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{C \to A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C}$ (公式4)
(3) $\vdash \mathbf{B \to A} \upharpoonleft \mathbf{C \to A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C}$ ((1)、(4),充分条件传递规则)
(4) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{C \to B \to A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C}$ ((3),规则Ⅴ)
(5) $\vdash \mathbf{B \to A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C \to A} \upharpoonleft \mathbf{B \to A} \upharpoonleft (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C})$ (公式4)
(6) $\vdash \mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{C \to A} \upharpoonleft \mathbf{B \to A} \upharpoonleft (\mathbf{A} \upharpoonleft \mathbf{B} ! \mathbf{C})$ ((4)、(5),充分条件传递规则)

(7) $\vdash$**A↾C→A↾B→A↾(A↾B!C)→(A↾C)! (A↾B)→A↾(A↾B!C)**
(公式 74)
(8) $\vdash$**(A↾C)! (A↾B)→A↾(A↾B!C)** ((6)、(7),分离)
(9) $\vdash$**A↾(A↾B!C)⇌(A↾A)↾B!C** (公式 66)
(10) $\vdash$**(A↾C)! (A↾B)→(A↾A)↾B!C** ((8)、(9),置换定理)
(11) $\vdash$**(A↾A)↾B!C→A↾B!C** (公式 209)
(12) $\vdash$**(A↾C)! (A↾B)→A↾B!C** ((10)、(11),充分条件传递规则)
(13) $\vdash$**(A↾C)! (A↾B)⇌(A↾B)!(A↾C)** (公式 45)
(14) $\vdash$**(A↾B)!(A↾C)⇌A↾B!C** ((12)、(13),置换定理)
Q. E. D

公式 211. $\vdash$**A!(B ↾C)→A!B ↾A!C**
证明:
(1) $\vdash$**(A↾B)!(A↾C)→A↾B!C** (公式 210)
(2) $\vdash$**A!(B ↾C)→A!B ↾A!C** ((1),对偶定理(2))
Q. E. D

公式 212. $\vdash$(A→B)! **(A→C)→A→B! C**
证明:
(1) $\vdash$**(¬A↾B)! (¬A↾C)→¬A↾B! C** (公式 210)
(2) $\vdash$**(¬¬A→B)! (¬¬A→C)→¬¬A→B! C** ((1),三↾的定义)
(3) $\vdash$**A ⇌ ¬¬A** (公式 10)
(4) $\vdash$**(A→B)! (A→C)→A→B! C** ((2)、(3),置换定理)
Q. E. D

有了上面这些导出规则和公式,我们就能得出在 ***Cn*** 中和传统内涵名词逻辑对应的公式。

公式 213. $\vdash$**¬(A→B!¬B)→(A→B)→A! B** (不可矛盾差等律(i))
证明:
(1) $\vdash$**(A→B)! (A→¬B)→A→B!¬B** (公式 212)
(2) $\vdash$**¬[(A→B)→¬(A→¬B)]→A→B!¬B** ((1),! 的定义)
(3) $\vdash$**¬[(A→B)→A! B]]→A→B!¬B** ((2),! 的定义)
(4) $\vdash$**{¬[(A→B)→A! B]→A→B! ¬B}→¬(A→B!¬B)→¬¬[(A→B)→A! B]** (公式 12)
(5) $\vdash$**¬(A→B!¬B)→¬¬[(A→B)→A! B]** ((3)、(4),分离)

(6) ⊢[(A→B)→A! B]⇌¬¬[(A→B)→A! B](公式 10)
(7) ⊢¬(A→B!¬B)→(A→B)→A! B ((5)、(6),置换定理)
Q. E. D

公式 214. ⊢¬(A→B!¬B)→(A⇀¬B)→A!¬B
(不可矛盾差等律(ⅱ))

证明:
(1) ⊢¬(A⇀¬B!¬¬B)→(A⇀¬B)→A!¬B(公式 213)
(2) ⊢B ⇌ ¬¬B (公式 10)
(3) ⊢¬(A⇀¬B! B)→(A⇀¬B)→A!¬B ((1)、(2),置换定理)
(4) ⊢¬B! B⇌B!¬B (公式 44)
(5) ⊢¬(A→B!¬B)→(A⇀¬B)→A!¬B ((3)、(4),置换定理)
Q. E. D

公式 215. ⊢¬(A→B)⇌ A!¬B (矛盾对当律(ⅰ))

证明:
(1) ⊢¬(A→B)⇌ ¬(A→B) (公式 6)
(2) ⊢B ⇌ ¬¬B (公式 10)
(3) ⊢¬(A→B)⇌ ¬(A⇀¬¬B) ((1)、(2),置换定理)
(4) ⊢¬(A→B)⇌ A!¬B ((3),! 的定义)
Q. E. D

公式 216. ⊢¬(A⇀¬B)⇌ A! B (矛盾对当律(ⅱ))

证明:
(1) ⊢¬(A⇀¬B)⇌ ¬(A⇀¬B) (公式 6)
(2) ⊢¬(A⇀¬B)⇌ A! B ((3),! 的定义)
Q. E. D

公式 217. ⊢¬(A→B!¬B)→(A→B)⇀¬(A⇀¬B)(不可矛盾上反对律)

证明:
(1) ⊢¬(A→B!¬B)→(A→B)→A! B (公式 213)
(2) ⊢¬(A→B!¬B)→(A→B)⇀¬(A⇀¬B)((1),! 的定义)
Q. E. D

公式 218. ⊢¬(A→B!¬B)⇀¬(A!B)→A!¬B(不可矛盾下反对律)

证明：

(1) $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （公式 214）

(2) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightleftharpoons\neg\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （公式 10）

(3) $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （（1）、（2），置换定理）

(4) $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}!\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （（3），！ 的定义）

Q. E. D

公式 219. $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}!\ \mathbf{A}$ （不可矛盾限制换位律）

证明：

(1) $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}$ （公式 213）

(2) $\vdash\mathbf{A}!\ \mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}!\ \mathbf{A}$ （公式 45）

(3) $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}!\ \mathbf{A}$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 220. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$ （换位律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$ （公式 15）

(2) $\vdash\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{B}$ （公式 10）

(3) $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 45. $\vdash\mathbf{A}!\ \mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}!\ \mathbf{A}$ （换位律（ⅱ））

公式 221. $\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{B}$ （换质律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$ （公式 6 ）

(2) $\vdash\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{B}$ （公式 10）

(3) $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\neg\mathbf{B}$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 6. $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ （换质律（ⅱ））

公式 222. $\vdash\mathbf{A}!\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}!\neg\neg\mathbf{B}$ （换质律（ⅲ））

证明：

(1) $\vdash\mathbf{A}!\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}!\mathbf{B}$ （公式 6 ）

(2) $\vdash\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\neg\mathbf{B}$ （公式 10）

(3) $\vdash\mathbf{A}!\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{A}!\neg\neg\mathbf{B}$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 6. $\vdash \mathbf{A!\neg B} \rightleftharpoons \mathbf{A!\neg B}$ （换质律（iii））

公式 15. $\vdash \mathbf{A\rightharpoonup B} \rightleftharpoons \mathbf{\neg B\rightharpoonup \neg A}$（换质位律）

公式 223. $\vdash(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})\cdots(\mathbf{A}_i\rightharpoonup\mathbf{B})\cdots(\mathbf{A}_n\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\cdots\mathbf{A}_i\vee\cdots\mathbf{A}_n\rightharpoonup\mathbf{B}$

（内涵枚举归纳律）

证明：

（1） $\vdash(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B}$ （公式 39）

（2） $\vdash(\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\vee\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B}$ （公式 39）

（3） $\vdash\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B}\rightleftharpoons(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B})$ （公式 110）

（4） $\vdash(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\vee\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B}$

（（2）、（3），置换定理）

（5） $\vdash(\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\vee\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_4\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\vee\mathbf{A}_3\vee\mathbf{A}_4\rightharpoonup\mathbf{B}$（公式 39）

（6） $\vdash(\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\vee\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B})\rightleftharpoons(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B})$ （公式 110）

（7） $\vdash(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_2\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_3\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}_4\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\mathbf{A}_2\vee\mathbf{A}_3\vee\mathbf{A}_4\rightharpoonup\mathbf{B}$

（公式 39）

（8） $\vdash(\mathbf{A}_1\rightharpoonup\mathbf{B})\cdots(\mathbf{A}_i\rightharpoonup\mathbf{B})\cdots(\mathbf{A}_n\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}_1\vee\cdots\mathbf{A}_i\vee\cdots\mathbf{A}_n\rightharpoonup\mathbf{B}$

（与上同理）

Q. E. D

从语义上说，A_1、…、$\mathbf{A}_i$、…、$\mathbf{A}_n$为 n 个（n 有限地确定）其外延不可逐一列举名词，而并非 n 个单独名词。

规则 X. $\vdash\mathbf{A\rightharpoonup B}\vdash\!\!\!-\!\!-\vdash\mathbf{CA\rightharpoonup CB}$ （附性规则）

证明：

（1） $\vdash\mathbf{C\rightharpoonup C}$ （公式 5）

（2） $\vdash\mathbf{A\rightharpoonup B}$ （题设）

（3） $\vdash(\mathbf{C\rightharpoonup C})(\mathbf{A\rightharpoonup B})$ （（1）、（2），合取规则）

（4） $\vdash(\mathbf{C\rightharpoonup C})(\mathbf{A\rightharpoonup B})\rightharpoonup\mathbf{CA\rightharpoonup C\ B}$ （公式 47）

（5） $\vdash\mathbf{CA\rightharpoonup C\ B}$ （（3）、（4），分离规则）

Q. E. D

公式 47. $\vdash(\mathbf{C\rightharpoonup C})(\mathbf{A\rightharpoonup B})\rightharpoonup\mathbf{CA\rightharpoonup C\ B}$ （附性律）

Cn 除外衍式$(\mathbf{A\rightharpoonup B})\rightharpoonup\mathbf{CA\rightharpoonup C\ B}$。如果在 ***Cn*** 中加入此涵衍式，扩大后的形式系统将丧失无衍性，会得出 $\mathbf{A\ \neg A\rightharpoonup B}$ 之类的衍式。

从语义上说，***Cn*** 中表示规则的 $\vdash\!\!\!-\!\!-$（或者“若，则”）与有效的$\rightharpoonup$（即公式中

结合力最小的⇀),都可解释为逻辑的充分条件,亦即,仅据前、后件的逻辑结构即可确定的充分条件关系。然而,这二者之间在逻辑的范围内还存在下述差别。

├—的前、后件的真值是逻辑的——仅据前、后件本身的逻辑结构即可确定其是否恒真;而有效⇀的前、后件的真值不仅可以是逻辑的,而且可以是经验的——除了依据前、后件本身的逻辑结构外,还需依据经验内容才能确定其是否经验真。故而,├—是关于逻辑真之间的逻辑充分条件关系,而有效⇀则是关于逻辑真或经验真之间的逻辑充分条件关系。因此,├—是特殊,而有效⇀则是一般。成立一般的有效⇀时,相应的特殊的├—必成立;然而成立特殊的├—时,一般的有效⇀未必成立。这种现象是完全正常的。上述精微的逻辑现象朴素的传统逻辑未予注意,那是完全可以理解的。

公式 85. (**C⇀B**)(**A⇀C**)⇀**A⇀B**　　（内涵一格 **AAA** 公式）

公式 224. ⊢(**C⇀B**)！**A**！**C⇀A!B**　　（内涵第一格强 **AII** 公式）

证明:

(1) ⊢(**C⇀B**)⇀(**B⇀¬A**)⇀**C⇀¬A**　　（公式 1）

(2) ⊢**B⇀¬A** ⇌ ¬¬**A⇀¬B**　　（公式 15）

(3) ⊢**C⇀¬A** ⇌ ¬¬**A⇀¬C**　　（公式 15）

(4) ⊢(**C⇀B**)⇀(¬¬**A⇀¬B**)⇀¬¬**A⇀¬C**　　（(1)、(2)、(3),两次置换定理）

(5) ⊢**A** ⇌ ¬¬**A**　　（公式 10）

(6) ⊢(**C⇀B**)⇀(**A⇀¬B**)⇀**A⇀¬C**　　（(4)、(5),两次置换定理）

(7) ⊢[(**A⇀¬B**)⇀**A⇀¬C**]⇌[¬(**A⇀¬C**)⇀¬(**A⇀¬B**)]　　（公式 15）

(8) ⊢(**C⇀B**)⇀¬(**A⇀¬C**)⇀¬(**A⇀¬B**)　　（(6)、(7),置换定理）

(9) ⊢(**C⇀B**)⇀**A!C⇀A!B**　　（(8),! 的定义）

(10) ⊢[(**C⇀B**)⇀**A!C⇀A!B**]⇀(**C⇀B**)!**A!C⇀A!B**　　（公式 74）

(11) ⊢(**C⇀B**)!**A!C⇀A!B**　　（(9)、(10),充分条件分离规则）

Q. E. D

请注意:

据第(6)步(**C⇀B**)⇀(**A⇀¬B**)⇀**A⇀¬C**、公式(75)和充分条件分离规则,可得:

(**C⇀B**)(**A⇀¬B**)⇀**A⇀¬C**　(α)

又据第(8)步(**C⇀B**)⇀¬(**A⇀¬C**)⇀¬(**A⇀¬B**)、公式(75)和充分条件分离规则,可得:

$$(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{C})\rightharpoondown\neg(\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}) \quad (\beta)$$

有的逻辑读本用过一个名词叫所谓“反三段论”。这式（α）和式（β）就互为“反三段论”。提请注意，被称做“反三段论”的（$\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C}$）$\rightarrow\mathbf{A}\ \neg\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ 其实是 ***Cn*** 的涵衍式，在 ***Cn*** 中不可证。在这个涵衍式中出现的 **A**、**B**、**C** 可以是任意命题，未必是像出现在三段论中那样的命题。当 **A** 是 **C** 时，就成了（$\mathbf{CB}\rightarrow\mathbf{C}$）$\rightarrow$（$\mathbf{C}\ \neg\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$），前件有效而后件却是衍式。因此，称这个涵衍式为“反三段论”是一种误解。

公式 225. $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$ （内涵第一格 **AII** 公式）

证明：

（1） $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C})\rightarrow(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B})!(\mathbf{A}!\mathbf{C})$ （公式 50）

（2） $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$ （公式 224）

（3） $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$ （（1）、（2），充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 226. $\vdash(\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ （内涵第一格 **EAE** 公式）

这个公式模式的变域是公式模式 87 的变域的真子域，因此，它是公式 85 的特殊情况。

公式 227. $\vdash(\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （内涵第一格 **EIO** 公式）

这个公式模式是公式 225 的特殊情况。

以上 4 个公式模式分别相当于传统内涵三段论第一格 **AAA**、**AII**、**EAE**、**EIO** 等式。其中的 **EAE**、**EIO** 分别是 **AAA**、**AII** 的特殊情况。

公式 228. $\vdash(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ （内涵第二格 **AEE** 公式）

证明：

（1） $\vdash(\neg\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ （公式 85）

（2） $\vdash\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C}\rightleftharpoons\neg\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ （公式 15）

（3） $\vdash(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 229. $\vdash(\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （内涵第二格 **AOO** 公式）

证明：

（1） $\vdash(\neg\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （公式 225）

（2） $\vdash\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C}\rightleftharpoons\neg\mathbf{C}\rightharpoondown\neg\mathbf{B}$ （公式 15）

（3） $\vdash(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 230. ├(**B**→¬**C**)(**A**→**C**)→**A**→¬**B**　　　　（内涵第二格 **EAE** 公式）

证明：

(1) ├(**C**→¬**B**)(**A**→**C**)→**A**→¬**B**　　　　（公式 87）

(2) ├**C**→¬**B** ⇌ **B**→¬**C**　　　　（公式 15）

(3) ├(**B**→¬**C**)(**A**→**C**)→**A**→¬**B**　　　　（(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 231. ├(**B**→¬**C**)(**A**!**C**)→**A**!¬**B**　　　　（内涵第二格 **EIO** 公式）

证明：

(1) ├(**B**→¬**C**)(**A**!¬¬**C**)→**A**!¬**B**　　　　（公式 229）

(2) ├**C** ⇌ ¬¬**C**　　　　（公式 10）

(3) ├(**B**→¬**C**)(**A**!**C**)→**A**!¬**B**　　　　（(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

以上 4 个公式模式分别相当于传统内涵三段论第一格 **AEE**、**AOO**、**EAE**、**EIO** 等式。其中的 **AEE**、**EAE** 可从第一格的 **AAA** 得出，**AOO**、**EIO** 从第一格的 **AII** 得出。

公式 232. ├¬(**C**→**A**!¬**A**)(**C**→**B**)(**C**→**A**)→**A**!**B**（内涵第三格不可矛盾 **AAI** 公式）

证明：

(1) ├(**C**→**B**)(**C**→**A**)→(**C**→**B**)!(**C**→**A**)　　　　（公式 50）

(2) ├(**C**→**B**)(**A**!**C**)→**A**!**B**　　　　（公式 225）

(3) ├**A**!**C** ⇌ **C**!**A**　　　　（公式 44）

(4) ├(**C**→**B**)(**C**!**A**)→**A**!**B**　　　　（(2)、(3)，置换定理）

(5) ├¬(**C**→**A**!¬**A**) →(**C**→**A**)→**C**!**A**　　　　（公式 213）

(6) ├[(**C**→**A**)→**C**!**A**]→[(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→(**C**→**B**)!(**C**!**A**)]

（公式 120）

(7) ├¬(**C**→**A**!¬**A**) →(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→(**C**→**B**)!(**C**!**A**)

（(5)、(6)，充分条件传递规则）

(8) ├[(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→(**C**→**B**)!(**C**!**A**)]→[(**C**→**B**)!(**C**!**A**)→**A**!**B**]
→(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→**A**!**B**　　　　（公式 1）

(9) ├[(**C**→**B**)!(**C**!**A**)→**A**!**B**]→[(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→(**C**→**B**)!(**C**!**A**)]
→(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→**A**!**B**　　　　（(8)，条件互易规则）

(10) ├[(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→(**C**→**B**)!(**C**!**A**)]→(**C**→**B**)!(**C**→**A**)→**A**!**B**

((4)、(9),充分条件分离规则)

(11) $\vdash \neg(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})!\ (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$

((7)、(10),充分条件传递规则)

(12) $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})!\ (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}!\mathbf{B}$

((11),条件互易规则)

(13) $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$

((1)、(12),充分条件传递规则)

(14) $\vdash \neg(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ ((13),条件互易规则)

Q. E. D

这个公式模式相当于传统内涵三段论第三格 **AAI** 式。可从公式 224 和不可矛盾差等律(i)得出。由于不可矛盾差等律(i)需要以不可矛盾名词为条件,因此,当此式作为内涵名词逻辑公式时,也需要以不可矛盾名词为先决条件。

公式 233. $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})!\ (\mathbf{C}!\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ (内涵第三格 **AII** 公式)

证明:

(1) $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ (公式 225)

(2) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}!\mathbf{A}$ (公式 45)

(3) $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{B})!\ (\mathbf{C}!\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ ((1)、(2),置换定理)

Q. E. D

公式 234. $\vdash \neg(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{C} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})(\mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$

(内涵第三格不可矛盾 **EAO** 公式)

这个公式模式是公式 232 的特殊情况。

公式 235. $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})(\mathbf{C}!\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ (内涵第三格 **EIO** 公式)

证明:

(1) $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ (公式 225)

(2) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}!\mathbf{A}$ (公式 45)

(3) $\vdash (\mathbf{C} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})(\mathbf{C}!\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ ((1)、(2),置换定理)

Q. E. D

请看内涵三段论公式 232 和公式 233、公式 234 和公式 235。其间有两个特点:① 它们的大前提和结论相同,只有小前提不同:由“**C** 必定 **A**”变为“**C** 可以 **A**”;② 当以必定命题为小前提时需以不可矛盾名词为先决条件;而当以可以命题为小前提时却无需这个先决条件,它可适用于任何名词。看得出来,可以命题的推导能力有时竟然比必定命题还强。这是值得探讨的逻辑现象。

公式 236. $\vdash(\mathbf{C}!\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（内涵第三格 **IAI** 公式）

证明：

(1) $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})(\mathbf{B}!\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{B}!\mathbf{A}$　　（公式 225）

(2) $\vdash\mathbf{B}!\mathbf{C}\rightleftharpoons\mathbf{C}!\mathbf{B}$　　（公式 45）

(3) $\vdash\mathbf{B}!\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（公式 45）

(4) $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})(\mathbf{C}!\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（(1)、(2)、(3)，两次置换定理）

(5) $\vdash(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})(\mathbf{C}!\mathbf{B})\rightleftharpoons(\mathbf{C}!\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})$　（公式 43）

(6) $\vdash(\mathbf{C}!\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（(4)、(5)，置换定理）

Q. E. D

公式 237. $\vdash(\mathbf{C}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　　（内涵第三格 **OAO** 公式）

此式是公式 234 的特殊情况。

以上 6 个公式模式依次相当于传统内涵三段论第三格的 **AAI**、**AII**、**EAO**、**EIO**、**IAI**、**OAO**6 式。其中的 **AAI**、**EAO** 式需以不可矛盾名词为条件，在此条件下可由第一格的 **AAA** 式得出；其余的 **AII**、**EIO**、**IAI**、**OAO** 式均可由第一格的 **AII** 式得出。

罗素在批评亚里士多德由直言命题构成的三段论的“形式缺点”时写道：“‘所有的金山都是山，所有的金山都是金的，所以有些山是金的’。我的结论就会是错误的了，尽管在某种意义上我的前提都是真的。”[1]

在这里，罗素的用意是想用一个“反例”来批评传统的三段论第三格 AAI 式的“形式的缺点”。其实，在罗素的两个前提中出现了从逻辑上说不是自相矛盾的空名词“金山”，因此，一经纳入当代形式逻辑，那两个“全称肯定”前提全都不是外延合取命题，而是内涵充分条件命题 $p(x)\wedge s(x)\rightarrow s(x)$ 和 $p(x)\wedge s(x)\rightarrow p(x)$（金山必定是山，金山必定是金的），而且，全都逻辑地真。当 m 不是自相矛盾的名词时，在当代形式逻辑中有下述有效式：

$$[m(x)\rightarrow s(x)]\wedge[m(x)\rightarrow p(x)]\rightarrow s(x)!p(x)$$

鉴于“金山”是不可矛盾的空名词，因此，应为内涵三段论，而不是外延三段论。据此，对于罗素所举的例子来说，真实的结论是 $s(x)!p(x)$（山可以是金的）。

不过，倘若把上述例子中的前提改为：

“山且非山必定是山，山且非山必定是非山。”

那就得不出：

“山可以是非山。”

① （英）罗素《西方哲学史》，商务印书馆 1963 年 9 月版，上卷 254 页。

这是由于,“山且非山”是自相矛盾的空名词。

传统形式逻辑把表述的句型相同而逻辑内容殊异的外延命题和内涵命题囫囵吞枣地全部当做直言命题处理,这是传统形式逻辑的局限。可是,不能据此就把传统名词逻辑宣判为“实名词逻辑”。这种对待传统形式逻辑的轻慢态度不利于逻辑科学的发展。发展了的传统形式逻辑应是不自相矛盾名词逻辑。这样一来,不仅发展了的传统形式逻辑可以在不自相矛盾的空名词的领域中应用,而且发展了的传统形式逻辑本身有能力鉴别自己的适用领域(“不自相矛盾”是鉴别的逻辑标准)。

公式 238. $\vdash\neg(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$

（内涵第四格不可矛盾 **AAI** 公式）

证明:

(1) $\vdash(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}$ （公式 86）

(2) $\vdash\neg(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{B}!\mathbf{A}$ （公式 213）

(3) $\vdash\neg(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{B}!\mathbf{A}$ （(1)、(2)规则Ⅵ）

(4) $\vdash\mathbf{B}!\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{A}!\mathbf{B}$ （公式 46）

(5) $\vdash\neg(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{A}!\mathbf{B}$ （(3)、(4),置换定理）

Q. E. D

此式相当于传统内涵三段论第四格 **AAI** 式,可从不可矛盾差等律(ⅰ)公式 213 和同内涵一格 **AAA** 公式等价的充分条件传递律(ⅱ)公式 86 得出。由于第一差等律须以不可矛盾名词为条件,因此,此式当作为内涵名词逻辑公式时,也需以不可矛盾名词为条件。

要是突破传统的三段论格局,可依据$(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{A})\rightarrow\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}$(公式 86)提供的关于“必定”的传递性,轻而易举地从“**B** 必定 **C**”和“**C** 必定 **A**”得出“**B** 必定 **A**”。这样一来,即不必以不可矛盾名词为先决条件,所获得的结果比“**A** 可以 **B**”(即 **A!B**)还要确切,因为,“**A** 可以 **B**”和“**B** 可以 **A**”等价。为了恪守传统三段论格局,不仅要把结论从“**B** 必定 **A**”降格为“**B** 可以 **A**”,而且还须以不可矛盾名词为条件。“**B** 必定 **A**”(即“**A** 必定 **B**”的不加“限制”的真正的逆命题)在普通逻辑思考中是经常出现的,其常用的自然语言表述形态是“只有 **A** 才 **B**”。下面是一个依据公式 86 提供的“必定”的传递性进行的推理实例。

解决哥德巴赫猜想的必定在陈氏定理方面超过陈景润,在陈氏定理方面超过陈景润的必定是卓越的数学家,所以,只有卓越的数学家才能解决哥德巴赫猜想。

——结论也可表达成:“解决哥德巴赫猜想的就必定是卓越的数学家”。

按传统三段论的格局,就只能得出较弱的“卓越的数学家可以解决哥德巴

赫猜想”。特别提请注意的是:“有卓越的数学家解决哥德巴赫猜想”是假的,因为至今没有这样的数学家。“哥德巴赫猜想的解决者”迄今还是个空名词,虽然它是“可以矛盾的”,那就永远也不会有了。

公式 239. $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$　　（内涵第四格 **AEE** 公式）

证明:

(1) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}$　　（公式 86）

(2) $\vdash\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$　　（公式 20）

(3) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$　　（(1)、(2),置换定理）

Q. E. D

公式 240. $\vdash\neg(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})\rightharpoonup(\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$

（内涵第四格不可矛盾 **EAO** 公式）

证明:

(1) $\vdash\neg(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})(\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　（公式 232）

(2) $\vdash\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{C}$　　（公式 20）

(3) $\vdash\neg(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{A})\rightharpoonup(\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$

（(1)、(2),置换定理）

Q. E. D

公式 241. $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{C})(\mathbf{C}!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　　（内涵第四格 **EIO** 公式）

证明:

(1) $\vdash(\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})(\mathbf{C}!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　　（公式 235）

(2) $\vdash\mathbf{C}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{C}$　　（公式 20）

(3) $\vdash(\mathbf{B}\rightharpoonup\neg\mathbf{C})(\mathbf{C}!\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　　（(1)、(2),置换定理）

Q. E. D

公式 242. $\vdash(\mathrm{B}!\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（内涵第四格 IAI 公式）

证明:

(1) $\vdash(\mathbf{C}!\mathbf{B})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（公式 236）

(2) $\vdash\mathbf{C}!\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{B}!\mathbf{C}$　　（公式 46）

(3) $\vdash(\mathbf{B}!\mathbf{C})(\mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}!\mathbf{B}$　　（(1)、(2),置换定理）

Q. E. D

以上 5 个公式模式依次相当于传统三段论第四格的 **AAI**、**AEE**、**EAO**、**EIO**、**IAI** 等 5 式。其中的 **AAI**、**EAO** 需要以不可矛盾名词为条件,在此条件下,可由

第一格的 **AAA** 式得出；其余的 **AEE** 式可由第一格的 **AAA** 式得出，**EIO**、**IAI** 可由第一格的 **AII** 式得出。

至此，可得出下述推断：不仅传统外延名词逻辑全部推导格式可纳入 ***Cn***，而且传统内涵逻辑全部推导格式（计 35 个）也可纳入 ***Cn***。传统外延名词逻辑当然是实名词逻辑，而传统内涵名词逻辑却是不可矛盾名词（包含不可矛盾的空名词）逻辑，因此，整个来说，传统名词逻辑并不仅仅是实名词逻辑，而是不可矛盾的实空名词逻辑。

在 35 个传统内涵名词逻辑推导格式中，有 9 个须以不可矛盾名词为先决条件。也即是说，对于这 9 个推导格式来说，出现在其中的名词为不可矛盾的是这些推导格式有效的充分条件。而它们有效的必要条件又是什么呢？请继续往下面看。

在 ***Cn*** 可以证明以下公式。

公式 243. $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}]$ （矛盾反差等律）

证明：

（1） $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})!(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （公式 50）

（2） $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightleftharpoons\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B}$ （公式 61）

（3） $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B}\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})!(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （（1）、（2），置换定理）

（4） $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})]$ （（3），！的定义）

（5） $\vdash\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B}\rightharpoonup\neg[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}]$ （（4），！的定义）

Q. E. D

公式 244. $\vdash[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\mathbf{B}]\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B})$ （差等不矛盾律）

证明：

（1） $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}]$ （公式 243）

（2） $\vdash(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}]\rightleftharpoons[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}]\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B})$ （公式 20）

（3） $\vdash[(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{A}!\mathbf{B}]\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\ \neg\mathbf{B})$ （（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

我们称满足 $\mathbf{s}\rightharpoonup\mathbf{p}\ \neg\mathbf{p}$ 的名词 **s** 为矛盾名词，因而称满足 $\neg(\mathbf{s}\rightharpoonup\mathbf{p}\ \neg\mathbf{p})$ 的名词 **s** 为不矛盾名词。公式 243、公式 244 写成内涵名词逻辑格式就分别成为：

$$(\mathbf{s}\rightharpoonup\mathbf{p}\ \neg\mathbf{p})\rightharpoonup\neg[(\mathbf{s}\rightharpoonup\mathbf{p})\rightharpoonup\mathbf{s}!\mathbf{p}]$$

$$[(\mathbf{s}\rightharpoonup\mathbf{p})\rightharpoonup\mathbf{s}!\mathbf{p}]\rightharpoonup\neg(\mathbf{s}\rightharpoonup\mathbf{p}\ \neg\mathbf{p})$$

这就是说，**s** 为矛盾名词是差等律不成立的充分条件，即，**s** 为不矛盾名词是差等律成立的必要条件。类似地，可以证明对于其余 8 个也以有关名词不可矛盾为

充分条件的传统内涵名词逻辑推导格式来说,出现在其中的名词为不矛盾名词是这些推导格式有效的必要条件。下面用事实给以验证,列出表 17. 1 所示。

表 17. 1　用事实验证差等律成立的条件

Cn 公式的番号	***Cn*** 除外式	s	p	r	反　　例
211	⊣(s→p)→s!p	q¬q	q¬q		⊢q¬q→q¬q,⊣q¬q!q¬q 就是⊣¬(q¬q→q¬q)
212	⊣(s→¬p)→s!¬p	q¬q	q¬q		⊢q¬q→¬(q¬q),⊣q¬q→¬(q¬q)就是⊣¬(q¬q→q¬q)
215	⊣(s→p)→¬(s→¬p)	q¬q	q¬q		⊢q¬q→q¬q,⊣¬(q¬q→q¬q)
216	⊣¬(s!p)→s!¬p	q¬q	q¬q		⊢¬(q¬q!q¬q),⊣q¬q!¬(q¬q)就是⊣¬(q¬q→q¬q)
217	⊣(s→p)→p! s	q¬q	q¬q		⊢q¬q→q¬q,⊣q¬q!q¬q
230	⊣(r→p)(r→s)→s!p	¬q	q	q¬q	⊢q¬q→q,⊢q¬q→¬q,⊣¬q!q 就是⊣¬(¬q→¬q)
232	⊣(r→¬q)(r→s)→s!¬p	q	q	q¬q	⊢q¬q→¬q,⊢q¬q→q,⊣q!¬q 就是⊣¬(q→q)
236	⊣(p→r)(r→s)→s!p	q¬q	q¬q	q¬q	⊢q¬q→q¬q,⊢q¬q→q¬q,⊣q¬q!q¬q
238	⊣(p→¬r)(r→s)→s!¬p	q	q	q¬q	⊢q→¬(q¬q),⊢q¬q→q,⊣q!¬q 就是⊣¬(q→q)

在这些反例中都出现 **q¬q** 这种矛盾空名词。如果不出现矛盾空名词,通常是不会有这样的情况的。矛盾空名词 **q¬q** 有很不一般的特征:①它同时与自己和自己的否定满足“必定”,也就是说,它在与自己满足“必定”的同时又与自己满足“必不”;②它同时与自己和自己的否定不满足“未必”,也即是说,它在与自己不满足“未必”的同时又不满足“可以”。请注意,这里出现的情况是,自相矛盾的空名词与自己在满足“必定”的同时又不满足“可以”,在满足“必不”的同时又不满足“未必”。这种特征使在实名词领域内用惯了“必定”、“可以”这些词语的人感到非常惊奇。可是,由此倒可以看出所谓不矛盾律的彻底性;不仅 **q** 不可以 **q¬q**(即 ⊢¬(**q!q¬q**)),**q¬q** 自身也不可以 **q¬q**(即 ⊢¬(**q¬q!q¬q**))。

17. 4　对现行传统形式逻辑的再讨论
——传统形式逻辑存在的问题

不立不破,不破不立。为了能对症下药、除旧布新、补偏救弊、激浊扬清,让

传统形式逻辑获得长足进展,当务之急是揭举存在于其中的问题。

17.4.1　把研究客体说成研究思维

虽然,自从亚里士多德阐明客观世界的不矛盾律、韩非揭举客观世界的不自相矛盾律之后,两千多年以来,传统形式逻辑事实上一直在研究客观世界的逻辑规律,始终不曾在事实上研究过思维本身的规律。但是,从某一时期开始,直到如今,人们却异口同声地宣称传统形式逻辑是研究思维规律的,这种现象实在令人惊讶。传统形式逻辑界不仅对自己始终在研究客观规律这一事实讳莫如深,而且,把对这个事实的揭露视为离经叛道的异端邪说。这种理论与实际的南辕北辙是传统逻辑长期停滞不前的根本原因。

17.4.2　不分是非却专讲对错

传统形式逻辑不集中全力按照确定的标准去区分实际思考是什么、不是(即非)什么,却一门心思地把明明不是某某的实际思考说成是“错误的某某”。例如,把明明不是定义、三段论、推理的实际思考说成是“循环的定义”、“四名词的三段论”、“从前提推不出结论的推理”等。诚然,逻辑素养不深的人往往会把实际上不是某某的思考误当做某某,这是并不严重而又容易纠正的失误。这时,实际上产生了两种层次不同的互有联系而又有区别的思考——对象思考和元思考(关于对象思考的思考)。实际上不是某某(如不是定义、三段论、推理等)的思考是对象思考,而把不是某某当做某某(如当做定义、三段论、推理等)的以对象思考为思考对象的思考则是元思考。当然,作为命题的元思考有真假可言。倘若一定要讲对错,那么,有错误的只是元思考(指非为是),而对象思考尽管事实上有是非(是或非定义、三段论、推理等),然而,其本身仍然无对错可言(为什么是定义、三段论、推理等就是对的,而不是这些就是错的呢)。传统形式逻辑不但不去指出人们的那些以对思考为思考对象的元思考的指非为是(与指鹿为马颇类似)的失误,却去指责那些原本无所谓对错的不是某某的对象思考(不是马的鹿本身有什么错呢?)是“错误的某某”(指责鹿是长角的从而是错误的马)。这里出现的传统形式逻辑用来教训逻辑素养不深的人的“指鹿为长角的马”的元思考,比起那理应受到指责而实际未受到指责的自发地产生的“指鹿为马”的元思考来,是要严重得多。由于这已经上升为一种“理论”,因此,非常难以纠正的带有恶习性质的错误。“把恶习当做笑料是为了便于消除恶习”(莫里哀)。研究规律的科学的使命是分清是非,而作为行为准则的规范则专讲对错。客观必然的规律和约束行为的规范之间存在下述原则性区别,如表7.2所示。

表 17.2　客观必然的规律和约束行为的规范之间的区别

规　　律	规　　范
客观必然	人为规定
独立于人的意志和认识	取决于人的意志和认识
不可能违反	可以违反
对象思考按客观标准分	对象行为的是非往往难以区分
有是非,而其本身无所谓对错	可按人为规定分清对错

研究规律的各门科学从来只按确定标准区分是非(物理学区分是否机械运动、基本粒子等,数学区分是否三角形、函数关系等),根本不讲对错。逻辑科学作为科学,理应如此。不管说出“错误的某某”的逻辑工作者本身是否明确信奉约定论,是否自觉地把逻辑当做思维规范,这种说法事实上是建立在约定论的基础之上的。如果说不矛盾律是逻辑科学揭举的客观世界的重要的逻辑规律,那么,约束思维的不矛盾要求则是画蛇添足了:不矛盾要求不仅不能与不矛盾律相提并论,而且,人们对不矛盾律的认识既不保证实现也不导致要求人们在思考时不自相矛盾。人们的思考不仅事实上会而且有时还需要自相矛盾。透彻地熟悉不矛盾律而又根本无视不矛盾要求的医生、检察官、统帅等,是完全清楚这一点的;而当人们从事科学研究时,以自觉地自相矛盾为逻辑机制的“逆向思维”甚至还是一种进行创造的卓越方法。

17.4.3　对一系列重要逻辑术语规定不清晰

对一些重要的逻辑术语(如思维形式)的规定众说纷纭、莫衷一是,且各种说法大都不甚清晰;某些重要的逻辑概念(如判断)由于遇到无力排解的逻辑死锁(如只有在规定清楚判断后才能规定清楚直言判断,却又只有在规定清楚直言判断后才能规定清楚判断),甚至给不出堪称能揭举其内涵的严格确切的定义;给“定义”(一种特殊的命题)下的定义其实只适用于“下定义”(一种逻辑方法),而所举出的以“定义”称之的实例却不是什么“逻辑方法”,而是通过“下定义”这种逻辑方法得出的能揭举被定义概念的内涵的特殊命题(更有意思的是传统形式逻辑却说不清楚这种特殊的命题应隶属了哪一类)。

17.4.4　认为逻辑撇开思维的具体内容

传统逻辑界几乎一致公认传统逻辑研究思维形式(尽管对什么是思维形式的理解有分歧),而思维形式则要“撇开具体内容”(在这一点上没有分歧)。我们知道,任意实际思考的具体内容就是它的全部内容(逻辑内容和经验内容的有机综合),因此,在撇开具体内容(也就是全部内容)后就什么也不会剩下(当

然也不会剩下什么“思维形式”)了。对纷纭而又朦胧的“思维形式”下功夫刻画清楚后,理应相当于包含在实际思考的具体内容中的逻辑内容部分。在逻辑科学考察思考的逻辑内容(相当于刻画清楚后的思维形式)时,撇开的其实只是包含在具体内容中的经验内容部分。传统形式逻辑企图通过对二者都未说清的“思维形式”和“具体内容”来区分包含在实际思考的全部内容(即具体内容)中的逻辑内容和经验内容,也许可以算做是一种提法不确切的启蒙。传统逻辑在介绍各种思维形式(如作为一种命题形式的全称肯定命题)时,总是要事先列举出一大堆在语言表述形态上具有某种共性的实际思考(如以具有共同句型“所有 s 是 p”的语句表述的实际思考,其中的 s、p 是替换词),而这共同的语言表述形态就被当做这类思考的逻辑共性——思维形式。其实,思考的语言表述上的共性未必就是逻辑内容上的共性(如“所有这页上的汉字是少于二十画的”和“所有偶数的平方是偶数”是两个完全不同的命题,前者为对可逐一列举的有限外延的尽举,而后者则为关于无限外延的内涵充分条件);再者,任意实际思考的逻辑内容只要通过对它自身的分析即可得出,无须加到一大堆中去抽取其共性(试问,把这一大堆实际思考搜集在一起的标准是什么?这标准又是怎样获得的?倘若在未搜集这一大堆之前早就心中有数,还要这一大堆干什么);还有,一类实际思考的共性未必是逻辑内容,也可以是经验内容(逻辑内容却两两互异)。

17.4.5 以为逻辑不管真假

“形式逻辑只管思维形式的对错,不管思维内容的真假”,这是一种在传统逻辑界相当有代表性的观点。然而,既然所谓的“思维形式”一经刻画清楚之后其实是思维的具体内容中的逻辑内容部分,撇开的只是具体内容中的经验内容部分,那么,为逻辑科学所研究的思维的逻辑内容作为具体内容的重要组成部分,理应在决定思维的真假时起重要作用。众所周知,逻辑有效命题、自相矛盾命题仅据其逻辑内容即可确定其为恒真、恒假,这类命题的真假由而且仅由逻辑科学来管。诚然,此外的非有效且不矛盾的命题的经验真值不仅取决于其逻辑内容,还取决于其经验内容,即,取决于其具体内容。不过,即使是其中的逻辑结构最简单的原子命题,在具体内容中逻辑内容也至少占一半以上(如在原子命题“地球绕太阳转”中,经验内容为“地球”、“太阳”、“……绕……转”,计 3 项;逻辑内容则为“一个个体”、“另一个个体”、“由上述二个体组成的 2 目组”、“一个 2 元关系”、“上述 2 目组满足上述 2 元关系”,计 5 项;共 8 项,逻辑内容占 $\frac{5}{8}$);随着命题复合层次的增多,逻辑内容所占的比例还将迅速增长(如在复合命题“如果地球绕太阳转,那么太阳不绕地球转”中,经验内容依旧是 3 项,而逻

辑内容却猛增至 9 项,占$\frac{3}{4}$)。这就是说,对经验真值来说,逻辑至少管一半以上,为逻辑外的经验科学所管的则不到一半(当然,把此二者分离开来孤立地看,那就谁也管不充分)。把逻辑真值和经验真值合起来考察,逻辑至少管真假的$\frac{3}{4}$以上。至于"只管形式的对错",则是约定论的提法(从"形式"上说可分是还是非,无所谓对错)。符合实际的提法应是:逻辑管思维的逻辑内容至少管真假的$\frac{3}{4}$。

17.4.6　不研究多元名词

传统形式逻辑中的概念部分只探讨 1 元名词(以论域的子集为外延),不过问在普通逻辑思考实际中经常运用的 $n(n>1)$元名词(即多元名词,以论域上的 n 目组集的子集为外延)。由于传统的名词只限于 1 元的,故而,作为传统简单命题的主宾词的就只能是 1 元名词,传统简单命题就只能是所谓的"直言命题"(又称"性质命题")。这就决定了早先建立的传统的命题体系只能从以 1 元名词为主宾词的直言命题出发。近来,鉴于传统逻辑界开始意识到传统命题种类的残缺,在普通逻辑思考实际中远不够用,从而增添了某些 2 元关系命题、3 元关系命题。尽管如此,那些新添的、依旧品种不全的关系命题犹嫌前无渊源(仍然不研究多元名词)、后无归宿(仍然不介绍真正普遍有效的关系推理,后来增添的所谓的"关系推理"却是建立在某些具有自反、对称、传递等性质的特殊关系之上的,实际上只不过是省略了假言前提的假言推理的特殊情况,多元关系在推理过程中并不起作用——倘不如此分析,则不普遍有效)。鉴于传统逻辑不研究 $n(n>1)$元名词,于是就架空了 n 元关系命题,而 n 元关系真正起作用的普遍有效的关系推理也就无从谈起。尽管从主导思想上说,传统形式逻辑是当之无愧的真正的逻辑学,然而,从逻辑技术上说,至多只能算是挂 1 漏 $n-1$ 的$\frac{1}{n}$的逻辑。

17.4.7　受制于思考的语言表述形态

传统形式逻辑囿于命题的语言表述形态,把在某些(远非一切)语句中有时出现肯、否定语言系词(是、不是)、全特称语言量词(每一个、至少一个)这种语言现象,简单地向逻辑移植,认为在思考的逻辑结构中存在莫须有的肯定、否定逻辑系词,以及全称、特称逻辑量词。从逻辑结构上说,不仅在多元关系命题中没有逻辑系词,即使是在所谓的"直言命题"(其实是从原子命题出发的复合命题)中也并无逻辑系词。作为词语的语言系词只不过是在某些语句中起表述个

体“具有”某性质的作用,从逻辑结构上说,并无与之对应的逻辑系词(更何况还有不少语句从语言上说根本不含有语言系词)。传统逻辑被在某些语句中出现的肯定、否定语言系词所迷惑,认为在逻辑结构上也有肯定、否定逻辑系词,从而认为“直言命题”有既对立又并列的肯定、否定之分。其实,从逻辑上说,任何命题都是肯定的,无论是原子命题还是复合命题;否定命题(最后联结词为“否定词”)是一类复合命题(因此任何原子命题都不是否定命题)。毫不例外,作为一类特殊的复合命题的否定命题当然也是肯定的(否定命题“太阳不是方的”就肯定了“太阳”不具有“方的”性质)。从逻辑结构上说,“否定”是1元联结词;“肯定”则不是联结词,而是为任何命题所必备的逻辑性质(命题倘无此性质,那还有什么真假可言);因此,此二者之间既不对立又不并列。传统逻辑在逻辑理论上引入逻辑量词,势必导致在认识过程中对无限个体域探究每一个个体如何。显然,要确定无限个体域的每一个(全称量词)个体有某性质为真、至少有一个(特称量词)个体有某性质为假(即每一个个体无某性质为真),那确实是超乎精力和生命都有限的人类的能力的。当然,不可知论是荒谬的。不过,对无限域引入逻辑量词则给不可知论者提供了可作为振振有词的依据的逻辑把柄(这只不过是不可知论者钻逻辑史上这一理论失误的空子,然而,这却有助于发现这一理论失误)。人类确实确定了关于无限域的真知,倘若引入逻辑量词,就不能确定关于无限域的真知,因此,在已为人类确定的关于无限域的真知中根本没有逻辑量词(当然,在语言载体中可以有语言量词)。上述这种由于受惑于语言,把语言表述中的语言系、量词当做逻辑系、量词引入原本没有逻辑系、量词的逻辑结构中的做法,可以称为“无中生有”。

与此相反,虽然是同样地由于受惑于语言,传统逻辑那种无视在语言表述中往往省略不提然而在逻辑结构上举足轻重的个体变元的缺陷,则可以称为“化有为无”。为了语言精练,对逻辑结构上的个体变元往往省略不提。譬如,“兰必虫媒”(也可同义地改说成“凡兰皆虫媒”、“每一种兰都是虫媒的”等),其实,说的是“某物是兰,必然,该物虫媒)。在上述情况下,讲究精练的语言省去了表述同一个体变元的词语“某物”、“该物”,并把“必然”两边的两个语句紧缩为两个名词“兰”、“虫媒”,从而把由“必然”联结起来的复合句提炼为只包含一个“必”字的简单句。在这种约定俗成、扑朔迷离的语言现象面前,由于在语句中省略了相应的表述词语,传统逻辑就看不见在逻辑结构中实际上存在的个体变元。既然传统逻辑未发现逻辑结构中的个体变元,于是,那原本无中生有的逻辑量词也便更加缺少逻辑活力,这就决定了统传的所谓的“名词逻辑”名义上分析到“名词”,实际上仍然是最简单的以不予分析的基础命题为最小单位的命题逻辑。传统逻辑由于跳不出语言表述形态的羁绊、理不清思考的语言载体和逻辑结构之间的千丝万缕的纠葛,在逻辑理论上无中生有地引入逻辑系量词,而又化

有为无地拒斥个体变元,从而导致对命题体系的分析失当,且又完全丧失了研究不同于命题逻辑、个体变元在其中起重要作用的真正的名词逻辑的能力。传统逻辑有上述弊端,这本身并不值得过分忧虑;真正使热爱传统逻辑者忧心若焚的还是那种对渐近膏肓的沉疴的赞赏:传统逻辑紧密结合使用自然语言的普通逻辑思考实际! 普通逻辑思考确实使用自然语言,而逻辑科学也无疑必须紧密结合普通逻辑思考实际,然而,真正的紧密结合绝不是让研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律的逻辑科学尾随着约定俗成的语言现象去“无中生有”、“化有为无”,而是理直气壮地借助逻辑语构学,勇往直前地进行逻辑语义学的研究,并在逻辑语用学这片新开垦的土地上辛勤耕耘,把对一定的逻辑结构的自然语言的各种表述形态无误而又完备地逐一揭举出来,并在此基础上去发现逻辑语用学规律(如果有)。

17.4.8　混杂语义、语构、语用

对逻辑科学的早期启蒙式的语义、语构、语用三个方面的研究,在传统形式逻辑是古已有之的。就拿传统三段论第一格 **AAA** 式来说,作为其逻辑含义而往往用一个包含另一个的大中小三个圆圈表示的类包含关系之间的规律、作为“思维形式”的符号表达形态和变形规则的$\dfrac{m\mathbf{A}\mathrm{p} \atop \mathrm{s}\mathbf{A}\mathrm{m}}{\mathrm{s}\mathbf{A}\mathrm{p}}$、作为自然语言表述形态的具有一定句型的句群“所有 m 是 p,并且,所有 s 是 m,所以,所有 s 是 p”,就分别是语义、语构、语用的研究的萌芽状态。这无疑是殊堪珍惜的极其宝贵的历史遗产。

遗憾的是,在传统逻辑中,这语义、语构、语用三者混沌杂糅、互相牵掣。由于要进行被称为“思维形式”的语构或语用的研究而逐渐在理论思想上偏离亚里士多德逻辑原本十分强烈的语义研究倾向,一直发展到众志成城地矢口否认事实上无时不在进行的关于客观世界的逻辑结构和逻辑规律的探索;这种不是作为一种策略而是作为一种错觉的“声东击西”(以为是也声称是在东行,脚却无时不向西迈),这种认识和事实的背离,当然会严重地干扰、阻碍事实上在进行着的语义研究的进展,两千多年来传统逻辑发展的缓慢就是明证;为了贯彻“联系普通逻辑思考实际”(这无疑是正确的),却将“结合自然语言”强调得过了头(这就不恰当了),把语用学作为获得和应用语义学成果的手段转变为逻辑科学的主要目标,这种本末倒置不仅严重阻碍了传统语义学的长足进展,让逻辑去给语法修辞打下手,而且对还十分稚嫩幼小的传统语构学来说也是巨大的压抑,导致在运用严密简明的符号语言方面显得缩手缩脚、欲罢不能、欲做还休;那无时无刻不在实际上进行着而在理论上又被否认着的语义的研究则回过头来给否认它的存在的理论观点、给阻碍着它的进展的软弱的语构的研究、给摆错了位置的喧宾夺主的朦胧的语用的研究提出数不清的令人困惑的难题(如客观基础、

真假对错、演绎是否出新知、已证明是否已证实,以及主词存在、宾词周延、“若p,则q”有时是否也可以是充要条件命题等),使得传统形式逻辑从亚里士多德直到如今始终处在激烈的争论之中。混沌杂糅、互相羁绊的处于萌芽状态的传统的义、构、用三学使得传统逻辑尽管始终争论不休,然而难题久悬未决,进展滞缓。如果说,几乎与其同时成形的姐妹学科数学如今已是一秒千里的流线火箭,那么,传统形式逻辑却依旧是一推三摇唧唧咯咯地响、走得缓慢的独轮小车。

17.4.9 自顾不暇犹越俎代庖

传统形式逻辑由于积弊缠身、发展滞缓,以致时至今日,甚至连小学生、幼儿都会自发地进行的推理(如韩非的“自相矛盾”、从电车是车推出上电车是上车,等等)都无力对之进行逻辑理论分析,与蒸蒸日上、一日千里的各门学科比较起来,真是相形见绌了。然而,尽管传统逻辑对自己的本分无力尽职,却还把手伸得老长,越俎代庖地去包揽众多更其无力处理的事务。譬如,不许人身攻击、禁止偷换论题之类(这些虽然还多少有点沾边,可是由于诸如此类未必在理的禁令对人们毫无约束力,从而完全是多此一举),除此之外,甚至还去推敲语法修辞,在连究竟什么是因果都说不清楚的情况下向人们提供其实早已过时的寻找原因的方法(穆勒五法是五岁小孩就能自发运用的多半不甚灵验的方法,与之有关的一门现代学科是被称为通用技术的“实验计划法”),在规定不了什么是概率的条件下硬要去进行“概率推理”(其实是误把与概率几乎不相干的子样的频率当做概率,与之有关的一门现代的学科是数理统计领域中的“统计推断”),等等。当然,作为普及性的、修养性的逻辑的通俗读物,即使在逻辑科学应尽的本分之外,增添一些与之有关的其他学科(如现代指导安排试验、测算因果联系的实验计划法、对随机事件的出现概率进行区间估计的统计推断)中的成果做些通俗介绍,无疑是十分有益的。然而,遗憾的是,在目前一些传统形式逻辑读物中节外生枝地介绍的并不是这种有益的材料。

上述积弊可说是由来已久的了,下面将介绍的却是新近感染的。

17.4.10 招致数理逻辑的干扰

也许是为了摆脱陈旧简陋的困境,想尽快实现传统形式逻辑“现代化”的迫切愿望,最近若干年来,在传统逻辑界的一些人中出现了一种饥不择食、慌不择路地“吸取数理逻辑”的苗头,企图把这二者简单地、机械地混合起来。然而,作为真正逻辑科学的传统形式逻辑和作为现代基础数学的正统数理逻辑在主导思想(如传统的假言命题、尽举的选言命题的真假不取决于支命题的真假,而数理逻辑的蕴涵命题、析取命题的真值只取决于支命题的真值;传统推理式能确保进行不循环的论证,而数理逻辑的重言式则是必定循环的同语反复,等等)上南辕

北辙、形同冰炭,把此二者混杂在一处,势必引起难以胜数而又无法自拔的自相矛盾。譬如,刚刚说完假言命题的真假不取决于支命题的真假,而取决于前、后件之间是否有必然联系,墨迹未干,一经引入真值表,紧接着不得不说假言命题的真值只取决于支命题的真值;一会儿说,可以有两个命题,谁也不是谁的充分条件,翻过几页去,却又说,任意两个命题,至少有一个是另一个的充分条件;讲论证时依旧强调在论证中出现的推理式能确保不循环,而在讲命题逻辑推理式时却说是必然循环的同语反复;如此等等,不一而足。除此之外,由于人们趋之若鹜然而又不甚恰当地“吸取数理逻辑”而引起的污染,其他性质的不良后果在一些流行的传统形式逻辑读物中随处可见。譬如,把原来的直言命题中的主、宾词改名为“主项”、“谓项”。须知,在数理逻辑看来,直言命题中的“主词”也罢,“宾词”也罢,全都是“谓词”,何以改“宾”为“谓”,而也是“谓”的“主”却依旧呢? 这是其一。再者,在数理逻辑看来,“主词”也罢,“宾词”也罢,全都不是“项”(term),何以均以“项”称之? 又譬如,把系、量词统称为“逻辑常项”,把主、宾词统称为“逻辑变项”,把命题变元称为“命题变项”(顾名思义,“逻辑变项”理应包括然而却又实际上并不包括“命题变项”),而所有这些也全都根本不是“项”。其实,为传统形式逻辑所研究的除了个体常项确实是项之外(然而,偏偏这个真正的项往往不以“项”称之,而名为“单独概念”),其余凡以“项”称之的无一是项。当然,传统的名称“主词”、“宾词”等未必最佳,可谋改善,系词、量词也该有个总称(譬如,“系量词”,这我们已经用过了),但是,引入词不达意、名不副实的“主项”、“谓项”、“逻辑常项”、“逻辑变项”、“命题变项”等,却显然是严重的倒退。

爱之深而责之切。真正热爱源远流长的传统形式逻辑的人们不会把手术刀误认为凶器。

第 18 章　关于 *Cn* 系统的讨论(二)——*Cn* 与传统的“必然”、“可能”、归纳、类比的推理

18.1　*Cn* 的形式定理、导出规则和元定理(3)——*Cn* 与传统的关于“必然”、“可能”的推理

20 世纪 70—80 年代,在一些形式逻辑读本中开始探讨“模态命题”和“模态推理”。在传统形式逻辑中,所谓的“模态”其实是指“必然”、“可能”。现代逻辑中有各色各样的“模态逻辑”,其中的“模态”,从传统逻辑中关于“必然”、“可能”的观点来看,都是十分古怪的。现代逻辑中的“模态”和传统逻辑中“必然”、“可能”之间,并没有什么值得称道的关系,或者说得确切些,这之间的关系是偶然的:当满足“模态”时,可以满足也可用以不满足“必然”、“可能”;当满足“必然”、“可能”时,可以满足也可以不满足“模态”。***Cn*** 中的“必然”、“可能”和传统的“必然”、“可能”相一致,与现代逻辑中的“模态”只具有偶然的关系。

关于“必然”、“可能”,在 ***Cn*** 中有下述的式。

式	含　　义
U(x)⇀A	必然 **A**
U(x)!A	可能 **A**
A⇀B	**A** 必定 **B**
A!B	**A** 可以 **B**

为了顺应汉语的语言习惯,我们把置于 **A** 之前的 **U(x)⇀**、**U(x)!** 读做“必然”、“可能”;把置于 **A**、**B** 之间的⇀、! 读做“必定”、“可能”。前者是后者的特殊情况。此二者,亦即存在于两命题之间的“必然”、“可能”关系,在普通逻辑思考中经常出现,也曾为传统逻辑所关注,然而,现代的模态逻辑只处理置于一命题之前的模态词,没有联结二命题的模态词。

关于“必然”“可能”的推理,在 ***Cn*** 已经证明了以下公式。

公式 203. ├(**U(x)⇀A**)⇀ **A**　　　(必然 **A** 则 **A** 律)

公式 204. ├ **A⇀U(x)!A**　　　(**A** 则可能 **A** 律)

公式 245. $\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!A}$　　（必然 **A** 则可能 **A** 律）

证明：

（1）$\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{A}$　　（公式 203）

（2）$\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!A}$　　（公式 204）

（3）$\vdash \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!A}$　　（（1）、（2），充分条件传递规则）

Q. E. D

应当一提的是：$(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup (\mathbf{A\,!B})$ 在 ***Cn*** 中不可证，只成立：

$$\neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B\,!}\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A\,!B}$$

亦即，需以“**A** 为不可矛盾”为条件。由于 **U(x)** 是定理，故而必定满足“不可矛盾”。因此，成立 $(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!A}$。

公式 246. $\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A}$　　（必然非 **A** 则可能非 **A** 律）

这是公式模式 243 的特殊情况。

公式 247. $\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$　（必然非 **A** 则不可能非 **A** 律）

证明：

（1）$\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightleftharpoons \neg\neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A})$　　（公式 10）

（2）$\vdash (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A}) \rightleftharpoons \neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A})$　　（公式 202）

（3）$\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$　　（（1）、（2），置换定理）

Q. E. D

公式 248. $\vdash \neg(\mathbf{U(x)\,!A}) \rightharpoonup (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$　　（不可能 **A** 则可能非 **A** 律）

证明：

（1）$\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A}$　　（公式 246）

（2）$\vdash (\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightleftharpoons \neg\neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \neg\mathbf{A})$　　（公式 10）

（3）$\vdash \neg\neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightharpoonup \mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A}$　　（（1）、（2），置换定理）

（4）$\vdash \neg(\mathbf{U(x)\,!A}) \rightharpoonup (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$　　（（3），**!**的定义）

Q. E. D

公式 249. $\vdash \neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightleftharpoons (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$（不必然 **A** 当且仅当可能非 **A** 律）

证明：

（1）$\vdash (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A}) \rightleftharpoons (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$　　（公式 6）

（2）$\vdash \neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightleftharpoons (\mathbf{U(x)\,!}\neg\mathbf{A})$　　（（1），**!**的定义）

Q. E. D

公式 250. $\vdash \neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \neg\mathbf{A}) \rightleftharpoons (\mathbf{U(x)\,!A})$（不必然非 **A** 当且仅当可能 **A** 律）

证明：

(1) $\vdash(U(x)!A)\rightleftharpoons(U(x)!A)$　　（公式 6）

(2) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup\neg A)\rightleftharpoons(U(x)!A)$　　（(1)，! 的定义）

Q. E. D

上述 6 个公式可归结为“必然、可能对当关系”方阵。可用图 18.1 表示。

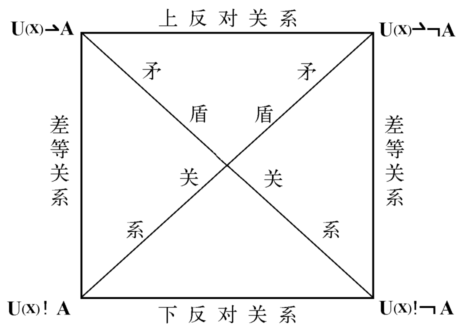


图 18.1　“必然、可能对当关系”方阵

提请注意，这不是“模态方阵”，不是模态对当关系。

还可以继续在 ***Cn*** 中得出下述关于“必然、可能”的公式。

公式 251. $\vdash U(x)\rightharpoonup AB\rightleftharpoons(U(x)\rightharpoonup A)(U(x)\rightharpoonup B)$

（$U(x)\rightharpoonup$ 对 $\wedge$ 的分配律）

这是公式 61 的特殊情况。

公式 252. $\vdash(U(x)\rightharpoonup A)\vee(U(x)\rightharpoonup B)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup A\vee B$

（$U(x)\rightharpoonup$ 对 $\vee$ 的逆分配律）

这是公式 114 的特殊情况。

公式 253. $\vdash U(x)!(A\vee B)\rightleftharpoons(U(x)!A)\vee(U(x)!B)$

（$U(x)!$ 对 $\vee$ 的分配律）

证明：

(1) $\vdash U(x)\rightharpoonup AB\rightleftharpoons(U(x)\rightharpoonup A)(U(x)\rightharpoonup B)$　　（公式 251）

(2) $\vdash U(x)!(A\vee B)\rightleftharpoons(U(x)!A)\vee(U(x)!B)$　　（(1)，对偶定理(2)）

Q. E. D

公式 254. $\vdash U(x)!AB\rightharpoonup(U(x)!A)(U(x)!B)$

（$U(x)!$ 对 $\wedge$ 的分配律）

证明：

(1) $\vdash(U(x)\rightharpoonup A)\vee(U(x)\rightharpoonup B)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup A\vee B$　　（公式 252）

(2) $\vdash U(x)!AB\rightharpoonup(U(x)!A)(U(x)!B)$　　（(1)，对偶定理(2)）

Q. E. D

公式 255. $\vdash(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightharpoonup\neg(U(x)\,!A\ \neg B)$

（必然“**A** 必定 **B**”则不可能“**A** 而非 **B**”律）

证明：

(1) $\vdash A\ \neg B\rightharpoonup\neg(A\rightharpoonup B)$　（公理 5）

(2) $\vdash A\ \neg B\rightharpoonup\neg(A\rightharpoonup B)\rightleftharpoons(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup\neg(A\rightharpoonup B)$　（公式 20）

(3) $\vdash(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B)$　（(1)、(2)，置换定理）

(4) $\vdash(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B)\rightharpoonup(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B)$

（公理 3）

(5) $\vdash(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B)$

（(3)、(4)，充分条件分离规则）

(6) $\vdash U(x)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B)\rightleftharpoons\neg\neg(U(x)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B))$（公式 10）

(7) $\vdash(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightharpoonup\neg\neg(U(x)\rightharpoonup\neg(A\ \neg B))$（(5)、(6)，置换定理）

(8) $\vdash(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightharpoonup\neg(U(x)\,!A\ \neg B)$　（(7)，!的定义）

Q. E. D

公式 256. $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightleftharpoons(U(x)\,!A!\neg B)$

（不必然“**A** 必定 **B**”当且仅当可能“**A** 可以非 **B**”律）

证明：

(1) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)$　（公式 6）

(2) $\vdash A\rightharpoonup B\rightleftharpoons\neg\neg(A\rightharpoonup B)$　（公式 10）

(3) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup\neg\neg(A\rightharpoonup B))$

（(1)、(2)，置换定理）

(4) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup\neg(A!\neg B))$　（(3)，!的定义）

(5) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B)\rightleftharpoons(U(x)\,!A!\neg B)$　（(4)，!的定义）

Q. E. D

公式 257. $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup\neg B)\rightleftharpoons(U(x)\,!A!B)$

（不必然“**A** 必不 **B**”当且仅当可能“**A** 可以 **B**”律）

证明：

(1) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup\neg B)\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup A\ \neg B)$（公式 6）

(2) $\vdash(A\rightharpoonup\neg B)\rightleftharpoons\neg\neg(A\rightharpoonup\neg B)$　（公式 10）

(3) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup\neg B)\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup\neg\neg(A\rightharpoonup\neg B))$

（(1)、(2)，置换定理）

(4) $\vdash\neg(U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup\neg B)\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup\neg(A!B))$

（(3)，!的定义）

(5) $\vdash \neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}) \rightleftharpoons (\mathbf{U(x)}\,!\,\mathbf{A}\,!\,\mathbf{B})$ ((4),!的定义)

Q. E. D

公式 258. $\vdash \neg[\mathbf{U(x)}\,!\,(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})] \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}$

(不可能“**A** 必定 **B**”当且仅当必然“**A** 可以非 **B**”律)

证明:

(1) $\vdash \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}$ (公式6)

(2) $\vdash \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B})$ (公式10)

(3) $\vdash \neg\neg(\mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}) \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}$ ((1)、(2),置换定理)

(4) $\vdash \neg(\mathbf{U(x)}\,!\,\neg(\mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}) \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}$ ((3),!的定义)

(5) $\vdash \neg[\mathbf{U(x)}\,!\,\neg\neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})] \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}$ ((4),!的定义)

(6) $\vdash \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$ (公式10)

(7) $\vdash \neg[\mathbf{U(x)}\,!\,(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})] \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\neg \mathbf{B}$ ((5)、(6),置换定理)

Q. E. D

公式 259. $\vdash \neg[\mathbf{U(x)}\,!\,(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B})] \rightleftharpoons \mathbf{U(x)} \rightharpoonup \mathbf{A}\,!\,\mathbf{B}$

(不可能“**A** 必定非 **B**”当且仅当必然“**A** 可以 **B**”律)

此式的证明步骤同公式 258,略。

传统的名词逻辑原本未包括上述关于“必然、可能”的推理,依据它们的逻辑结构而将其一并归到传统的内涵名词逻辑,并随之纳入当代形式逻辑名词演算 ***Cn*** 系统。

18.2 *Cn* 的形式定理、导出规则和元定理(4)——*Cn* 与传统的归纳推理、类比推理

传统逻辑中的不完全归纳推理、类比推理其实分别是某种特殊演绎。可以找到与传统的不完全归纳推理与类比推理相应的当代形式逻辑定理。

18.2.1 不完全归纳规则

传统的不完全归纳推理包括简单枚举归纳推理和科学归纳推理。其原理是:如果大量的(非全部)某类对象在各种各样的条件下被考察过,而且如果所有被考察过的某类对象都无例外地具有(或没有)某种性质,那么,所有的某类对象都具有(或没有)某种性质。不完全归纳推理前提中的个别性知识只是考察某类的部分对象(并非全部),结论断定的超出了前提已有知识的范围,因而它不具有必然性。所谓“无例外地”是指没有发现任何反面事例,否则,就不能

概括出一般性结论。没有发现矛盾的情况对一般性结论来说是必要的,但还不够,因为没有碰到矛盾的情况并不等于不存在矛盾的情况。

在当代形式逻辑中,不完全归纳规则可表达如下。

规则Ⅺ. $\vdash \mathbf{A}(\mathrm{e}) \models \vdash \mathbf{U}(\mathrm{x})\,!\,\mathbf{A}(\mathrm{x})$　　(不完全归纳规则)

读做:若 $\mathbf{A}(\mathrm{e})$,则可能 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$。

对不完全归纳规则证明如下。

根据代入定理,有:

$$\vdash \mathbf{U}(\mathrm{x}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}(\mathrm{x}) \models \vdash \mathbf{U}(\mathrm{e}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}(\mathrm{e})$$

再据 $\vdash \mathbf{U}(\mathrm{e})$ 和分离规则,又有:

$$\vdash \mathbf{U}(\mathrm{e}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}(\mathrm{e}) \models \neg \mathbf{A}(\mathrm{e})$$

因而:

$$\vdash \neg\neg \mathbf{A}(\mathrm{e}) \models \neg(\mathbf{U}(\mathrm{e}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}(\mathrm{e}))$$

据双否增消律(ⅱ) $\vdash \mathbf{A}(\mathrm{e}) \rightleftharpoons \neg\neg \mathbf{A}(\mathrm{e})$ 和置换定理,有:

$$\vdash \mathbf{A}(\mathrm{e}) \models \neg(\mathbf{U}(\mathrm{x}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}(\mathrm{x}))$$

再据!的定义 $\mathbf{A}(\mathrm{x})\,!\,\mathbf{A}(\mathrm{x}) = \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A}(\mathrm{x}) \rightharpoonup \neg \mathbf{B}(\mathrm{x}))$ 和置换定理,有:

$$\vdash \mathbf{A}(\mathrm{e}) \models \neg(\mathbf{A}(\mathrm{x})\,!\,\mathbf{B}(\mathrm{x}))$$

至此证毕。

与传统的不完全归纳比较,可看出,传统的不完全归纳是从 n 个(并告诉人们说,n 愈大愈可靠)归纳前提 $\mathbf{A}(\mathrm{e}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 出发可能得出必然 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$;而这里是从一个前提 $\mathbf{A}(\mathrm{e})$ 出发,必然得出可能 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$。这二者除了归纳前提的多寡不同外,其余是完全等价的:可能得出必然 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$ 与必然得出可能 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$ 等价。然而,值得注意的是,这二者并不完全等同,其间还有着质与量两方面的差别:从质上看,前者结论 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$ 本身是"必然的",而其推导过程是"可能的";后者的结论 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$ 本身是"可能的",而其推导过程则是"必然的"。因此,当发现一个反例时,如证实了 $\neg \mathbf{A}(\mathrm{e}_i)$ 时,"可能"得出的必然的 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$ 就被推翻。例如,过去人们根据观察得到一些结论:"天下乌鸦一般黑"、"鸟都会飞"、"鱼都用鳃呼吸"、"金属都会沉在水底"、"血都是红的"等,这些都是通过传统的不完全归纳推理得出来的。但是,后来在日本发现了白色的乌鸦,在非洲有不会飞的鸵鸟,在南美洲有用肺呼吸的鱼,金属中的钾和钠可以浮在水面上,在南极洲有一种鱼的血是白色的。这样就推翻了原来的结论。而后者,只要 $\mathbf{A}(\mathrm{e})$ 为真,作为必然得出的"可能 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$"就永远不会被推翻。即从一个 $\mathbf{A}(\mathrm{e})$ 得出可能 $\mathbf{A}(\mathrm{x})$ 的过程是必然的,亦即前提真结论必然真。再从量上看,前者要求以 $\boldsymbol{n}$ 个($\boldsymbol{n} > 1$,而且越大越好)$\mathbf{A}(\mathrm{e}_i)$ 为归纳前提,而后者的归纳前提只要一个就足够了,未必要越多越好,只要归纳是"不完全"的。这就是说,不管有多少例证,那全称结论始终只是"可能的"。当然,在当代形式逻辑中,n 个归纳前提 $\mathbf{A}(\mathbf{e})$ 可必然得出 n 个可能

A(x),然而,这等价于一个可能 **A**(x)。为了得出必定可能 **A**(x),一个 **A**(e)就够了,无需许多个,即使成千上万个 **A**(e),仍然得不出必然 **A**(x)。例如,解剖一只麻雀,就足以确定任意麻雀(甚至鸟类)都有脊椎。然而,观察一万只白天鹅仍然不足以确定天鹅必定是白色的。当 **U** 为无限域时,这成千上万甚至连渺如沧海之一粟都远远谈不上。例如,在两百多年前的 1742 年,哥德巴赫写信给欧拉,提出了每个不小于 6 的偶数都是两个素数之和。有人验算到三亿三千万之时,都表明这是对的,但更大的数目呢? 更大更大的数目呢? 猜想起来也应该是对的。这就是应用传统的不完全归纳推理而提出的著名“哥德巴赫猜想”(即任何一个大于 4 的偶数都能表示为两个奇素数之和)。之所以是“猜想”,是因为结论是或然的而不是必然的,即未必是确实的。虽然现已证明了任何一个大于 4 的偶数都可以表示为一个素数和不少于两素数的乘积之和。这虽离解决“哥德巴赫猜想”的证明只有一步之差,但“哥德巴赫猜想”仍然还是悬而未决。可能最后被证明,也可能最后被推翻。所以说,与其如此,倒不如就从一个 **A**(e)去必然地得出“可能的”**A**(x)。考察一万只白天鹅远不足以确定“天鹅必定是白色的”,澳洲发现一只黑天鹅,这个结论就完结了。然而可以毫不犹豫地说:“天鹅可能是白色的”,即使有成千上万只黑天鹅,我们的结论仍然正确,永远不会被推翻。可见,传统形式逻辑认为归纳前提越多结论就越可靠的提法对于确定是否可能来说是毫无意义的。

探索从 **A**(e)的真到思考甚至断定必然 **A**(x)的过渡的机制,不是演绎逻辑的使命,尽管人们长期来进行这种过渡。在当代形式逻辑中有下述有效式。

$\vdash \mathbf{A}(e)\,!\,(U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x))$(读做:**A**(e)可能“必然 **A**(x)”)

这就是有效式:

$$\vdash \neg[\mathbf{A}(e) \rightharpoonup \neg(U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x))]$$

而这等价于:

$\vdash \neg[(U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x)) \rightharpoonup \neg \mathbf{A}(e)]$ (必然 **A**(x)不是$\neg$**A**(e)的充分条件)。

最后一式的有效性是很明显的。当然,上述有效式均非推理式,只能认为是与传统的不完全归纳相应的有效式。

18.2.2 类比规则

传统的类比推理是根据两个对象在某些属性上类似推出其他属性也类似。从推理的方向来说,它是一种从特定的对象(或领域)推导到另一特定对象(或领域)的推理类型。客观世界是一个有规律的体系,它的各个部分是相互联系的。一事物的各个属性之间也是相互联系、相互制约的。在被类比的对象中的已知共有属性与推出属性之间有规律的联系,构成类比推理的客观基础。如有角、有蹄(的动物)与草食(的动物)习性有依赖关系。又如蛋壳易碎,可以握在

巴掌里却捏不破(因为张力的作用)等。对象的某些属性之间的依赖性、规律性在人类实践中的亿万次重复告诉人们,如果被研究的两个对象在一些特定属性上是相似的,那么它们在其他属性上可能也是相似的。但是,对象之间不仅存在着相似性,而且存在着差异性,此其一。其二,对象中并存的许多属性,有些是对象的本质属性,即固有属性,有些则是非本质属性。例如,血液循环是人体的固有属性,而六指则是个别人身上的属性,是偶有属性。所以,类比推理虽有其客观依据,但是它的结论是或然的。

在当代形式逻辑中,类比规则可表述如下。

规则Ⅻ. $\vdash$ **A**(e) $\vdash\!\!—$ $\vdash$ **U**(e′)!**A**(e′)　　　　（类比规则）

读做:若 **A**(e),则可能 **A**(e′)。

根据不完全归纳规则和代入定理即可证明类比规则。

与传统的类比推理比较可看出,传统逻辑中的类比是从 e 、e′之间有 $n-1$ 项性质相同与 **A**(e)去或然地推出 e′也有第 n 项性质,即 **A**(e′)。这里则是从一项性质相同,即同时有 U(e)和 U(e′),去必然地推出 e′可能具有 A 的性质,即 U(e′)!A(e′)。两者除了“类比前提”的多寡有所区别外,其余是完全等价的:可能得出 **A**(e′)和必然得出可能 **A**(e′)等价。为了必然得出可能 **A**(e′),一个性质相同就够了,无需许许多多个,即使成千上万个性质相同,仍然得不出必然 **A**(e′)。传统逻辑以为类比推理的前提中相同的性质越多越好,实际上就像“东施效颦”一样不可靠。尽管东施和西施有许多相同性质:同龄、同村、同衣着、同发型、同捂着心口、同皱着眉头、说着同样的话,也仍然不可能推出东施也一定更妩媚。然而,可以根据西施、东施都是姑娘,以及西施捂着心口,皱着眉头更妩媚,必然推出,可能东施捂着心口,皱着眉头也更妩媚。所以说,类比推理的前提中相同的性质再多,类比推理也并不因此就向必然靠近一步,它的结论总是或然的。例如,20 世纪人们根据火星和地球有许多相似之处,如同样是行星、圆形、绕轴自转、被大气包围、有水等,推出火星上也有生命的结论,就被 21 世纪空间探测的结果所否定。另一个例子却不同:1785 年,法国物理学家库仑把电荷之间的相互作用与牛顿万有引力定律加以类比,提出了著名的静电相互作用定律,即库仑定律,并在实践中得到了证明。

探索从 **A**(e)为真到思考甚至断定 **A**(e′)的过渡机制,不是演绎逻辑的使命。

在当代形式逻辑中有下述有效式:

$\vdash$ **A**(e)!U(e′)!**A**(e′)　(**A**(e)可能“可能 **A**(e′)”)

这就是有效式:

$$\vdash \neg[\mathbf{A}(e)\rightarrow\neg\neg(\mathbf{U}(e')\rightarrow\neg\mathbf{A}(e'))]$$

这又等价于:

$\vdash \neg[\mathbf{A}(e) \rightarrow (\mathbf{U}(e') \rightarrow \neg \mathbf{A}(e'))]$ （$\mathbf{A}(e)$不是必然$\neg \mathbf{A}(e')$的充分条件）

最后一式的有效性是很明显的。当然,上述有效式亦均非推理式,只能看做与传统的类比推理相应的有效式。

传统形式逻辑中的完全归纳是演绎,这可以说已获得公认。在传统形式逻辑中,原来就有把某些演绎称为“……归纳”的习惯。内容单薄的传统的不完全归纳、类别推理原本与内容丰富的演绎推理三足鼎立。如今按不完全归纳、类比推理的逻辑结构将它们一并归入传统的内涵名词逻辑。这样一来,原本内容上比例失调的传统的演绎、归纳、类比推理将被当代形式逻辑三位一体地正式统一为演绎。可以有实质上不同于演绎的真正的归纳,然而,传统形式逻辑中的不完全归纳不是那种真正的归纳,而是演绎。当然,仍然可以按习惯保留“不完全归纳”、“类比”这样的名称,不过,它们全都是某种特殊的演绎。

第 19 章　关于 *Cn* 系统的讨论(三)
——*Cn* 的无限风光:更精彩的形式定理

19.1　作为联结关系“偶然”和“风马牛”的逻辑含义

自然语词“风马牛”形象生动地表达了一种特殊的逻辑联结关系,用大写白正体拉丁字母 F 表示这种逻辑联结关系。通过探讨,将会得出:偶然是一种特殊的可能,而风马牛则是一种最彻底的、最特殊的偶然,并且,偶然和风马牛都是 2 元的非纯真值联结关系。

可能就是不必然不,不可能就是必然不。偶然就是不必然且可能,不偶然就是必然或不可能。因此,从“必然”出发,不仅可以定义“可能”,而且还可以定义“偶然”:偶然就是不必然且不必然不;不偶然就是必然或必然不。

为正统数理逻辑所研究的纯真值的 1 元、2 元联结词不(¬)、且(∧)的逻辑含义是完全清晰的:是论域{1,0}上的 1 元、2 元真值函数关系。作为逻辑词,必然(⌐)不是为正统数理逻辑所研究的纯真值联结词。事实确实如此,含有联结词“必然”或“偶然”的复合命题的真值,不取决于出现在联结词“必然”或“偶然”的辖域中的支命题的真值。即,前者不是后者的真值函数。由此就确定了:关于作为传统形式逻辑及其当代发展的当代形式逻辑研究对象“偶然”的探讨,不可能在正统数理逻辑范围内进行。关于风马牛的探讨亦如此。

19.1.1　逻辑联结关系“偶然”的逻辑含义

社会发展到 21 世纪的今天,一个普通大学生都知道,任何人的血型一定是而且仅仅是 O、A、B、AB 四型之一。双亲与其子女的血型之间有一定的亲代遗传关系。在信息网上搜索关于血液学的基本知识,或者,随便打开一本《血液学》著作,很容易找到揭举血型遗传规律的表格,如表 19.1 所示。

为了进行逻辑学的探讨,用符号表达式 $p_1(x)$、$p_2(x)$、…、$p_{10}(x)$依次表示 x 的双亲的血型为 O×O 、O×A 、…、AB×AB ,用 $q_1(x)$、$q_2(x)$、$q_3(x)$、$q_4(x)$依次表示 x 的血型为 O、A、B、AB。显然,论域为集(人),个体变元 x 在论域中变,泛

指任何人。血型遗传规律的逻辑表示如表 19.2 所示。

表 19.1 双亲和子女之间血型遗传的关系

父、母的血型	子代可能有的血型	子代不可能有的血型
O×O	O	A、AB、B
O×A	O、A	B、AB
O×B	O、B	A、AB
O×AB	A、B	O、AB
A×A	A、O	B、AB
A×B	AB、O、A、B	—
A×AB	A、B、AB	O
B×B	B、O	A、AB
B×AB	A、B、AB	O
AB×AB	A、B、AB	O

表 19.2 血型遗传规律的逻辑表示

序号	亲代父母		子女的血型(括号内为符号表达式)	
	血型	符号表达式	可能	不可能
1	O×O	$p_1(x)$	$O(q_1(x))$	$A(q_2(x))$,$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$
2	O×A	$p_2(x)$	$O(q_1(x))$,$A(q_2(x))$	$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$
3	O×B	$p_3(x)$	$O(q_1(x))$,$B(q_3(x))$	$A(q_2(x))$,$AB(q_4(x))$
4	O×AB	$p_4(x)$	$A(q_2(x))$,$B(q_3(x))$	$O(q_1(x))$,$AB(q_4(x))$
5	A×A	$p_5(x)$	$O(q_1(x))$,$A(q_2(x))$	$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$
6	A×B	$p_6(x)$	$O(q_1(x))$,$A(q_2(x))$,$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$	—
7	A×AB	$p_7(x)$	$A(q_2(x))$,$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$	$O(q_1(x))$
8	B×B	$p_8(x)$	$O(q_1(x))$,$B(q_3(x))$	$A(q_2(x))$,$AB(q_4(x))$
9	B×AB	$p_9(x)$	$A(q_2(x))$,$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$	$O(q_1(x))$
10	AB×AB	$p_{10}(x)$	$A(q_2(x))$,$B(q_3(x))$,$AB(q_4(x))$	$O(q_1(x))$

这个亲代 ABO 血型遗传表提供了下述逻辑信息。

(1)从序号 1 知:$p_1(x)$只可能 $q_1(x)$,即 $p_1(x)$必然 $q_1(x)$。符号表达式为:

$$p_1(x) \to q_1(x)$$

这就是说,必然是一种唯一的可能,是一种非如此不可的可能,即,必然是一种与之不相容的各种情况都不可能的可能,是一种特殊的可能。

(2)序号 1 还告诉我们:$p_1(x)$不可能 $q_2(x)$,即 $p_1(x)$必然不 $q_2(x)$。这就是说,不可能就是必然不。因此,可以用 **A** 必然不 **B** 来定义 **A** 不可能 **B**。**A** 不可能 **B** 可表示为:

$$\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$$

当其中的 **A** 为 **U(x)**,即当 $\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ 为 $\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}$ 时,就常常说成"不可能 **B**"。符号串 $\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\neg$ 读做"**U(x)** 必然不",在自然语言中就简练地说成"不可能"。

十分显然,**A** 可能 **B** 就是 **A** 不是不可能 **B**。根据 **A** 不可能 **B** 的定义,**A** 可能 **B** 就是 **A** 不是必然不 **B**,可符号地表示为:

$$\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$$

把这个符号式缩写为:

$$\mathbf{A!B}$$

当 **A** 为 **U(x)**,即,当 **A!B** 为 **U(x)!B** 时就常常说成"可能 **B**"。符号串"**U(x)!**"(即"$\neg\mathbf{U(x)}\rightharpoonup\neg$"的缩写)读做"**U(x)** 约合",展开读做"**U(x)** 不必然不",在自然语言中就简练地说成"可能"。

从(1)和(2)可以得出:"**A** 必然 **B**"必然"**A** 可能 **B**",其符号式为:

$$(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A!B})\qquad \text{或者:}\quad (\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$$ ①

(3)从序号 2 知:既然有 $p_2(x)$可能 $q_1(x)$,又有 $p_2(x)$可能 $q_2(x)$,就有在 $p_2(x)$的情况下,其可能不是唯一的。既然 $p_2(x)$可能 $q_2(x)$,因此,$p_2(x)$不必然 $q_1(x)$;既然 $p_2(x)$可能 $q_1(x)$,因此,据可能的定义,$p_2(x)$不必然不 $q_1(x)$。于是有:$p_2(x)$不必然 $q_1(x)$,又不必然不 $q_1(x)$。这可用符号表示为:

$$\neg(p_2(x)\rightharpoonup q_1(x))\wedge\neg(p_2(x)\rightharpoonup\neg q_1(x))$$

称 $p_2(x)$与 $q_1(x)$之间的这种逻辑关系为"偶然"。所谓 **A** 偶然 **B**,就是,**A** 不必然 **B**,并且,**A** 不必然不 **B**。其符号表达式为:

$$\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$$

将其紧缩为:**AOB**。

其中的 O 表示"偶然",是"偶"字的汉语拼音的第一个字母。"**A** 不必然 **B**"即"**A** 可能不 **B**","**A** 不必然不 **B**"即"**A** 可能 **B**",于是, **A** 偶然 **B** 就是: **A** 可能 **B**,并且, **A** 可能不 **B**。其符号表达式为:

$$(\mathbf{A!B})\wedge(\mathbf{A!}\neg\mathbf{B})$$

---

① 深入地讨论将会发现,这里的 **A** 需要满足一个条件:不自相矛盾。自相矛盾的名词一定是空的,而且是逻辑空;然而,空名词未必自相矛盾。假若迄今世界上还没有哥德巴赫猜想的解决者,那么相应的名词为空名词,可是不自相矛盾。于是,成立:哥德巴赫猜想的解决者必然是数学家,必然,哥德巴赫猜想的解决者可能是数学家。

即,偶然可以通过必然来定义,也可以通过可能来定义。这是因为,可能可以通过必然来定义(可能就是不必然不),必然也可以通过可能来定义(必然就是不可能不)。当 **A**O**B** 中的 **A** 为 **U**(**x**)时,**U**(**x**)O**B**(即¬(**U**(**x**)⇀**B**)∧¬(**U**(**x**)⇀¬**B**))就常常说成"偶然 **B**",其中的符号串"**U**(**x**)O"(即¬(**U**(**x**)⇀)∧¬(**U**(**x**)⇀¬)的缩写)读做"**U**(**x**)偶然"或者"**U**(**x**)不必然……,并且,**U**(**x**)不必然不",这在自然语言中就简练地说成"偶然"。很明显,偶然也是一种特殊的可能:同时也可能不的可能,即,可能不如此的可能,或者说是,有与之不相容的可能情况的可能。

(4)从血型遗传表清楚地显示出,以 $q_1(x)$ 为后件,有如表 19.3 所示的情况。

表 19.3　以 $q_1(x)$ 为后件的情况

<table>
<tr><th>前　　件</th><th colspan="2">非纯真值联结关系</th><th>后　　件</th></tr>
<tr><td>$p_1(x)$</td><td>必然</td><td rowspan="2">可能</td><td rowspan="3">$q_1(x)$</td></tr>
<tr><td>$p_2(x)$,$p_3(x)$,$p_5(x)$,$p_6(x)$,$p_8(x)$</td><td>偶然</td></tr>
<tr><td>$p_4(x)$,$p_7(x)$,$p_9(x)$,$p_{10}(x)$</td><td colspan="2">不可能</td></tr>
</table>

例如,$p_1(x)$、$p_2(x)$、$p_4(x)$对于 $q_1(x)$来说,其间的非纯真值联结关系依次是:必然、偶然(这二者均为可能)、不可能。由此便清楚地看得出,作为非纯真值联结词,必然、偶然(这二者均为可能)、不可能,事实上都是 2 元联结词。对于游离于 2 元逻辑关系的后域的单独一个 $q_1(x)$来说,无所谓必然、偶然(这二者均为可能)、不可能。这一重要情况给必然、偶然(这二者均为可能)、不可能等都是 2 元联结词这种传统形式逻辑的逻辑观点提供了胜于雄辩的事实依据。作为真正的逻辑科学,传统形式逻辑由于深深地植根于人的普通逻辑思考实际,因而在这些方面具有旺盛的生命力。然而,以刻画真值函数的纯真值联结词和只施加于个体变元的量词为研究对象的正统数理逻辑在这些方面却一筹莫展。形形色色时髦的模态逻辑把必然、可能等在理论上处理成 1 元的所谓模态词,与上述活生生的普通逻辑思考实际格格不入。列举这些事实的目的不是要贬低正统数理逻辑或模态逻辑在此外的其他领域中的卓越功能,而是建议人们不要硬让它们越俎代庖地在原本不能发挥作用的领域中产生功效。

19.1.2　联结关系风马牛的逻辑含义

还有一种常见的非纯真值联结关系"互相必然"(或,互为充要条件),简称"互必"。以 **A**⇌**B** 表示 **A** 互必 **B**。**A**⇌**B** 读做"**A** 互相必然 **B**"或者简化为"**A** 互必 **B**"。它是(**A**⇀**B**)∧(**B**⇀**A**)的缩写。十分明显,**A** 必然 **B** 可二分为 **A** 互必

B、**A** 必然 **B** 而 **B** 不必然 **A**。称后者为“**A** 单向必然 **B**”，并简称为“**A** 单必 **B**”。

看得出来，“有作案时间偶然作案”同“雪是白的偶然 2 + 2 = 4”中的“偶然”，虽然有逻辑共性，却又有不同的逻辑特性。有作案时间是而且仅仅是作案的必要条件，即是说，“作案必然有作案时间”仅仅是单向必然，确切地说，成立“作案单必有作案时间”。前后件一易位，就得“有作案时间偶然作案”。显然有：“**A** 单必 **B**”必然“**B** 偶然 **A**”。兹简单证明如下：因为有($\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)$\rightharpoonup \neg$($\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$)，并且有($\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$)$\rightleftharpoons$($\mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$)，所以有($\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)$\rightharpoonup \neg$($\mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$)。因而有($\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)$\wedge \neg$($\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$)$\rightharpoonup \neg$($\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$)$\wedge \neg$($\mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$)。这最后的式子的前件就是“**A** 单必 **B**”，后件就是“**B** 偶然 **A**”。把这种成立“**A** 单必 **B**”的“**B** 偶然 **A**”称做单必易位。在“雪是白的偶然 2 + 2 = 4”中，尽管“雪是白的”和“2 + 2 = 4”二者都是真的，可是，二者风马牛不相干。称“雪是白的偶然 2 + 2 = 4”这类偶然为“风马牛”。

下面，试以 **A**、¬**A** 之一为前(后)件，以 **B**、¬**B** 之一为后(前)件，用必然关系将它们联结起来(当然，不管事实上是否成立)，便获得下面 8 种可能情况：

(1) $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$;

(2) $\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$;

(3) $\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$;

(4) $\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$;

(4′) $\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$;

(2′) $\mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$;

(3′) $\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$;

(1′) $\neg \mathbf{B} \rightharpoonup \neg \mathbf{A}$。

由于必然关系具有逆否性，其中 4 对(用序号及相同的序号加撇表示同一对)互相等价(即互为必然关系)。截取其中互不等价的 4 种可能情况如下：

(1) $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$;

(2) $\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$;

(3) $\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$;

(4) $\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$。

若 **A** 、**B** 间至少满足这 4 者之一，则称 **A** 、**B** 之间的关系为“有缘”。用“有缘”的汉语拼音第一个字母 Y 表示关系“有缘”。**AYB** 就表示“**A** 有缘 **B**”。如此，**AYB** 就是($\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)$\vee$ $\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$)$\vee$($\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$)$\vee$($\neg \mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B}$)的缩写。很清楚，**A** 、**B** 可以不满足有缘。例如，“雪是白的”和“2 + 2 = 4”之间就不满足有缘。又如，有甲、乙两个人，“甲、乙同龄”与“甲、乙身高一样”就不满足有缘，因为，甲、乙同龄或不同龄与甲、乙身高一样或不一样之间都没有必然关系。“甲、乙同肤色”与“甲、乙身高一样”、“甲、乙同肤色”与“甲、乙同龄”都不满足有缘。

再如,有 a、b 两个数,“a、b 皆为偶数”和“$a=b$”之间同样不满足有缘。这里的两种不有缘是不同的,稍后再来分析二者的差别。先把日常语言中的用语“风马牛”引入逻辑学,赋予联结词的意义。

若 **A** 与 **B** 是不有缘的,则称 **A** 风马牛 **B**,并以 **AFB** 表示。

其中,F 是“风马牛”汉语拉丁化拼音第一个字母。如此,**AFB** 就是 **AYB** 的否定,就是 $\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$ 的缩写。事实上,客观世界有两种风马牛:风马牛相干和风马牛不相干。①若 **AFB** 且 **A**、**B** 中出现共同的个体变元或个体,则称 **A**、**B** 风马牛相干。上面举出的甲、乙为两个人,“‘甲、乙同龄’F‘甲、乙身高一样’”就属于风马牛相干。“‘甲、乙同肤色’F‘甲、乙身高一样’”、“‘甲、乙同肤色’F‘甲、乙同龄’”皆为风马牛相干。有 a、b 两个数,“‘a、b 皆为偶数’F‘$a=b$’”也是风马牛相干。②若 **AFB** 且 **A**、**B** 中不出现共同的个体变元或个体,则称 **A**、**B** 风马牛不相干。“雪是白的”与“$2+2=4$”就是风马牛不相干的。还可以举出很多实例,譬如,若 x、y、z、w 为任意数,则有 $(x=y)\mathrm{F}(z<w)$,然而,这是风马牛不相干的。

由于 **AOB** 就是 $\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$,因此,$\mathbf{AFB}\rightarrow\mathbf{AOB}$,即,风马牛必然偶然,可是,前后件颠倒过来,偶然却未必风马牛,因为,偶然还包含非风马牛的单必易位。可见,风马牛是一种非单必易位的特殊的偶然。

依据风马牛的定义和必然的逆否性,有:

$$\mathbf{AFB}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$$

而 $$\underline{\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})}\underset{①}{\wedge}\underline{\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})}\wedge\underline{\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})}\underset{②}{\wedge}\underline{\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})}$$
$$\rightleftharpoons\underline{\neg(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})}\underset{③}{\wedge}\underline{\neg(\mathbf{B}\rightarrow\neg\mathbf{A})}\wedge\underline{\neg(\neg\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})}\underset{④}{\wedge}\underline{\neg(\neg\mathbf{B}\rightarrow\neg\mathbf{A})}$$

①即:$\mathbf{AOB}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$

②即:$\neg\mathbf{AOB}\rightleftharpoons\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$

③即:$\mathbf{BOA}\rightleftharpoons\neg(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})\wedge\neg(\mathbf{B}\rightarrow\neg\mathbf{A})$

④即:$\neg\mathbf{BOA}\rightleftharpoons\neg(\neg\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})\wedge\neg(\neg\mathbf{B}\rightarrow\neg\mathbf{A})$

然后依据偶然的定义和否后性,有:

$$\mathbf{AFB}\rightleftharpoons\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AOB}\rightleftharpoons\mathbf{BOA}\wedge\neg\mathbf{BOA}\rightleftharpoons\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AO}\neg\mathbf{B}\rightleftharpoons\neg\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AO}\neg\mathbf{B}$$

在此式中,$\mathbf{AFB}\rightleftharpoons\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AOB}\rightleftharpoons\mathbf{BOA}\wedge\neg\mathbf{BOA}$ 表示 $\mathbf{AFB}\rightleftharpoons\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AOB}$,并且,$\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AOB}\rightleftharpoons\mathbf{BOA}\wedge\neg\mathbf{BOA}$,其余类同。亦即,**A** 风马牛 **B**,当且仅当,**A** 偶然 **B** 且 ¬**A** 偶然 **B**,当且仅当,以 **A**、¬**A** 之一为前(后)件,以 **B**、¬**B** 之一为后(前)件,由此组成的 8 对前、后件之间的关系全都是偶然。这就是本节一开头用自然语言陈述的“风马牛则是一种最彻底的、最特殊的偶然”这个语句的逻辑语义。

对正统的纯真值联结词蕴涵(符号为→)来说,$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$ 恒真,$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$ 恒真,这种性质可称为→的连通性。而非正统的非纯真值联结词⇀(即必然或充分条件)则是不连通的。对于⇀来说,$\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ 可真,这种情况就是偶然。至少在这一点上,⇀与→截然不同,水火不容。既然→是连通的,就有 $\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$ 恒假,更有 $\neg(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\wedge\neg(\neg\mathbf{A}\rightarrow\neg\mathbf{B})$ 恒假。这就铁一般地证明:从→出发,不可能定义偶然,也不可能定义风马牛。要是硬把→当做充分条件关系(即必然),那么世界上就既该没有偶然,更没有风马牛了。然而,客观世界事实上就既有偶然,又有风马牛。因此,任何承认事实上有偶然、有风马牛关系的人,就不能把→充做充分条件关系,就不能把→充做必然关系。

若 **A**、**B** 的真值搭配有 4 种情况,即,**A** 真 **B** 真、**A** 真 **B** 假、**A** 假 **B** 真、**A** 假 **B** 假,则称 **A**、**B** 的真值搭配为全搭配。根据 **AFB** 的定义,若 **A**、**B** 的真值搭配为全搭配,则 **AFB** 必然真。但是,颠倒过来,若 **AFB** 为真,**A**、**B** 的真值搭配未必为全搭配。**AFB** 的这个逻辑性质对于确定某些 **AFB** 来说,有时是有用的。

最后要强调地提请注意的是,本节所论及的必然、可能、偶然、风马牛等,全都是非纯真值的 2 元联结词,全都不能用真值表来定义。

19.2　*Cn* 的形式定理、导出规则和元定理(5)——关于"偶然"和"风马牛"的更精彩的形式定理

下面就会看到形式系统 ***Cn*** 的无限风光!这些更精彩的形式定理——***Cn*** 的公式是龚启荣教授近十年提出并证明的。

由 19.1 节,又有了两个新的联结词"偶然"和"风马牛",分别用大写拉丁字母 O 和 F 表示。现在先给出这两个新的联结词的定义(即缩写)。

定义 11:$\mathbf{AOB}=\mathbf{df}(\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$(O 的定义)

定义 12:$\mathbf{AFB}=\mathbf{df}\ \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$(F 的定义)

下面就证明新的定理。为了增强可读性,现介绍 5 个逻辑方阵。

19.2.1　关于偶然和可以的逻辑方阵

关于偶然和可以的逻辑方阵如图 19.1 所示。

关于图 19.1 所示的方阵,有下面的公式。

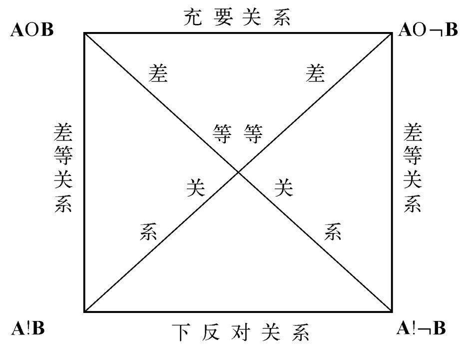


图 19.1　关于偶然和可以的逻辑方阵

公式 260. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B}$（O 与 O ¬的充要律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$ （O 的定义）

(2) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\neg\mathbf{B})$ （O 的定义）

(3) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{B}$ （公式 10）

(4) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{B})$ （(2)、(3)，置换定理）

(5) $\vdash (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{B}) \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$ （公式 43）

(6) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$ （(4)、(5)，置换定理）

(7) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B}$ （(1)、(6)，置换定理）

Q. E. D

公式 261. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$（O 与 ! 差等律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$ （O 的定义）

(2) $\vdash (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ （公理 7）

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ （(1)、(2)，充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 262. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$（O 与 ! 差等律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$ （O 的定义）

(2) $\vdash (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$ （公式 11）

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （(1)、(2)，充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 263. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$（O ! 差等律（ⅲ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}O\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\neg\mathbf{B})$　（O 的定义）

(2) $\vdash (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　（公理 7）

(3) $\vdash \mathbf{A}O\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　（(1)、(2)，充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 264. $\vdash \mathbf{A}O\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$（O!差等律(ⅳ)）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}O\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\neg\mathbf{B})$　（O 的定义）

(2) $\vdash \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg\neg\mathbf{B}$　（公式 10）

(3) $\vdash \mathbf{A}O\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{B})$　（(1)、(2)，置换定理）

(4) $\vdash (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})(\mathbf{A}!\mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$　（公式 11）

(5) $\vdash \mathbf{A}O\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$　（(3)、(4)，充分条件传递规则）

Q. E. D

公式 265. $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup (\mathbf{A}!\mathbf{B}) \upharpoonright (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$（!的不可矛盾下反对律）

证明：

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}!\mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　（公式 218）

(2) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup (\mathbf{A}!\mathbf{B}) \upharpoonright (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$　（(1)，$\upharpoonright$的定义）

Q. E. D

应当一提的是：$(\mathbf{A}!\mathbf{B}) \upharpoonright (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$在 ***Cn*** 中不可证，只成立：

$$\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B}) \rightharpoonup (\mathbf{A}!\mathbf{B}) \upharpoonright (\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$$

即，需以“**A** 为不可矛盾”作条件。

图 19.2 则是以上 6 式当 **A** 为 **U(x)** 时的特殊情况的方阵。其中公式 265 的特殊情况为公式 271，由于 **U(x)** 是定理，故而必定满足“不可矛盾”，因此无须以“不可矛盾”为条件。

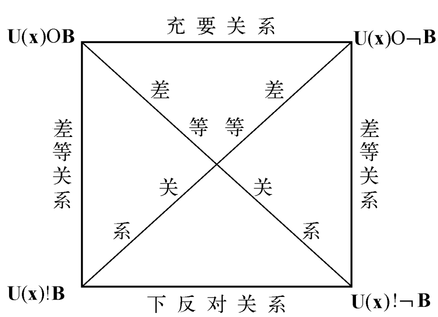


图 19.2　当 **A** 为 **U(x)** 时的特殊情况的方阵(一)

于是就有下面的 6 个公式。

公式 266. $\vdash \mathbf{U(x)OB} \rightleftharpoons \mathbf{U(x)O\neg B}$　　（U(x)O 与 U(x)O—的充要律）

公式 267. $\vdash \mathbf{U(x)OB} \rightharpoonup \mathbf{U(x)!B}$　　（U(x)O 与 U(x)!的差等律(i)）

公式 268. $\vdash \mathbf{U(x)OB} \rightharpoonup \mathbf{U(x)!\neg B}$　　（U(x)O 与 U(x)!的差等律(ii)）

公式 269. $\vdash \mathbf{U(x)O\neg B} \rightharpoonup \mathbf{U(x)!\neg B}$　　（U(x)O 与 U(x)!的差等律(iii)）

公式 270. $\vdash \mathbf{U(x)O\neg B} \rightharpoonup \mathbf{U(x)!B}$　　（U(x)O 与 U(x)!的差等律(iv)）

公式 271. $\vdash (\mathbf{U(x)!B}) \upharpoonleft (\mathbf{U(x)!\neg B})$　　（U(x)!的下反对律）

19.2.2　关于偶然与不必然的逻辑方阵

关于偶然与不必然的逻辑方阵如图 19.3 所示。

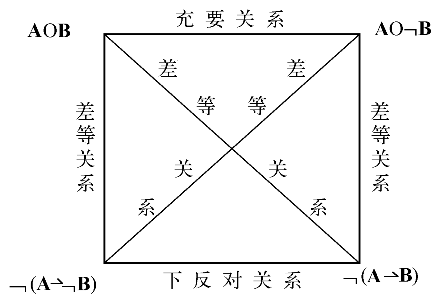


图 19.3　关于偶然与不必然的逻辑方阵

这里又有以下 6 个公式。

公式 260. $\vdash \mathbf{AOB} \rightleftharpoons \mathbf{AO\neg B}$　　（O 的充要律）

公式 272. $\vdash \mathbf{AOB} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})$　　（O 与¬⇀¬的差等律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A!B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})$　　（!的定义）

(2) $\vdash \mathbf{AOB} \rightharpoonup \mathbf{A!B}$　　（公式 261）

(3) $\vdash \mathbf{AOB} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})$　　((1)、(2)，置换定理)

Q. E. D

公式 273. $\vdash \mathbf{AOB} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$　　（O 与¬⇀ 的差等律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{AOB} \rightharpoonup \mathbf{A!\neg B}$　　（公式 262）

(2) $\vdash \mathbf{A!\neg B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$　　（!的定义）

(3) $\vdash \mathbf{AOB} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$　　((1)、(2)，置换定理)

Q. E. D

公式 274. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　(O 与$\neg$ $\rightharpoonup$ 的 差等律(iii))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$　　(公式 264)

(2) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　(!的定义)

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B}\rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　((1)、(2),置换定理)

Q. E. D

公式 275. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$　　(O 与$\rightharpoonup$ $\neg$的差等律(iv))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup\mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$　　(公式 263)

(2) $\vdash \mathbf{A}!\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$　　(!的定义)

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$　　((1)、(2),置换定理)

公式 276. $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\upharpoonright\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$(¬⇀ 的下反对律)

证明:

(1) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup(\mathbf{A}!\mathbf{B})\upharpoonright(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$　　(公式 265)

(2) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{B} \rightleftharpoons\neg((\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　(!的定义)

(3) $\vdash \mathbf{A}!\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$　　(!的定义)

(4) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}) \upharpoonright \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$

((1)、(2)、(3),两次置换定理)

Q. E. D

公式 276 也需要以“**A** 是不可矛盾”为条件。

图 19.4 则是以上 6 式当 **A** 为 **U**(**x**)时的特殊情况的方阵。其中公式 276 的特殊情况是公式 271,由于 **U**(**x**)是定理,故而必定满足“不可矛盾”,因此无须以“不可矛盾”为条件。

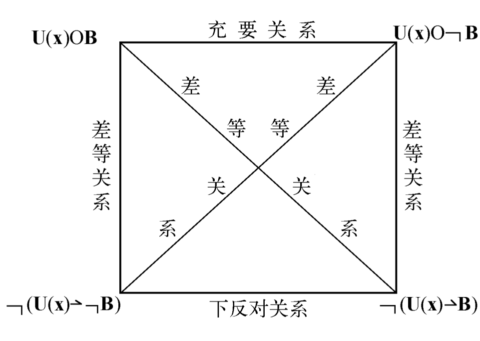


图 19.4　当 **A** 为 **U**(**x**)时的特殊情况的方阵(二)

于是就有下面的 6 个公式。

公式 266. $\vdash \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\neg\mathbf{B}$ （$\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}$ 与 $\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\neg$ 的充要律）

公式 277. $\vdash \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

（$\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}$ 与 $\neg\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\neg$ 的差等律（ⅰ））

公式 278. $\vdash \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B})$

（$\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}$ 与 $\neg\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup$ 的差等律（ⅱ））

公式 279. $\vdash \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

（$\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\neg$ 与 $\neg\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\neg$ 的差等律（ⅲ））

公式 280. $\vdash \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B})$

（$\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathrm{O}\neg$ 与 $\neg\mathbf{U}(\mathbf{X})\rightharpoonup$ 的差等律（ⅳ））

公式 281. $\vdash \neg(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\neg\mathbf{B}) \upharpoonright \neg(\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\mathbf{B})$

（$\neg\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup\neg$ 与 $\neg\mathbf{U}(\mathbf{x})\rightharpoonup$ 的下反对律）

其中公式 276 的特殊情况是公式 281，由于 $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ 是定理，故而必定满足“不可矛盾”，因此无须以“不可矛盾”为条件。

19.2.3　关于风马牛与偶然的逻辑方阵

关于风马牛与偶然的逻辑方阵如图 19.5 所示。

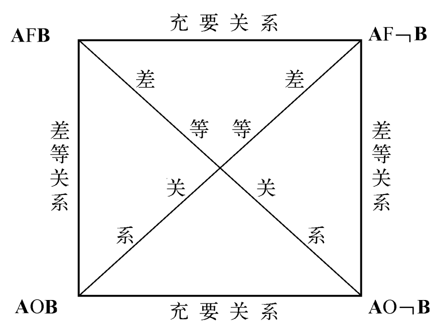


图 19.5　关于风马牛与偶然的逻辑方阵

又有下面 6 个公式。

公式 282. $\vdash \mathbf{AFB} \rightleftharpoons \mathbf{AF}\neg\mathbf{B}$（F 与 F$\neg$ 的充要律）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{AFB} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

（F 的定义）

(2) $\vdash \mathbf{AF}\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$

（F 的定义）

(3) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

$\rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$

（两次用公式 43）

(4) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{F}\ \neg\mathbf{B}$　　((3)、(4),置换定理)

Q. E. D

公式 283. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B}$　　(F 与 O 的差等律(ⅰ))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

(F 的定义)

(2) $\vdash \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\mathbf{B})(\mathbf{A}!\neg\mathbf{B})$　　(O 的定义)

(3) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　(!的定义)

(4) $\vdash \mathbf{A}!\neg\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \mathbf{B})$　　(!的定义)

(5) $\vdash \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　((2)、(3)、(4),两次置换定理)

(6) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \mathbf{B})$
$\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \neg\mathbf{B})$　　(公理 7)

(7) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$　　((1)、(6),置换定理)

(8) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B}$　　((5)、(7),置换定理)

Q. E. D

公式 284. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \neg\mathbf{B}$　　(F 与 O 的差等律(ⅱ))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\mathrm{O}\ \neg\mathbf{B}$　　(公式 260)

(2) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B}$　　(公式 283)

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \neg\mathbf{B}$　　((1)、(2),充分条件传递规则)

Q. E. D

公式 285. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B}$　　(F 与 O 的差等律(ⅲ))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathbf{F}\ \neg\mathbf{B}$　　(公式 282)

(2) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B}$　　(公式 283)

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B}$　　((1)、(2),置换定理)

Q. E. D

公式 286. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \neg\mathbf{B}$　　(F 与 O 的差等律(ⅳ))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{F}\ \neg\mathbf{B}$　　(公式 282)

(2) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \neg\mathbf{B}$　　(公式 284)

(3) $\vdash \mathbf{A}F\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}\ O\ \neg\mathbf{B}$ （(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 260. $\vdash \mathbf{A}O\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}O\neg\mathbf{B}$ （O 与 O ¬的充要律）

19.2.4 关于风马牛与可以的逻辑方阵

关于风马牛与可以的逻辑方阵如图 19.6 所示。

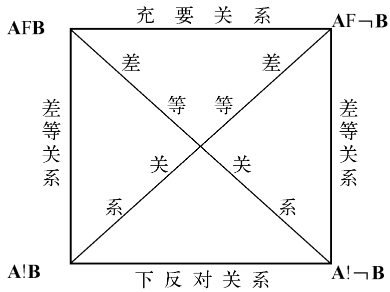


图 19.6 关于风马牛与可以的逻辑方阵

又有下面的 6 个公式。

公式 282. $\vdash \mathbf{A}F\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}F\neg\mathbf{B}$ （F 与 F ¬的充要律）

公式 287. $\vdash \mathbf{A}F\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ （F 与!的差等律(ⅰ)）

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}F\ \mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

（F 的定义）

(2) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （!的定义）

(3) $\vdash\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

$\rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （公式 43）

(4) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

（公理 7）

(5) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

（(3)、(4)，置换定理）

(6) $\vdash \mathbf{A}F\ \mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （(1)、(5)，充分条件传递律）

(7) $\vdash \mathbf{A}F\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ （(2)、(6)，置换定理）

Q. E. D

公式 288. $\vdash \mathbf{A}F\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$(F 与!的差等律(ⅱ))

证明：

(1) $\vdash \mathbf{AF\ B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ (F的定义)

(2) $\vdash \mathbf{A!\neg B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$ (!的定义)

(3) $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\neg\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$ (公理7)

(4) $\vdash \mathbf{AF\ B}\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$ ((1)、(3),置换定理)

(5) $\vdash \mathbf{AF\ B}\rightharpoonup\mathbf{A!\neg B}$ ((2)、(5),置换定理)

Q. E. D

公式289. $\vdash \mathbf{AF\neg B}\rightharpoonup\mathbf{A!B}$ (F与!的差等律(ⅲ))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{AF\ B}\rightleftharpoons\mathbf{AF\neg B}$ (公式282)

(2) $\vdash \mathbf{AF\ B}\rightharpoonup\mathbf{A!B}$ (公式287)

(3) $\vdash \mathbf{AF\neg B}\rightharpoonup\mathbf{A!B}$ ((1)、(2),置换定理)

Q. E. D

公式290. $\vdash \mathbf{AF\neg B}\rightharpoonup\mathbf{A!\neg B}$ (F与!的差等律(ⅳ))

证明:

(1) $\vdash \mathbf{AF\ B}\rightleftharpoons\mathbf{AF\neg B}$ (公式282)

(2) $\vdash \mathbf{AF\ B}\rightharpoonup\mathbf{A!\neg B}$ (公式288)

(3) $\vdash \mathbf{AF\neg B}\rightharpoonup\mathbf{A!\neg B}$ ((1)、(2),置换定理)

Q. E. D

公式265. $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B!\neg B})\rightharpoonup(\mathbf{A!B})\upharpoonright(\mathbf{A!\neg B})$(!的不可矛盾下反对律)

19.2.5　关于风马牛与不必然的逻辑方阵

关于风马牛与不必然的逻辑方阵如图19.7所示

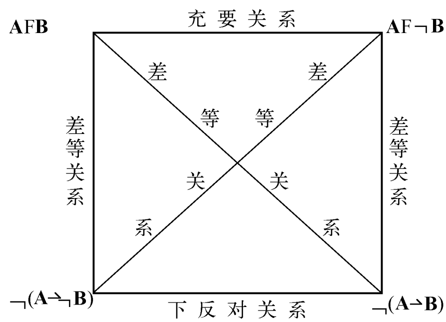


图19.7　关于风马牛与不必然的逻辑方阵

关于图 19.7 所示的方阵，有下面 6 个公式。

公式 282. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B}$ （F 与 F ¬ 的充要律）

公式 291. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （F 与¬⇀的差等律（ⅰ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\mathbf{B}$ （公式 287）

(2) $\vdash \mathbf{A}!\mathbf{B} \rightleftharpoons \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （!的定义）

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 292. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$ （F 与¬⇀的差等律（ⅱ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\neg\mathbf{B}$ （公式 288）

(2) $\vdash \mathbf{A}!\neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$ （!的定义）

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$ （(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 293. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （F 与¬⇀的差等律（ⅲ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （公式 291）

(2) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B}$ （公式 282）

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$ （(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 294. $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \mathbf{B})$ （F 与¬⇀的差等律（ⅳ））

证明：

(1) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup \mathbf{B})$ （公式 292）

(2) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F}\,\mathbf{B} \rightleftharpoons \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B}$ （公式 282）

(3) $\vdash \mathbf{A}\mathrm{F} \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})$ （(1)、(2)，置换定理）

Q. E. D

公式 276. $\vdash \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}!\neg\mathbf{B})\rightharpoonup \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B}) \upharpoonright \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$

（¬⇀¬与 ¬⇀ 的下反对律）

上面虽然列出的是 42 个公式，然而其中包含了近百个推理。两千多年来，传统形式逻辑所收集到的推理的数量比这个数字小。显然，将有无限多个形式定理的 ***Cm*** 系统和 ***Cn*** 系统称做当代形式逻辑形式系统，并不过分！

19.3　*Cn* 的形式定理、导出规则和元定理（6）——*Cn* 中崭新的推理：可能限制规则

在当代形式逻辑 ***Cn*** 系统中有一种推理，称为“可能限制规则”。这是迄今只有当代形式逻辑才有的推理。其他任何引入量词的逻辑系统都不能问津这种推理。这也是 ***Cn*** 的无限风光！

可能的限制规则可表述如下。

规则 VIII.　$\vdash$ U(x)!**A**(x) $\vdash\!\!-$ $\vdash$ U(e)!**A**(e)　　　　（可能限制规则）

读做：若 U(x)!**A**(x)，则 U(e)!**A**(e)。其语义是，从 x 在论域 U 中可能 **A**(x)，得出，e 在论域 U 中可能 **A**(e)。

根据代入定理即可得到同形的可能限制规则。

可能限制规则在日常工作和生活中应用广泛，随处都可以找到可能限制规则的实例。下面是较典型的实例。

1981 年美国总统里根遇刺时，刺客欣克利使用的枪叫左轮手枪。由于左轮手枪对瞎火弹的处理十分简便，性能可靠，因此许多国家的警察和个人仍很喜爱使用它。左轮手枪是一种个人使用的多发装填非自动枪械。其主要特征是枪上装有一颗转鼓式弹仓，内有 5 ~ 7 个弹巢（大多为 6 个），枪弹装在巢中，转动转轮，弹巢可逐个对准枪管。假定某警察手中只剩一颗子弹，他把这颗子弹装进某一个弹巢里。于是，我们立即知道，这个警察一旦扣扳机，任一或空或实的弹巢就可能被击发，装进弹巢的那颗子弹就可能被射出。这就是应用了可能限制规则。按可能限制规则把表达式写出来，就是：

$$\vdash \mathrm{U(x)!p(x)} \vdash\!\!-\ \vdash \mathrm{U(e)!p(e)}$$

其中，论域 U 为所有或空或实的弹巢构成的集；个体变元 x 为在论域 U 中变，即任意的弹巢；e 为某一确定的弹巢；p 为一元关系“……被击发”。于是，对这个规则，用汉语说出来就是：

从

任意弹巢 x 在论域中，可能，任意弹巢 x 被击发。

得出：

弹巢 e 在论域中，可能，弹巢 e 被击发。

更简略的说法是：

从

x 在论域中，可能，x 被击发。

得出：

e 在论域中，可能，e 被击发。

再来看另一实例。关于白子黑子的逻辑、数学问题很多。历届华罗庚金杯赛试题、现在公务员《行政职业能力测验》试题等就都有较多的涉及白子黑子的逻辑、数学问题。这里也有一个关于白子黑子的逻辑推理题。拿一个口袋,装进若干颗围棋白子,而只放进一颗围棋黑子。这样,把手伸进袋子里,任意抓出一颗棋子。这颗被抓出的棋子捏在手心里,手不要放开。此时,不知道抓住的是白子还是黑子,但是,根据可能限制规则,必然推出:我们抓到的可能是黑子!用可能限制规则说就是:

从

x 是口袋(论域)里的棋子,可能,x 是黑子。

得出:

e 是口袋(论域)里的棋子,可能,e 是黑子。 (α)

通俗点讲,这 α 说的是:e 是从口袋里拿出来的,可能,e 是黑子。

可能限制规则的实例俯拾皆是。例如,从“*x* 是自然数,可能,*x* 小于 2”得出“*e* 是自然数,可能,*e* 小于 2”;从“x 是象棋子,可能,x 是老帅”得出“e 是象棋子,可能,e 是老帅”;从“x 是特务,可能,x 是特务头子”得出“e 是特务,可能,e 是特务头子”;从“x 是美国代表团成员,可能,x 是美国元首”得出“e 是美国代表团成员,可能,e 是美国元首”;等等。

19.4 用正统数理逻辑“改造”或“取代”传统形式逻辑是一种常识性错误——论传统形式逻辑跟数理逻辑只是风马牛关系

用汉语“若,则”表达和指称的必然关系(condition,即充分条件关系,用符号⇀表示)与刻画真值函数关系的实质蕴涵关系(material implication,简称蕴涵,用符号→表示)之间是风马牛关系。这个自然语句的逻辑语义是:若 **A** 为含有⇀的式(formula),**B** 为把 **A** 中的⇀用→替换后得出的式,则 **AFB**,即,¬(**A**⇀**B**)∧¬(**A**⇀¬**B**)∧¬(**B**⇀**A**)∧¬(¬**B**⇀**A**)。前面已经讨论过,**AFB** 有一项逻辑性质:若 **A**、**B** 间的真值搭配为全搭配,则 **AFB** 必真。故,只要证明 **A**、**B** 间的真值搭配为全搭配达就证明了本节的论题。在前面就提供过这种证明。要对 **A**、**B** 举出同真、同假、**A** 假 **B** 真的例子,是不难的。即,只须再添上 **A** 真 **B** 假的实例,就完成了 **AFB** 为真的证明。在前面指出过,含有 1 个⇀号的¬(**C**⇀¬**D**)(即 **C!D**——**C** 可能 **D**)在 **C** 真而 **D** 假时可真(如,“路湿可能下雨”,在事实上“路湿而不下雨”也为真);然而,与之相应的变换后的¬(**C**→¬**D**)却和 **C**∧**D** 等值,在 **C** 真 **D** 假时为假。还曾经指出过,含有两个⇀号的¬(**C**⇀**D**)∧¬(**C**⇀¬**D**)(即 **COD**——**C** 偶然 **D**)可真;然而,与之相应的变换后的¬(**C**→**D**)∧¬(**C**→

¬**D**）却与 **C**∧¬**D**∧**C**∧**D** 等值，恒假。

下面，再做一次证明。

设 **A** 为（p（x）⇀q（x））⇀r（x），于是，相应的 **B** 为（p（x）→q（x））→r（x）。以“物体”为论域。令：p（x）表示“x 的温度为 100℃”，q（x）表示“x 熔化”。

用表 19.4 列出实例。

表 19.4　实例

指定 r（x）为	指定 x 为	真　　值	
		A（括号内为原因：依据是否为物理定理）	**B**（括号内为原因：依据真值表）
x 的熔点不高于 100℃	一块冰棍	真（物理的必然）	真（p 假，q 假，r 真）
	常温下一把不锈钢勺子	真（物理的必然）	假（p 假，q 假，r 假）
x 的熔点高于 100℃	一块冰棍	假（物理的必然不）	真（p 假，q 假，r 真）
	常温下一把不锈钢勺子	假（物理的必然不）	假（p 假，q 假，r 假）

“若 x 的温度为 *t*℃时则 x 熔化，必然，x 的熔点不高于 *t*℃”（α）为物理定理。无论 x 取何物，*t* 为几摄氏度，α 常真。可是，“若 x 的温度为 *t*℃时则 x 熔化，必然，x 的熔点高于 *t*℃”（β）与常真的物理定理 α 相反，常假。然而，一经把上述物理定理 α 及其反对命题 β 中指称充分条件关系的“若、则”、“必然”变换成纯真值的“蕴涵”，常真的物理定理 α 就变成可假的了，而常假的反对命题 β 却变成可真的了。用这种真假飘忽不定的实质蕴涵来取代固若金汤的充分条件（或必然）关系，实在是逻辑史上的误会。

必须指出：即使当 **A**、**B** 同真时，这也只不过是一种彻底偶然的风马牛的巧合。因为，在这种时候，**A**、**B** 两者的逻辑语义（决定 **A**、**B** 所以为真的逻辑依据）仍然根本不同：**A** 说的是“若 p 则 q；必然，r”。**A** 是常真的一般的物理定理当指定温度 *t* 为 100°C、物体 x 为一块冰棍时的个别例。像具有 **A** 这样的逻辑语义的语句，凡是学过物理学中熔点的定义的人都听得懂、说得出。可是，实事求是而不故弄玄虚地说，与 **A** 相应的 **B**（即（p→q）→r）的逻辑语义是：不是“不是‘真而 q 假’”真而 r 假。具有这种逻辑含义的语句，占人口 99.999 999% 的人是听不懂、不会说的。鉴于绝大多数的人从来不需要产生具有这种逻辑含义的思想，因而，不曾学会应该怎样来形成和陈述这种话语。在这种情况下，**B** 尽管和 **A** 同为真，然而，其逻辑语义要说相干，也不过是风马牛相干。

这里所进行的是逻辑学的实事求是的科学讨论，不是茶余饭后的随便闲聊。经过论证，获得的结论是：①在经验科学的意义上，或者说，当把具有不同逻辑含义的 ⇀（充分条件）和→（蕴涵）分别应用于经验科学时，**AFB**。称这种情况为⇀和→之间的经验的风马牛。②在逻辑科学的意义上，经过分析，获得的结果

是:传统形式逻辑推理格式和正统数理逻辑形式定理之间的关系仍然是风马牛。这个自然语句的逻辑语义是:若 **A** 为传统形式逻辑命题形式的符号表达式,对 **A** 中指称分充条件(或必然关系)的用 $\rightharpoonup$ 表示的“若,则”替换成实质蕴涵→后得出正统数理逻辑符号表达式 **B**,则“**A** 有效”风马牛“**B** 有效”。

这个结论的证明是轻而易举的,请看表 19.5(其中的符号 ├ 、┤ 分别表示有效、无效。分别读做“栅”、“反栅”)。

表 19.5 (├ **A**)F(├ **B**)的证明

序号	传统形式逻辑(**A**)	数理逻辑(**B**)
1	$\mathbf{A}_1$ 为:├ **C**∧(**C**$\rightharpoonup$**D**)$\rightharpoonup$**D** 有效: **C** 且“若 **C** 则 **D**”,必然,**D**	$\mathbf{B}_1$ 为:├ **C**∧(**C**→ **D**)→ **D** 有效:不是:“**C** 和不是:‘**C** 真而 **D** 假’都真”真而 **D** 假
2	$\mathbf{A}_2$ 为:├(**U**(x)$\rightharpoonup$**C**(x))$\rightharpoonup$**C**(e) 有效:必然 **C**(x),必然,**C**(e)	$\mathbf{B}_2$ 为:┤(**U**(x)→ **C**(x))→**C**(e) 无效:不是:“不是‘**U**(x)真而 **C**(x)假’”真而 **C**(e)假
3	$\mathbf{A}_3$ 为:┤(**C**∧**D**$\rightharpoonup$**E**)$\rightharpoonup$(**C**$\rightharpoonup$**E**)∨(**D**$\rightharpoonup$**E**) 无效:若 **C** 且 **D** 则 **E**,必然, 若 **C** 则 **E**,或,若 **D** 则 **E**	$\mathbf{B}_3$ 为:├(**C**∧**D**→**E**)→(**C**→ **E**)∨(**D**→**E**) 有效:“不是:“不是‘**C** 和 **D** 都真而 **E** 假’”真而“‘不是 **C** 真而 **E** 假’,或‘不是 **D** 真而 **E** 假’”假
4	$\mathbf{A}_4$ 为:┤ **C**$\rightharpoonup$**D** 无效:**C** 必然 **D**	$\mathbf{B}_4$ 为:┤ **C**→**D** 无效:不是“**C** 真而 **D** 假”

这就证明了:(├**A**)F(├ **B**)。

在表 19.5 中,在紧接各式的下边同时写出用自然语言表述的相应的式的逻辑语义。当有(├**A**)F(├**B**)时,对象序号 1 的 $\mathbf{A}_1$、$\mathbf{B}_1$ 这样的实例,虽然 $\mathbf{A}_1$、$\mathbf{B}_1$ 都有效,可是只不过是一种偶然,甚而是一种风马牛的巧合!这时候,$\mathbf{A}_1$、$\mathbf{B}_1$ 的逻辑语义仍然不同,即,$\mathbf{A}_1$、$\mathbf{B}_1$ 有效的依据完全不同:由于 $\mathbf{A}_1$ 有两个独立性,因而能从已知获取新知;$\mathbf{B}_1$ 没有两个独立性,因而不能从已知获取新知,而是同语反复的重言式。稍做进一步的恒等变换就能看出,$\mathbf{B}_1$ 的前件 **C**∧(**C**→**D**)和 **C**∧**D** 等值,前件中已经知道 **D** 了,还去推 **D** 干什么!后件 **D** 对于前件 **C**∧(**C**→**D**)(即 **C**∧**D**)来说怎么可能是新知?

这样,已经证实了:第一,在经验科学的范围内,含有表述充分条件(即,必然)关系的联结词“若……则……”的命题 **A**,如果将其中的“若……则……”用“蕴涵”替换得到 **B**。此时,如果 **A** 与 **B** 相干也只是风马牛相干;第二,在逻辑科学的意义上,含有以充分条件(即,必然)关系为逻辑语义的逻辑号 $\rightharpoonup$ 的传统形式逻辑符号表达式 **A**,一旦将其中的 $\rightharpoonup$ 号替换成蕴涵号→后得出数理逻辑的符号表达式 **B**,这种情况下,如果 **A** 与 **B** 的相对于各自的语义的逻辑有效性相干仍然不过是风马牛相干!这铁的事实证实了:用数理逻辑的蕴涵号→取代经验科学或传统形式逻辑中具有两个独立性的充分条件的 $\rightharpoonup$ 是绝对行不通的!

甚至,用数理逻辑的蕴涵号→取代数理逻辑自身的元语言中所使用的“若……则……”,仍然是绝对行不通的!在数理逻辑中有一系列原始规则和导出规则,这些规则通常都用“若……则……”来表述。作为形式系统的规则“若 **A** 则 **B**”中的“若……则……”的逻辑含义是:可提供一个从 **A** 到 **B** 的形式证明。这就是说,可以写出一个含有 **A** 且以 **B** 为结尾的式的有限系列,其中,除 **A** 外的每一个式,或者是公理,或者是以在前面出现的式为假设使用一次原始规则得出的结果。非常明显,这样的“若 **A** 则 **B**”不是 **A**、**B** 的真值函数,亦即,“若 **A** 则 **B**”成立与否不取决于 **A**、**B** 本身的真值,而是取决于能否写出具有上述性质的被称为“形式证明”的式的有限序列。事实上,这些在数理逻辑论著中出现的“若……则……”具有两个独立性:①第一独立性——可独立于 **A**、**B** 本身是否定理而确定不会 **A** 是定理而 **B** 不是定理;②第二独立性——**A** 是定理可独立于 **B** 是否定理确定。可见,数理逻辑元语言中所使用的“若……则……”就是表述充分条件的⊸,而不是蕴涵→。如果要说数理逻辑作为研究对象的蕴涵→ 跟元语言中作为研究工具的“若……则……”(⊸)之间有什么相干,那也不过是风马牛相干!

下面用事实来证明这个论断,如表 19.6 所示。

表 19.6　数理逻辑中使用的充分条件和蕴涵间的风马牛关系的证明

序　　号	数理逻辑规则中的“若……则……”	数理逻辑形式定理中的→
1	成立:若 **C**,且 **C**→ **D**,则 **D**	成立:**C**∧(**C**→**D**)→**D**
2	成立:若 **A**,则∀x**A**	不成立:**A**→∀x**A**
3	不成立:若 **C** 则 **D**,或,若 **D** 则 **C**	成立:(**C**→**D**)∨(**D**→**C**)
4	不成立:若 **C** 则 **D**	不成立:**C**→ **D**

下面来看表 19.6 中的例 2,“若 **A**,则∀x**A**”作为一个非纯真值的复合命题,只有一个意思,而且是真的(其含义和真值不取决于在 **A** 中出现的个体变元的取值、和 **A** 及∀x**A** 本身的真值)。这就是说,在“若 **A**,则∀x**A**”中没有个体变元的自由出现,其本身也不是其前、后件的真值函数。可见,这种“若,则”不仅不是其前后件的真值函数,而且,能对其在前、后件中的 **A** 中自由出现的个体变元 x、y 起约束作用(此二者具有内在联系)。然而,倘若在 **A** 中有自由出现的个体变元 x,那么,x 在 **A**→∀x**A** 中有自由出现,故而,其意义和真值随自由出现的个体变元 **x** 的取值而定,当 **A** 为可假时,∀x**A** 若为闭命题,则为假,于是,**A**→∀x**A** 可假。

再来看例 3,由于既不可能写出从 **C** 到 **D** 的形式证明,又不可能写出从 **D** 到 **C** 的形式证明(此二者都可以获得元证明,而且是一回事——同义),因而,既不成立“若 **C**,则 **D**”,又不成立“若 **D**,则 **C**”,这两个“若,则”都不是真值函数,其不成立都不取决于 **C**、**D** 本身的真值;可是,作为真值函数,**C**→**D**、**D**→**C**(此二

者不同义)中至少有一为真,因而,复合真值函数($\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D}$)$\vee$($\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{C}$)恒真。

可见,在数理逻辑元语言中,作为研究工具使用的“若,则”与被它所研究的“蕴涵”截然不同,而与为传统形式逻辑所研究的表述充分条件或必然关系的“若,则”完全一致,其逻辑语义也为:可独立于前、后件的真值确定不会是前真而后假。

顺便提及一下近些年来极为流行的一种现状:把必然、可能称为“模态词”,从而把研究必然、可能的逻辑称为“模态逻辑”(modal logic)。在这里要用事实证实的是:所谓的“模态逻辑”其实并不研究普通逻辑思考中的必然、可能。形形色色的“模态逻辑”中的模态词和普通逻辑思考中的必然、可能之间的关系其实也是风马牛关系。暂且不说所见到的各种模态系统总是跳脱不出引入量词的巢臼和把模态词总是放在一个命题之前而不置于两个命题之间这两点弊病,径直用事实来验证“模态逻辑”和传统形式逻辑之间的风马牛关系。以很有代表性的路易斯的 $\mathbf{S}_4$ 系统为例,如表 19.7 所示。

表 19.7　S_4 系统和传统形式逻辑间是风马牛关系的证明

序　　号	传统形式逻辑	模态逻辑 $\mathbf{S}_4$ 系统
1	成立:若:**C** 且若 **C** 则 **D**,则:**D**	成立:$\mathbf{C}\wedge(\mathbf{C}\strictif\mathbf{D})\strictif\mathbf{D}$
2	成立:若:**C**,则:若,若 **C** 则 **D**,则,**D**	不成立: $\mathbf{C}\strictif(\mathbf{C}\strictif\mathbf{D})\strictif\mathbf{D}$
3	不成立:若 **C** 且非 **C**,则 **D**	成立:$\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}\strictif\mathbf{D}$
4	不成立:若 **C**,则 **D**	不成立:$\mathbf{C}\strictif\mathbf{D}$

表 19.7 中的“成立”、“不成立”是指:是否逻辑有效。在模态逻辑 $\mathbf{S}_4$ 系统一栏中,出现的符号$\strictif$(可读做“鱼钩”)为 $\mathbf{S}_4$ 中的“严格蕴涵”号,其逻辑语义为“必然 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$”,而所谓的“必然”则是指“恒真”。可见,这种作为“模态词”的“必然”不仅是 1 元的,而且,还深深地植根于真值函数之中,是一种特殊的、恒真的真值函数的性质。可是,普通逻辑思维中的“必然”则有一独(有时还具有二独),既不是真值函数,又不是恒真真值函数的性质。因此,“模态逻辑”中的“模态词”与普通逻辑思考中的“必然”、“可能”如果要说相干,也仍然不过是风马牛相干。正因为如此,在讨论“必然”、“可能”并进而讨论“偶然”、“风马牛”时,就始终不曾使用“模态”这个被严重污染了的词语。

实际情况是:不仅实质蕴涵与必然之间只是风马牛关系,就是严格蕴涵、模态词与必然之间也只是风马牛关系。客观存在是严峻的,然而的确是事实!

尽管如此,近些年来,企图用数理逻辑“改造”或“取代”传统形式逻辑的主张和行为愈演愈烈!

华裔美籍数理逻辑家王浩曾经深刻地指出:“形式系统(数学的——引者注)的令人感兴趣的用途是对形式系统进行探讨,得出关于形式系统的一般结

论(因为它们是形式的),如前面陈述的 Lowenheim-Skolem 定理[①],以及下面即将考察的 Godel 不完全性定理[②]等。认为研究数理逻辑首要的是从事形式思维,这是一种通常的误解。”[③]这就是说,建立数理逻辑两个演算形式系统,其目的并不在于推导出一系列系统中的形式定理来给人们在普通逻辑思维中当做思维形式使用,而是在于把整个形式系统作为研究对象,讨论作为整体的形式系统具有什么性质。采用元逻辑得出的关于系统的元定理就是用来揭举整个形式系统的性质的。通常,形式系统需要证出一定数量的系统内的形式定理,然而,这是为去得出关于系统的元定理做准备的。数理逻辑家胡世华、陆钟万在《数理逻辑基础》(科学出版社 1982 年版)第 366 页也指出“构造形式数学系统的目的不是在于进行形式推理,而是在于把形式系统本身作为对象加以研究,例如在 §53 中将要陈述的哥德尔不完备性定理就是通过这种研究而获得的。”正统数理逻辑的根本使命在于构造数学的形式系统,以便把整个形式系统作为研究对象来讨论元数学问题。而传统形式逻辑的主要目的则是向人们提供作为从已知获取新知的工具的推理格式,指导人们在认识世界和改造世界去获取新知的过程中有效地进行推理论证。与数理逻辑研究不同,构造符合人的普通逻辑思维的当代形式逻辑公理系统的目的则包括两个方面:第一,去获取符合人的普通逻辑思维的形式推导(推理和导出);第二,把形式公理系统本身作为对象进行研究。在构造和展开 ***Cm*** 系统和 ***Cn*** 系统时就是这样做的。

显然,结论是:企图用数理逻辑“改造”或“取代”传统形式逻辑是一种常识性错误。

19.5　*Cn* 系统是相干逻辑 *RQ* 系统所不可比拟的

无论从构造形式系统的指导思想还是从构造出的形式系统本身进行考察,当代形式逻辑 ***Cm*** 系统和 ***Cn*** 系统都是相干逻辑 ***R*** 系统和 ***RQ*** 系统所不可比拟的。

(1)客体说的当代形式逻辑继承并发展了传统形式逻辑关于充分条件关系的理论,在坚持传统形式逻辑深刻正确的主导思想的前提下,揭示了充分条件关系的两个独立性,深刻地、如实地刻画清楚了充分条件关系。相干逻辑对充分条件关系则无力问津。相干逻辑不知道什么是充分条件关系。充分条件关系有什么性质,相干逻辑也不知道。相干逻辑仅仅是通过相干蕴涵的前、后件要有共同的命题变

---

① 若在狭谓词演算形式系统 ***F*** 的框架中表述的任一个形式系统确有模型,则它就有可数模型。

② 第一不完全性定理是:对任意一个数论的形式系统 ***S*** 来说,在 ***S*** 中构造不可判定的数论问题的方法是给定的。第二不完全性定理是:在包含初等数论的古典数学形式系统 ***S*** 内不能证明 ***S*** 的协调性。上述定理均系关于形式系统的元定理。

③ 王浩.《数理逻辑通欲讲话》,科学出版社 1981 年版,第 14 页。

元来刻画“相干蕴涵”——相干逻辑对于当代形式逻辑来说，确实是小巫见大巫！

(2)从语义上看，当两个命题 **A**、**B** 满足相干蕴涵关系时，未必满足充分条件关系；当 **A**、**B** 满足充分条件关系时，也未必满足相干蕴涵关系。也就是说，相干蕴涵关系和充分条件关系之间的关系就是在第 19.1 节讨论过的“风马牛关系”。

(3)从语构上看，当代形式逻辑继承并发展了传统形式逻辑，从刻画清楚后的充分条件关系出发定义了传统形式逻辑选言推理中本来意义的选言命题，提出了和传统形式逻辑主导思想一脉相承的尽举选言命题，严格地将其区分为尽举相容、尽举反相容、尽举不相容三种选言命题，并由此提出了和传统形式逻辑主导思想相一致的三种选言推理(从而尖锐地指出了流行的形形色色的逻辑体系在选言命题、选言推理问题上的弊病)；相干逻辑则无能力继承传统形式逻辑关于选言命题、选言推理的理论成果，甚至拒斥了传统形式逻辑的选言推理。这就是说，相干逻辑在免除“蕴涵怪论”的同时又拒斥了传统形式逻辑中有效性非常显然的公式(即定理)——提请注意的是，对公理系统来说，这种有效性非常显然的公式有无穷多个！

(4)当代形式逻辑命题演算 ***Cm*** 系统与相干逻辑命题演算 ***R*** 系统在事实上是不等价的。没有量词的当代形式逻辑名词演算 ***Cn*** 系统与带量词的相干逻辑谓词演算系统 ***RQ*** 系统是绝对不等价的。提请注意，这里的“绝对不等价”是指：在不改变 ***Cn***、***RQ*** 形式语言的条件下，任意改变 ***Cn***、***RQ*** 的公理和规则，均不能使 ***Cn***、***RQ*** 等价。***Cn***、***RQ*** 的差异不在公理、规则这个层次上，而在形式语言这个层次上。即，对 ***Cn***、***RQ*** 的形式语言做出纯语构(不顾及语义)对照，***Cn***、***RQ*** 的形式语言中的式未必能互相对译：***Cn*** 的式对译后可以不是 ***RQ*** 的式，或者，***RQ*** 的式对译后可以不是 ***Cn*** 的式。***Cn*** 与 ***RQ*** 可做如表 19.8 所示的纯语构对照。

表 19.8　*Cn* 与 *RQ* 纯语构对照

序　　号	***Cn***	***RQ***
1	U(x)⇀	∀x
2	U(x)!	∃x
3	⊢U(x)	无
4	¬	¬
5	∧	∧
6	↾	+
7	!	o
8	⇀	→

在这个纯语构对照中，可看出以下

(5)***Cn*** 中的符号串 U(x)⇀ 和 U(x)!的子符号串中都有式“U(x)”，而且是可证式，即 ⊢U(x)。而 ***RQ*** 中的 ∀x、∃x 的子符号串中都没有是式的子符号

串，更不用说有可证式了。

（6）***Cn*** 中出现的个体变元 x 在可代入的条件下可用任意项（变项或常项）代入，而 ***RQ*** 中出现的个体变元 x 只可以更名为其他个体变元（如 y），而在任何条件下都不能用任意项代入，特别是不能用常项代入。

（7）1986 年 8 月 5 日至 1986 年 9 月 15 日，龚启荣、蔡忠仁教授和林邦瑾教授在应邀到清华大学夏季小学期给 210 名学生讲学期间，他们看到了张清宇先生的一篇题目为《试谈相干逻辑》（《哲学研究》1985 年第 10 期，以下简称《试》文）的文章。这篇文章非常推崇相干逻辑，说“相干逻辑是数理逻辑中一个较新的独立分支，作为古典逻辑的替换物，它有着宽广的发展前途。”龚启荣老师把张先生文中介绍的相干逻辑的一个定理（**A**→**B**）→（**A**o**B**）（见该杂志第 51 页）作为练习题布置给全体学生作为课外作业，要求按相干逻辑 ***R*** 系统和 ***Cm*** 系统形式语言对照互相对译成 ***Cm*** 系统的表达式后，相对应的表达式是否是 ***Cm*** 系统的定理。学生按照 ***Cm*** 系统和 ***R*** 系统的形式语言对应关系（见表 19.9）进行翻译对应。

表 19.9　*Cm* 和 *R* 系统的形式语言对应

	Cm	***R***
4	$\neg$	$\neg$
5	$\wedge$	$\wedge$
6	$\upharpoonright$	+
7	!	**o**
8	$\rightharpoonup$	$\rightarrow$

于是，相干逻辑 ***R*** 系统的定理（**A**→**B**）→（**A**o**B**）就翻译成 ***Cm*** 系统的下面的表达式：

$$(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A}\,!\,\mathbf{B}) \tag{θ}$$

按照 ***Cm*** 系统的除外方阵（见第 12.2 节）给 ***Cm*** 的这个表达式赋值。结果，210 名同学的结果都一样：表达式（**A**⇀ **B**）→（**A**!**B**）皆取非特选值 −2。证明此表达式不是 ***Cm*** 系统的定理！

赋值的过程如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathbf{A} & \rightharpoonup & \mathbf{B}) & \rightarrow & (\mathbf{A} & ! & \mathbf{B}) \\
-2 & & -2 & & -2 & & -2 \\
 & +2 & & & & -2 & \\
 & & & -2 & & &
\end{array}$$

按照纯语构的互相对译的情况是：互相对应的（**A**→**B**）→（**A**o**B**）是 ***R*** 系统

的定理,而相对应的$(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B})\to(\mathbf{A}!\mathbf{B})$却不是 ***Cm*** 系统的定理。可见,***Cm*** 系统与 ***R*** 系统不等价。鉴于 ***Cn*** 系统建立在 ***Cm*** 系统基础之上,***RQ*** 系统建立在 ***R*** 系统基础之上。显然,***Cn*** 系统与 ***RQ*** 系统不等价。认为二者等价,是一种误解或曲解。

(8)***R*** 和 ***RQ*** 系统是很怪的形式系统。

更有意思的是,***R*** 系统有下述定义:

$\mathbf{A}+\mathbf{B} =\mathrm{df}\ \neg\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ (《试》文称为“内涵析取”)

$\mathbf{A}\circ\mathbf{B} =\mathrm{df}\ \neg(\neg\mathbf{A}+\neg\mathbf{B})$ (《试》文称为“内涵合取”)

(这二式皆见该杂志第 50 页)

于是,就有下述恒等变形:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})\\
=&(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to\neg(\neg\mathbf{A}+\neg\mathbf{B})\\
=&(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to\neg(\neg\neg\mathbf{A}\to\neg\mathbf{B})\\
=&(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to\neg(\mathbf{A}\to\neg\mathbf{B}) \qquad (\alpha)
\end{aligned}$$

由于$(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})$是 ***R*** 系统的定理,故而 α 当然是 ***R*** 系统的定理。根据定理模式的理论,与 α 同形的下面的式也是 ***R*** 系统的定理。

$$(\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}\to\mathbf{C})\to\neg(\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}\to\neg\mathbf{C}) \qquad (\beta)$$

又据 ***R*** 系统的公理 6,有:

$\mathbf{A}\to\mathbf{B}\to\mathbf{A}$ (见该杂志第 49 页,《试》文将其编号为 ***R***6)

得:

$$\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}\to\mathbf{C} \qquad (\gamma)$$

根据 ***R*** 系统的分离规则(《试》文叫“$\to$**E**”):

从 $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 和 **A** 可推出 **B**

由 β 和 γ 进行分离,就得:

$$\neg(\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}\to\neg\mathbf{C}) \qquad (\delta)$$

又据 ***R*** 系统的公理 7,有:

$\mathbf{A}\to\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ (见该杂志第 49 页,《试》文将其编号为 ***R***7)

得与其同形的式:

$$\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{C}\to\neg\mathbf{C} \qquad (\varepsilon)$$

太惊人了,张清宇先生想不到的事发生了:鉴于 δ 和 ε 矛盾,故 ***R*** 系统是不协调的、矛盾的形式系统!建立在 ***R*** 系统之上的 ***RQ*** 系统依然是不协调的、矛盾的形式系统!

可是,***Cm*** 系统排除$(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\to(\mathbf{A}!\mathbf{B})$,也排除与 **α** 对译后的下面的式:

$$(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$$

按本著作的表示法,这两个式在 ***Cm*** 中表示为:

$\dashv(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$

$\dashv(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightarrow(\mathbf{A}!\mathbf{B})$

这两个式在 ***Cm*** 中称为除外式(⊣ 表示“不可证”),而在 ***R*** 中却是定理。可见 ***R*** 是个很怪的形式系统!自然,***RQ*** 同样是个很怪的形式系统!怎么能说“它有着宽广的发展前途”呢!它怎么能与 ***Cm***、***Cn*** 系统比美呢!

最后想补充的是,在清华大学期间,相当多的同学除了对 θ 式用除外方阵证明外,还按初始联结词给$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})$经恒等变形后的式 α 所对应的 ***Cm*** 的式赋值。所得结果如下。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(\mathbf{A} & \rightharpoonup & \mathbf{B}) & \rightarrow & \neg & (\mathbf{A} & \rightharpoonup & \neg & \mathbf{B}) \\
-2 & & -2 & & & -2 & & & -2 \\
 & & & & & & & +2 & \\
 & & & & & & +2 & & \\
 & +2 & & & -2 & & & & \\
 & & & -2 & & & & &
\end{array}
$$

提请注意,210 名同学做了练习,结果都一样:①***Cm*** 除外 θ 和 α;②***R*** 系统及建立在 ***R*** 之上的 ***RQ*** 系统不是好的形式系统,不可同 ***Cm***、***Cn*** 系统媲美!

第 20 章　关于 *Cn* 系统的讨论（四）——*Cn* 与正统一阶谓词演算 *F*

20.1　*Cn* 与 *F* 的纯语构对照

为了对 ***Cn*** 和 ***F*** 做纯语构的对照，需要建立二者之间的对应关系，如表 20.1 所示。

表 20.1　***Cn*** 与 ***F*** 之间的对应关系

Cn	***F***
⇀	→
U(x)	∀x
U(x)!	∃x

在把 ***Cn*** 和 ***F*** 做纯语构的对照时，不能忘记二者在语义上的原则性差别，见表 20.2。

表 20.2　***Cn*** 和 ***F*** 在语义上的原则性差别

Cn		***F***	
式	含　义	式	含　义
A(x)⇀**B**(x)	**A** 必定 **B**； x 满足 **A** 是 x 满足 **B** 的充分条件	**A**(x)→**B**(x)	x 满足 **A**、x 满足 **B**，在这二者中至少是其中之一
U(x)⇀**A**	必定 **A**； x 在论域 **U** 中是 x 满足 **A** 的充分条件	∀x**A**	对于论域中的每一个 x 来说，都有 x 满足 **A**
U(x)! **A**	可能 **A**； x 在论域 **U** 中不是 x 不满足 **A** 的充分条件	∃x**A**	论域中至少有一个 x，使得 x 满足 **A**

F 与 ***Cn*** 的语义完全不同，***F*** 语义畸变严重，人们觉得可用是由于自发地把它改造为 ***Cn*** 的语义。

从表 20.2 所示的对照表中可以看出，左边的 ***Cn*** 式是用来刻画内涵的充分条件关系的（请回顾关于两个独立性的讨论），对于无限个体域来说，可用在手段上是有限的内涵的科学分析方法确定其是否成立；右边的 ***F*** 的式则是用来描述外延的个体－真值函数关系的（彻底舍弃两个独立性，具有两个依赖性），对于无限个体域来说，不知道该用什么样的在手段上是有限的方法确定其是否成立。

以上述纯语构的对应关系作为词典就可以在 ***Cn*** 和 ***F*** 的形式语言之间进行互译。在做出这种互译的基础上可以发现这样的事实：按照这种纯语构的对应关系，***Cn*** 定理集和 ***F*** 定理集互相只包含对方的真部分，亦即，一部分 ***Cn*** 定理是

F 定理，一部分 ***Cn*** 定理不是 ***F*** 定理，一部分 ***F*** 定理是 ***Cn*** 定理，一部分 ***F*** 定理不是 ***Cn*** 定理。这三个部分都是无限集，因此，难以说清这三者之间在数量上的比例。这里，依旧要反复强调的是：即便同是 ***Cn*** 和 ***F*** 定理的那个真子集，也只不过是经过纯语构对应互译后才成为共同部分，在互译前，这部分 ***Cn*** 定理和 ***F*** 定理无论从语构上还是从语义上说，仍然有原则性、实质性的区别。

鉴于在正统的一阶谓词演算 ***F*** 中采用了量词和关于量词的公理和规则，从普通逻辑思维的角度来看，这三者在某种程度上净化了 ***F***，使得正统命题演算 ***P*** 的相当一部分蕴涵怪论没有与之相应的 ***F*** 的带量词的形式定理。

例如，在 ***P*** 中有怪论：

$$\vdash(\mathbf{AB}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})$$

然而，在 ***F*** 中却是：

$$\dashv\forall x(\mathbf{AB}\rightarrow\mathbf{C})\rightarrow\forall x(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})\vee\forall x(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})$$

正由于此，做前述纯语构对应后，在数理逻辑读本中通常列出的 ***F*** 的形式定理(是个有限集)与 ***Cn*** 的共同部分就明显地超过了 ***P*** 与 ***Cm*** 的共同部分。表 20.3 列举了一些互相对应的在 ***F*** 和 ***Cn*** 中成立的形式定理的例子。

表 20.3　***F*** 和 ***Cn*** 中成立的形式定理实例

序号	***F***	***Cn***
1	$\forall x\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A}$	$(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup\mathbf{A}$
2	$\mathbf{A}\rightarrow\exists x\mathbf{A}$	$\mathbf{A}\rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{A}$
3	$\forall x\mathbf{A}\rightarrow\exists x\mathbf{A}$	$(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{A}$
4	$\forall x\mathbf{A}\leftrightarrow\neg\exists x\neg\mathbf{A}$	$U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons\neg(U(x)!\ \neg\mathbf{A})$
5	$\exists x\mathbf{A}\leftrightarrow\neg\forall x\neg\mathbf{A}$	$U(x)!\ \mathbf{A}\rightleftharpoons\neg(U(x)\rightharpoonup\neg\mathbf{A})$
6	$\forall x(\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B})\rightarrow(\forall x\mathbf{A}\leftrightarrow\forall x\mathbf{B})$	$[U(x)\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B})]\rightharpoonup[U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons U(x)\rightharpoonup\mathbf{B}]$
7	$\forall x(\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B})\rightarrow(\exists x\mathbf{A}\leftrightarrow\exists x\mathbf{B})$	$[U(x)\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B})]\rightharpoonup[U(x)!\ \mathbf{A}\rightleftharpoons U(x)!\ \mathbf{B}]$
8	$\forall x\mathbf{A}\forall x\mathbf{B}\leftrightarrow\forall x(\mathbf{AB})$	$[(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A})(U(x)\rightharpoonup\mathbf{B})\rightleftharpoons U(x)\rightharpoonup\mathbf{AB}$
9	$\exists x(\mathbf{AB})\rightarrow\exists x\mathbf{A}\exists x\mathbf{B}$	$U(x)!\ \mathbf{AB}\rightharpoonup(U(x)!\ \mathbf{A})(U(x)!\ \mathbf{B})$
10	$\exists x\mathbf{A}\vee\exists x\mathbf{B}\leftrightarrow\exists x(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	$(U(X)!\ \mathbf{A})\vee(U(x)!\ \mathbf{B})\rightleftharpoons U(x)!\ (\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$
11	$\forall x\mathbf{A}\vee\forall x\mathbf{B}\rightarrow\forall x(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	$(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A})\vee(U(x)\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$
12	$\forall x(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\forall x\mathbf{A}\rightarrow\forall x\mathbf{B}$	$[U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}](U(x)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\mathbf{B}$
13	$\forall x(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\exists x\mathbf{A}\rightarrow\exists x\mathbf{B}$	$(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(U(x)!\ \mathbf{A})\rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{B}$
14	$\forall x(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\forall x(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})\rightharpoonup\forall x(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})$	$(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(U(x)\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{C})\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C}$
15	$\forall x(\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B})\forall x(\mathbf{B}\leftrightarrow\mathbf{C})\rightarrow\forall x(\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{C})$	$[U(x)\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B})][U(x)\rightharpoonup(\mathbf{B}\rightleftharpoons\mathbf{C})]\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{C})$
16	$\forall x(\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B})\leftrightarrow\forall x(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\forall x(\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})$	$U(x)\rightharpoonup(\mathbf{A}\rightleftharpoons\mathbf{B})\rightleftharpoons(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})(U(x)\rightharpoonup\mathbf{B}\rightharpoonup\mathbf{A})$
17	$\forall x\forall y\mathbf{A}\leftrightarrow\forall y\forall x\mathbf{A}$	$U(x)\rightharpoonup U(y)\rightharpoonup\mathbf{A}\rightleftharpoons U(y)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}$
18	$\exists x\exists y\mathbf{A}\leftrightarrow\forall y\exists x\mathbf{A}$	$U(x)!\ U(y)!\ \mathbf{A}\rightleftharpoons U(y)!\ U(x)!\ \mathbf{A}$
19	$\exists x\forall y\mathbf{A}\rightarrow\forall y\exists x\mathbf{A}$	$U(x)!\ (U(y)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup U(y)\rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{A}$
20	$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\vdash\forall x\mathbf{A}\rightarrow\forall x\mathbf{B}$	$\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\vdash(U(x)\rightharpoonup\mathbf{A})\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup\mathbf{B}$
21	$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\vdash\exists x\mathbf{A}\rightarrow\exists x\mathbf{B}$	$\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}\vdash U(x)!\ \mathbf{A}\rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{B}$

上述 ***Cn*** 公式和规则的证明都是十分简便的。譬如:序号 1、2、3 三个公式前面已经证明过了(公式 203、公式 204 和公式 245),序号 17 的公式只不过是两次公理 2 的合取;而序号 20 的充分条件分配规则只不过是公理 3 和充分条件分离规则的连用。

表 20.4 再举出一些在做出前述纯语构对应的条件下,***Cn*** 定理和 ***F*** 定理互异的实例。

表 20.4　***Cn*** 定理和 ***F*** 定理互异的实例(一)

序　　号	***F***	***Cn***
1	$\vdash \forall x\, \mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}(x)[a]$	$U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x) \vdash \mathbf{A}(x)[a]$
2		$\dashv (U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x)) \rightharpoonup \mathbf{A}(x)[a]$
3	$\vdash \mathbf{A}(x)[a] \rightarrow \exists x \mathbf{A}(x)$	$\mathbf{A}(x)[a] \vdash U(x)!\ \mathbf{A}(x)$
4		$\dashv \mathbf{A}(x)[a] \rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{A}(x)$
5	$\forall x \mathbf{A}(x) \leftrightarrow \forall y \mathbf{A}(y)$	$U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x) \vdash\!\dashv U(y) \rightharpoonup \mathbf{A}(y)$
6		$\dashv U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}(x) \rightleftharpoons U(y) \rightharpoonup \mathbf{A}(y)$
7	$\exists x \mathbf{A}(x) \leftrightarrow \exists y \mathbf{A}(y)$	$U(x)!\ \mathbf{A}(x) \vdash\!\dashv U(y)!\ \mathbf{A}(y)$
8		$\dashv U(x)!\ \mathbf{A}(x) \rightleftharpoons U(y)!\ \mathbf{A}(y)$

这里,$\mathbf{A} \vdash\!\dashv \mathbf{B}$ 表示$\vdash$ $\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$。从语构上说,鉴于 2、4、6 的左右端之间没有共同的个体变元号,故,可以没有共同的原子式,因此,都是衍式,均为 ***Cn*** 的除外式。然而,***Cn*** 中有与之相应的规则 1、3、5、7。从语义上说,***Cn*** 规则是逻辑真之间的充分条件关系,而充分条件公式则是逻辑真或经验真之间的充分条件关系,前者是特殊,后者是一般。当特殊成立时,一般未必成立。

继续来做对照,如表 20.5 所示。

表 20.5　***Cn*** 定理和 ***F*** 定理互异的实例(二)

序　　号	***F***	***Cn***
1	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \forall x\mathbf{A} \rightarrow \forall x\mathbf{B}$	$\vdash (\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \rightharpoonup (U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup \mathbf{B}$
2	$\dashv (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \forall x\mathbf{A} \rightarrow \forall x\mathbf{B}$	
3	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \exists x\mathbf{A} \rightarrow \exists x B$	$\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{A} \rightharpoonup U(x)!\ \mathbf{B}$
4	$\dashv (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \exists x\mathbf{A} \rightarrow \exists x\mathbf{B}$	

表 20.5 所示的对照正好跟第二批对照的情形相反。下面提供最后一批对照,如表 20.6 所示。

表 20.6　***Cn*** 定理和 ***F*** 定理互异的实例(三)

F	***Cn***
$\vdash \forall x(\mathbf{A} \neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$	$\dashv U(x) \rightharpoonup \mathbf{A} \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$
$\vdash \forall x\mathbf{A} \rightarrow \forall x(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$	$\dashv (U(x) \rightharpoonup \mathbf{A}) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}$

左边的 ***F*** 公式是谓词演算的蕴涵怪论；右边的 ***Cn*** 式是衍式或涵衍式，理当从 ***Cn*** 中除外。

20.2　*F* 中的所谓“逻辑量词”

1936 年，美国数理逻辑学家丘奇（A. Church）证明了关于 ***F*** 的不可判定定理：***F*** 的任一式是否有效（或是否可证）没有一个判定程序。从此，人们就致力于寻找 ***F*** 的可判定范围。到目前为止，已确定了的 ***F*** 的可判定范围是十分狭隘的。到底可判定的最大范围的界限在哪里，这一点一直不曾弄清楚。***F*** 的这种困境，从构造 ***F*** 的主导思想上来寻究缘由，恐怕与企图对无限域使用全称量词“每一个”有关：对于无限域来说，“每一个”个体究竟是否具有某种性质，这怎么可能会有在有限步内一定要结束的算法呢？***F*** 的不可判定可视做无限宇宙对企图确定其中“每一个”个体有什么性质的能力和生命都有限的自不量力的人们的一种惩罚。

这里的“量词”是指正统数理逻辑一阶谓词演算中作为一种逻辑词采用的量词，不是传统逻辑中的量词，更不是语言中的量词。***F*** 中的全称量词 $\forall x$ 的语义为“对于论域中的每一个个体”，存在量词 $\exists x$ 的语义为“论域中至少有一个个体”。对此，要说的是，人类在求取关于不可逐一列举（有限的或无限的）个体域的作为一般性原理的真知的过程中，事实上从来不曾在逻辑上使用过这样的量词。原因很简单：人类（当然包括数理逻辑家或数学家）在逻辑上根本用不起这样的量词。这样的量词对人类提出要去逐一确定不可逐一列举的个体域的每一个个体具有什么性质，这样的指令人类是无法执行的，这样的对外延的无限要求是超乎人类的有限能力和生命的。

逻辑语义学向人们提供确定命题的逻辑真值或经验真值的逻辑标准。像量词这样的确定命题真值的逻辑标准，在正统的数理逻辑语义学中提出过。这是事实。但是，还有另一个更重要得多的事实，人类（当然包括数理逻辑学家或数学家）从来没有执行过。因为，那是任何人都不可能执行的。量词是一种确实有人提出过然而确实任何人都不可能执行因此从来没有人实施过的逻辑标准。

不可知论是荒唐的。不可知论者至少不得不承认“现实世界是不可知的”这一点是可知的。因此，真正彻底的不可知论者只能是面对世界和人类一言不发，连“世界是不可知的”这句话也没有权利说。不可知论者只能像鱼一样地沉默，而把发言权让给可知论者。人类确实已经确定了形成种种体系的真命题，其中包括关于不可逐一列举个体域的真实的一般性原理。这是讨论有关逻辑量词问题时作为依据的最重要的事实。另一个非常重要的事实依据是：人的能力和生命有限，根本无法逐一确定不可列举域的每一个个体具有什么性质。把这两

个最重要和非常重要的事实结合起来,就决定了第三个十分重要的事实:人类在求取真知时,事实上从来不曾对不可列举域使用过逻辑量词。当然,有人(包括一些很有学问的人)认为人类在上述场合事实上使用逻辑量词。这确实是很重要的事实。要是没有这个很重要的事实,就不必在这里费这么多的笔墨,来打这场实力悬殊的笔墨官司了。目睹上述那件很重要的事实,倒使人们联想起在对“思维定位”问题的认识过程中的另一桩也很重要的事实来:人们曾经在一段很长的历史时期里认为思想是在心脏里而不是在头脑中进行的。可是,比上述这个很重要的事实重要得多的事实是:连认为“思想是在心脏里而不是在头脑中进行的”这个思想本身,事实上也依旧是在头脑中而不是在心脏里进行的。这就是说,对于坚持“每一个人在每一个求取关于不可列举域的一般性真命题的场合都使用量词”(α)的人来说,正由于他事实上必须面对的是“人”、“场合”这样的不可列举域,当他企图去确定这个一般命题的“真实性”时,也必然扔掉不可能贯彻的逻辑量词,而去另觅适应于他的有限能力和生命的其他可行的逻辑标准。这就是说,即使在认定命题里含有逻辑量词的那个命题 α 本身的逻辑结构中,事实上也没有什么逻辑量词。

在语言中确实有作为一种词类的量词。为了与逻辑量词区分开,称之为语言量词。人们确实经常使用语言量词去陈述其实并不含有逻辑量词的命题,这也是事实,但这只是一种约定俗成的语言习惯。在还没有产生逻辑学的几百万年里,早就已经有语言;在产生了逻辑学以后,语言仍然不是专门侍候逻辑学的。因此,语言习惯和逻辑要求不一致,那是常情。要不然,逻辑学又何必采用工人符号?这语句中的语言量词并不表述命题中的逻辑量词就是语言和逻辑不一致的一种表现形态。不必也无法改变这种和逻辑要求不一致的语言习惯。就拿前面举出的那个语句 α 来说,前后两处在其中出现的“每一个”只是语言量词,并不表述逻辑量词,语句 α 可同义地改说成“人必定在求取关于不可列举域的一般真命题的场合使用量词。”(α')不过,这么一改,倒是和逻辑要求比较接近了,可是由于不合语言习惯,显得有点“不像话”。既然是说话,就得合乎语言习惯,就得说得“像话”。至于那话语所承载的命题的逻辑结构,绝不能得自对语句的语言分析,而是必须去分析那语句所指谓的事件的客观的逻辑结构。在讨论量词问题时使用汉语,说了一系列汉语语句,在这些语句里可以含有语言量词,要顺应语言习惯。但是,可以断定:不管语句中有无语言量词,其所承载的命题一律没有逻辑量词,因为,为那些语句所指谓的客观的事件的客观的逻辑结构中,没有直接和“逻辑量词”相对应的东西。

就人们经常说的“凡人皆有死”(β_1)来说,可以有各种互相同义的说法:“每一个人都有死”(β_2),“人必定有死”(β_3),“若某个体是人,则该个体有死”(β_4),等等。以“客体”(U)为论域,“人”(s)、“有死”(p)就是其上的两个 1 元

名词,这三者都是不可逐一列举的。因此,互相同义的语句 $\beta_1 \sim \beta_4$ 所承载的命题的逻辑结构用符号表达式表示就是:

$$s(x) \rightharpoonup p(x)(\beta)。$$

在这个命题的逻辑结构 β 里并没有“逻辑量词”这样的东西。命题 β 涉及不可逐一列举域。然而,β 为真却可以通过对 s、p 的内涵的科学分析确定,亦即,从手段上说可以有限地确定。这就是说,正由于在命题 β 中没有量词这样的东西,人们就可以在地球上人口越来越多的情况下,有限地确定其为真。β 这样的命题由于可用语句 β_1、β_2 来陈述,于是,当崇奉正统数理逻辑过了头的人将其纳入采用逻辑量词的 ***F*** 时,便成了:

$$\forall x(s(x) \to p(x)) \qquad (\beta')。$$

β′的逻辑语义为“对于论域客体中的每一个个体来说,至少成立下述二者之一:该个体不是人,该个体有死。”(β_5)这是因为:$\forall x(s(x) \to p(x))$ 恒等于 $\forall x(\neg s(x) \vee p(x))$。

语句 β_5 和 $\beta_1 \sim \beta_4$ 的逻辑含义殊异:在 $\beta_1 \sim \beta_4$ 的逻辑含义中没有“逻辑量词”、“实质蕴涵”这样的东西,故而,为其所承载的命题 β 为真可有限地确定;β_5 的逻辑含义中有“逻辑量词”、“实质蕴涵”这样的东西,故而,为其所承载的命题 β′为真不可有限地确定。命题 β′只有在下述情况下才能确定为真:世界上再也不存在任何活着的人,因此,也就没有任何活着的人能来确 β′为真! 有正常理智的人们是绝对不会去做出只有当人类死绝以后因此再也没有活人来确定它的真假的情况下才能“确定”为真的命题 β′的。从 β 到 β′的变化可以称为逻辑语义畸变。缔造并发展正统数理逻辑的学者们是用付出这种语义畸变的重大代价来解决元数学问题的(一开头,布尔、弗雷格时期,也许不那么清醒、自觉,然而,越到后来,在罗素、希尔伯脱、哥德尔时期,那就越来越清醒、自觉了)。也许,为了解决元理论问题,人类一开始不得不付出语义畸变的严重代价。不过,应该已经到采用少有甚至没有语义畸变的方式去解决元理论问题的时候了。

20.3　从 *F* 的概括规则的充分条件关系“若,则”看内涵科学分析法

试着来分析包含在正统数理逻辑元语言里使用的“若,则”中的一独是如何建立起来的。以著名的概括规则“若 **A**,则 $\forall x$**A**”的证明过程为例。作为这个有名的概括规则的证明的是具有下述性质的含有 **A** 且与 $\forall x$**A** 结尾的式的有限序列:除 **A** 外的任一式或者是公理,或者是以在前面出现的式为假设使用一次原始规则得出的结果。以希腊字母 **Γ** 表示上述式的有限序列。上述被称为“概括规则的证明”的式的有限序列 **Γ** 一经写出,人们就确定了:不管 **A**、$\forall x$**A** 本身是

否为定理(即可证),**A** 是定理而 ∀x**A** 却不是定理这样的事情,对人的历史来说,过去、现在和将来都不会发生。这里看到了下述重要事实:事实上不会是 **A** 是定理而 ∀x**A** 却不是,人们确定了这一点,人们在确定这一点时并未依据 **A**、∀x**A** 本身究竟是否定理。这个事实真是明如观火:人们只知道 **A** 和 ∀x**A** 之间的形式结构上的联系——后者为在前者之前缀以 ∀x,而根本不知道 **A**、∀x**A** 本身究竟具有什么样的结构;既然如此,又何从去知道 **A**、∀x**A** 本身究竟是否为定理呢?客观的逻辑规律迫使在展开正统数理逻辑时所使用的元逻辑去依靠具有一独的充分条件(或必然关系),而为其所研究的蕴涵却无用武之地。还看到,在正统数理逻辑的元逻辑中建立一独的方法不可能是外延的,因为,具有 **A**、∀x**A** 形的式有无限多个,根本无法做外延的逐一列举。故而,在那里,建立一独的方法只可能是内涵的:科学地分析 **A**、∀x**A** 的内涵之间的必然联系。因此称这种建立一独的方法为"内涵的科学分析"。无限外延的内涵却是有限的,可以有限地把握、有限地分析;而写出一个有限长的式的序列 **Γ**,就是具体地实施对这种无限外延的有限内涵的把握和分析,从而建立了"若 **A**,则 ∀x**A**"中的一独,而 **A**、∀x**A** 的外延却连一个都不曾去碰过。在"若 **A**,则 ∀x**A**"中,无论从语言上还是从逻辑上说,都没有任何涉及全部外延的"全称量词"。语言上并无量词,那是明显的事实;至于逻辑上也不可能有什么量词,那是由于,对无限域讨论"每一个"个体有什么性质,根本无法确定从而是毫无实际意义的。生命和精力都有限的人们事实上不可能也无须去碰无限域的"每一个"个体。人们实际上可能也只需去把握无限域的有限内涵,并用有限的、科学的内涵分析法去建立关于无限域之间的"若,则"。这种含有一独的"若,则"从逻辑上说根本没有也无需什么量词。

逻辑科学的发展引进了量词,逻辑科学的进一步发展则将势必摆脱量词。

十分明显,"若 **A**,则 ∀x**A**"不仅具有一独,而且还具有二独:**A** 是否为定理可独立于 ∀x**A** 是否为定理确定。当用这个规则从 **A** 是定理去得出 ∀x**A** 是定理(如从 **C**(x)→**C**(x)是定理去得出 ∀x(**C**(x)→**C**(x))是定理)时,需先确定 **A** 是定理,其时,∀x**A** 究竟是否定理还尚且不知。这就是说,∀x**A** 对 **A** 来说是新的定理。

客观的逻辑规律迫使展开正统数理逻辑的元逻辑不使用不可能得出新定理的恒真的真值蕴涵式作为推理式,也不使用根本无法实施的外延的全称量词,而是通过有限的内涵科学方法去建立具有两个独立性的"若,则"。

20.4　*Cn* 与 *F* 的实质性区别

在前面讨论的基础上,现在要简明扼要地指出的是,***Cn*** 与 ***F*** 的实质性

区别。

第一,从语义上看,***Cn*** 与 ***F*** 截然不同。***Cn*** 是用来研究分析到项的逻辑存在事件,主要是其中含有逻辑必然关系的逻辑的充分条件事件,或者说,主要研究其中含有逻辑必然关系的有效的充分条件定律——即推理律;而 ***F*** 则以真值函数和个体 - 真值函数为研究对象,并从中区分出恒真的真值函数和恒真的个体 - 真值函数来。***Cn*** 是逻辑系统, ***F*** 是数学系统。

第二,从语构上看,***Cn*** 与 ***F*** 依然殊异。***Cn*** 含有非纯真值函数的充分条件联结号⇀, ⇀能约束在其前、后件中出现的共同的个体变元,并以此构成非纯真值函数的算子 **U**(**x**)⇀,从而无须引入也不引入量词号;***F*** 则通过真值函数联结号和量词号来形成式,并且含有关于量词号的公理和规则。

第三,从主要联结号看,***Cn*** 与 ***F*** 之差别更昭然若揭。非纯真值函数的充分条件号⇀是 ***Cn*** 研究的主要联结号,具有两个独立性,两个独立性为推理能从已有知识获取新知识铺平了道路;真值函数的蕴涵号→是 ***F*** 主要研究的联结号,具有两个依赖性(参见 9.2 节),从而导致蕴涵重言式同语反复的特性,不能从已有知识得出新知识。

第四,***Cn*** 主要研究从已有事件过渡到新事件的逻辑定律——推理律,而且,这样的推理律是客观世界的逻辑规律,符合人的普通逻辑思维实际,人认识后得到的形式定理就是推理,用符号表达出来叫做推理式;***F*** 的形式定理不是推理,而是同语反复的名副其实的所谓“重言式”。

第五,在 ***Cn*** 中,除了微不足道的真子部分是重言式外,任意一个 ***Cn*** 的定理,无论从语构上还是从语义上看,和 ***F*** 的定理大有差异:真值函数的重言式以外的非纯真值函数的 ***Cn*** 定理含有必然号⇀,没有量词号,都满足无衍性,可用来刻画普通逻辑思维中的充分条件关系的性质和规律,对于传统形式逻辑推导格式来说是完全够用的,因而,可作为发展逻辑科学的一个方向;***F*** 的定理只含有真值函数联结号,有的还含有量词号,未必满足无衍性,只反映了个体 - 真值函数的性质,不能用来刻画普通逻辑思维中的充分条件关系,不能反映推理的前提与结论间的逻辑的必然关系(即充分条件关系),***F*** 与传统形式逻辑是格格不入的。提请注意,***F*** 中作为蕴涵怪论的蕴涵重言式,在 ***Cn*** 中不会出现。

第六,作为无衍系统的 ***Cn*** 系统是坚定的逻辑演算形式系统,应用到任何逻辑外的体系(包括含有矛盾的体系)中,都不会产生新的纯逻辑定理,从而确保不会产生 ***A*** 与¬***A*** 互相推出这种逻辑怪现象,不会产生任何以“***A*** 与¬***A*** 互相推出”为定义的悖论;作为非无衍系统 ***F*** 系统,如果硬要把它看做逻辑演算形式系统的话,***F*** 是不坚定的逻辑演算形式系统,当用到逻辑外的包括含有矛盾的体系中去时,随即产生新的纯逻辑定理,其中包括 ***F*** 的每一个原来的定理的否定,从而产生以“***A*** 与¬***A*** 互相推出”为定义的悖论。

第 5 篇　人工智能机器推理和知识表示的逻辑理论工具探讨

第 21 章　人工智能机器推理的逻辑理论工具研究

在半个世纪内先后出现的“认知模拟”、“人机合一”都不是真正的“人工智能”正确的指导方针。宇宙具有按一定的逻辑结构、逻辑规律由已有事件向新事件必然过渡的逻辑运演机制,这便是“宇宙智能”,人认识后便是从已知进入新知。这客观的必然过渡就是客观的“充分条件关系”。人类、机器按各自能实现的方式去摹写、模拟宇宙智能,便分别是“人类智能”、“人工智能”。

所谓人工智能,就是对宇宙的显示实施机器表示,加到原有的知识表示系统中去行使机器推理,得出前所未有的新的知识的运行过程。人工智能之所以为智能,其根本就是能从已有知识去得出新的知识。根据这样的人工智能观,我们的研究结果是,只有具有深刻正确的主导思想、在理论上坚持论证不许循环,向人类认识提供效能卓著的从已知获取新的工具的传统形式逻辑当代发展的崭新逻辑学说当代形式逻辑才是人工智的合适的逻辑理论工具——这就是本章的重点,即人工智能机器推理的逻辑理论工具研究。

人工智能的基础装置是基于当代形式逻辑的内涵智能机,其硬件的核心元件是能模拟客观的充分条件关系的“必然门”。必然门是机器推理能从已知获取新知的核心元件。

21.1　国际人工智能研究的指导方针从“认知模拟”转向“人机合一”

21.1.1　美国科学家的新成就 ——“猴机合一”实验成功

2000 年 11 月 15 日,美国杜克大学 Miguel Nicolelis 博士宣称:在北卡罗来纳州的杜克大学实验室,成功地用猴子的脑部信号来控制机器人手活动。美国科学家在一只活猴脑部控制运动的区域植入一些电子芯片,以收集猴脑神经细胞

发出的信号,再通过计算机分析,分离出其中控制猴臂左右摆动和拿取物体的信号,并用这些信号来操纵机械臂运动。他们乐观地预测,这一最新重大成果有可能使瘫痪病人用思想操纵人造肢体自由活动的梦想成为现实。我国的新华社为此发布了重要消息,国内一些报刊也用带巨幅彩照的大篇报道了这个给科学带来震惊的进展。

从20世纪80年代开始,国际上不少清醒的人工智能专家开始意识到数字计算机在早先认定的"认知模拟"(即"用电路来复制人类大脑所进行的信息加工")中不可克服的局限性,把视线转向以将脑细胞活动信息直接加到控制线路中去为目标的脑科学研究——既然无法用电路来复制人类大脑所进行的信息加工,由机器来实现为人所独有的思维,那就设法干脆把脑部活动过程直接引入电路。研究者们使在其脑中植入电极芯片的猴子、小白鼠等动物进行各种运动,以观察、分析这些动物相应脑部细胞活动的电极反映。这个研究方向的最终目标是从动物过渡到人类,实现"人机合一"。这个方向的研究取得了一些成果,美国科学家的新进展就是在此基础上获得的。

21.1.2 国际人工智能研究的历史回顾—— 从"认知模拟"到"人机合一"的梦想

人工智能,无论是作为一门科学理论还是一种物质装备,都起源于20世纪50年代的美国,还只有四、五十年的历史,前十几年发展迅速,后来渐陷困境。究其根本原因,乃是国际人工智能专家所普遍认同的带有原则性、方向性的共识:人工智能的根本使命是"用电路复制大脑所进行的信息加工"(唐纳德·麦琪:《从思维看人脑》)、"由机器来实现为人所独有的思维"(阿摩:《对待智能机的态度》),一句话,用机器来模拟人脑的思维功能。于是,按照这种"模拟思维"(或称"认知模拟")的指导理论,势必迫使人工智能探索者面对两个在可预见的将来根本无法获解的莫测高深的谜:人脑思维功能的宏观、微观机制是什么?又如何用机器来模拟?正由于此,尽管在20世纪60年代,踌躇满志的美国专家们曾兴高采烈地宣称:"在20年之内,人能做到的事,机器将能完全做到。"(西蒙:《人与管理现代化形式》,1966年纽约版,第96页)过了20多年,按西蒙的"认知模拟"途径实现他的预言的前景却显得十分渺茫,有不少人甚至开始表示绝望。譬如,美国的机器翻译专家巴·希莱尔在《语言翻译的现状》(1988)中断言:"全自动、高质量的机器翻译是不可实现的,不是不久的将来不能实现,而是永远不能实现。"以"认知模拟"作为指导方针的人工智能借助于建立在布尔代数上的外延电子数字计算机在对人类智能来说是驾轻就熟的语言翻译领域里尚且如此无能,更何况是探隐索微、从已知进入新知的发明创造!

从20世纪80年代开始,国际人工智能专家把视线从"认知模拟"转向作为

其继承者的“人机合一”(既然在人脑中进行的思维难以用电路来复制,那就设法将其直接引入电路中,作为一种控制环节)后,这个承先启后的研究方向确实获得了一些重大成就。这又一次鼓舞了国际人工智能专家们,再度踌躇满志、兴高采烈地重弹 38 年前美国人西蒙的旧高调。英国的凯文·瓦维克教授在他的《机器的征途》中又一次宣称:“到 2050 年,机器将取代人类,成为这个世界的主宰,而人类将丧失最终的智力优势。”美国科学家在杜克大学实验室所取得的成果,距凯文·瓦维克的预期目标还非常遥远。失去了上肢后的猴脑是否还依旧能控制机械手做出摆动、握物等原本与健全猴臂同步的动作、电子芯片能否植入人脑等尚未获解的难题暂且不论,姑且认为这些都能圆满解决。然而须知,中枢神经对机体的控制、反射,这种功能几乎为任何动物所具有,这与至少须是理智的人类智能具有根本区别。人脑能控制肢体运动,这仅仅是人类作为动物的本能,决非作为智慧动物的人类的智能。过了 22 年后,美国人不得不宣布西蒙在 1966 年所做的预言彻底破灭。英国人凯文·瓦维克的这一次预言是否会重蹈 38 年前西蒙的覆辙,人们只要耐心地等待 40 年自会分晓。

无疑,20 世纪末在美国杜克大学实验室获得的成果是科学的重大进展,但是,这“猴机合一”真的像一些人所说的是人工智能的重大进展吗?这“人机合一”真的是人工智能新的研究方向吗?上述问题的回答取决于究竟什么是“人工智能”?而这又取决于究竟什么是“人类智能”?

21.2　宇宙智能与两种不同质的模拟——人类智能和人工智能

迄今,人们普遍公认只有人类才有智能。于是,这所谓“智能”即指“人类智能”,那是在人类头脑中进行的一种具有物质原型(原像)和物质载体(语言)的物质高级运动过程——在约有 140 亿根脑神经元中进行的迄今还弄不清其宏观和微观机制却可统称为原像的映像的错综复杂的搭接。这种称为“智能”的物质运动过程是宇宙际五种运动形态(机械、量子、化学、生命为其余四种)中最高的一种。如今实施的“猴机合一”,将来即使出现的“人机合一”,也仅仅属于“生命”这种运动形态;由于并无指谓对象和语言载体,从而并非“智能”。

关于“人类智能”,曾经从认识论、逻辑学、语言学、心理学、脑神经学等出发,给出过一百多种“定义”,可用八个字概括:“众说纷纭,远不清晰”。正由于此,关于“人工智能”也有上百种“定义”,几乎也可用上述八个字来概括。然而,尽管如此,有一点却是共同的,那就是用机器来模拟人类智能,这个总的指导方针被称为“认知模拟”,如今的“人机合一”这个方针只不过模拟不成便索性在机器中引入认知(已经引入的只不过是猴脑对肢体的控制、反射,并非认知;将来

如何发展,是否真的能将人类的认知引入,即使真的引入又将如何,请拭目以待)的一种继承。“模拟”也罢,“引入”也罢,万变不离其宗,始终是针对人类智能在做千方百计的努力。

人类相继创造并使用过四代工具:自然工具(略经手工加工的自然物,如木棒、石斧)、能源工具(经冶炼、锻造等需消耗能源的制作,如铜斧、铁犁)、动力工具(采用动力驱动,可取代人的大部分体力,如风车、水磨、蒸汽机、电机、核动力装置)、信息工具(能大量储存和迅速处理信息,可取代人的一部分非创造性的智力,如外延电子数字计算机、专家系统)。人类正在迎接即将来临的第五代工具:智能工具——具有迄今只为人类所独有的从已知得出新知、从事发明创造的智能。

人类智能的根本特征是能从已知去得出新知、从事发明创造。个体人的知识来源有三:亲身感知、他人告知、逻辑推知。然而,对全人类来说,获取知识的途径却只有一、三两种,因为并无“他类告知”这一途径。作为人类获取知识的重要途径,逻辑推知就是在头脑中进行的从已知得出新知这种智能活动,这是作为其物质原型的客观世界中从已有事件必然过渡到新事件的正确反映、如实摹写。例如,月地间的距离是通过具有光速的电磁波往返于月地间的时间测定的。在此前,物理学已经确定了:“电磁波往返于月地间的时间为 x 秒,必然,月地间的距离为 $x/2\times30$ 万公里。”以“$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$”表示上述“必然事件”,其中,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别表示“必然”之前、后两个事件;$\boldsymbol{x}$ 称为“个体变元”,在时间“……秒”中变:$\rightharpoonup$为“充分条件号”,“……$\rightharpoonup$……”表示“……必然……”,或“若……,则……”,即通常所说的“必然联系”(但不是数理逻辑中的真值函数“实质蕴涵”,因为充分条件关系不是任何函数)。事件 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有、无须取决于 x 的实际取值,可以为有,也可以为无,在实际测定 x 究竟为多少秒之前,确定不了 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 何时为有、何时为无。然而,就在 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有无未定的情况下,物理学就确定了充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$ 为有,其含义为:“不管 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 本身的有无,不会是有 $\boldsymbol{A}(x)$ 而无 $\boldsymbol{B}(x)$。”这也可改说成:“可独立于 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有无确定不会是有 $\boldsymbol{A}(x)$ 而无 $\boldsymbol{B}(x)$。”这其中的“可独立于 $\boldsymbol{A}(x)$、$\boldsymbol{B}(x)$ 的有无确定”就称为充分条件关系的“第一独立性”,并简称为“一独”。显然,电磁波往返于月地间的时间究竟为多少秒可独立于月地间的距离究竟为多少公里确定,即“$\boldsymbol{A}(x)$ 何时为有可独立于 $\boldsymbol{B}(x)$ 的有无确定。”这里的“$\boldsymbol{A}$ 为有可独立于 $\boldsymbol{B}$ 的有无确定”称为充分条件关系的“第二独立性”,并简称“二独”。“一独”、“二独”合称“两个独立性”,简称“两独”。物理学确定了具有两独的充分条件事件为有,这里的充分条件关系称为“逻辑外的经验充分条件关系”,简称为“经验充分条件”(这个实例为“物理的充分条件”),包含在其中的两独称为“经验两独”。像在物理学中早已确定了经验充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$(甲)为有一样,在逻

辑学中也早已确定了逻辑充分条件事件$\{\boldsymbol{A}(e)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]\}\rightharpoonup\boldsymbol{B}(e)$(乙)为有,其中,$e$ 为确定的某一秒(这 β 可以实际测定,在未测定前为待定),称为“个体常项”。乙与甲不同,只凭乙的客观的逻辑结构(不管其中包含的逻辑外的经验性质)便可确定为有,这称为“恒有”(在时间上永恒)、“普有”(在空间上普适),也称为“逻辑有效”,简称“有效”。因此,乙中后面的那个充分条件称为“逻辑充分条件”,显然,前、后件之间也具有两独,称为“逻辑两独”。这是经验充分条件事件 $\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$ 中的经验两独向逻辑充分条件事件中的逻辑两独的逻辑升华。经验两独是逻辑两独的渊源与归宿。时间上永恒、空间上普适的有效事件称为“客观世界的逻辑规律”,简称为“逻辑规律”。具有逻辑两独的逻辑规律称为“客观推理”,乙便是个客观推理,命名为“内涵三段律”。前件确定为有的客观推理称为“客观证明”。经实测,e 为 2.6 秒,于是,$\boldsymbol{A}(2.6)$表示“电磁波往返于月地间的时间为 2.6 秒”,此时,有:$\{\boldsymbol{A}(2.6)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]\}\rightharpoonup\boldsymbol{B}(2.6)$(丙),丙便是客观证明,带有逻辑两独地从前件 $\boldsymbol{A}(2.6)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]$为有必然过渡到后件 $\boldsymbol{B}(2.6)$(即月地间距离为 39 万公里)为有。关于客观世界的充分条件事件、客观推理、客观证明的思考,就分别称为“充分条件命题”、“思想推理”、“思想证明”。后者分别是前者在人类头脑中以脑神经元搭接的方式实现的摹写,无论是逻辑学还是其他科学对其本身的“思维结构”几乎一无所知。为了便于讨论,逻辑学只不过按被其思考的客观对象(其客观结构一清二楚)分别起个相应的名称而已。构成如今的外延电子数字计算机硬件中的基本元件与、或、非门的任何叠加(始终是二值函数)表示不了输入与输出之间具有两独,从而不是任何函数关系的充分条件关系。人类一旦找到了可以表示充分条件关系的“必然门”,再辅以与、或、非门,对客观的充分条件事件、客观推理、客观证明(不是人类意识中的充分条件命题、思想推理、思想证明)以机器能实现的方式实施机器模拟(根本不管人脑是如何实施摹写的),就称为“机器表示”、“机器推理”、“机器证明”。

无限多样的客观逻辑规律在人类诞生之前和消失之后永不停息地运演于宇宙的无限时空,而在其中起举足轻重的核心作用的是客观推理,即,含有两个独立性的从具有一定的逻辑结构的原事件(如 $\boldsymbol{A}(e)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]$)到具有相应逻辑结构的新事件(如 $\boldsymbol{B}(e)$)的客观的必然过渡。在宇宙中,一些后来出现的事件(如 $\boldsymbol{A}(e)$)与已有事件(如,$\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)$)加在一起构成原事件(如$\boldsymbol{A}(e)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightharpoonup\boldsymbol{B}(x)]$),通过客观推理(如内涵三段律),必然过渡到为原事件所未有的新事件(如 $\boldsymbol{B}(e)$)的客观运演过程,就称为“宇宙智能”。在这里,为了便于说明,放在括弧中举出的例子是最单纯的。实际上,出现在独立于人的认识的宇宙智能的原事件中的事件,以及参与作用的客观推理,可以数以百计、千计、万计、亿计。感知宇宙的显示(如对 $\boldsymbol{A}(e)$ 的认识),加到原有的知识系统(如对

$\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{B}(x)$的认识)中去构成已知(如对($\boldsymbol{A}(e)\wedge[\boldsymbol{A}(x)\rightarrow\boldsymbol{B}(x)]$的认识)的前件,运用思想推理(如内涵三段论),去得出为已知前件所未有的新知(如对$\boldsymbol{B}(e)$的认识)的思考过程,就称为“人类智能”,是以人脑能实现的方式对宇宙智能的意识摹写。对宇宙的显示实施机器表示,加到原有的知识表示系统中去,行使机器推理,得出前所未有的新的知识表示的机器运行过程,就称为“人工智能”。人工智能是以根本不同于人脑(从而无须知道人脑的运行机制)的机器能实现的方式对宇宙智能(并非人类智能)的机器模拟。

21.3 正统数理逻辑不能作为人工智能机器推理的理论工具

作为现代基础数学的正统数理逻辑不是正确的推理理论,即不是向人类提供从已知推出新知的工具的逻辑科学。

正统数理逻辑,从其诞生之日起就远离人的普通逻辑思维实际,从而从根本上背离了作为真正的逻辑科学的传统形式逻辑的主导思想而与之分道扬镳,发展成一门特殊的离散数学。

正统狭谓词演算 $\boldsymbol{F}$ 是正统数理逻辑的基础,其研究对象是刻画真值函数关系(即二值的离散数学的函数关系)的真值联结词和只施加于个体变元的量词。因而,尽管 $\boldsymbol{F}$ 的定理是普遍有效的,但 $\boldsymbol{F}$ 仍然是一种特殊的离散数学。

正统狭谓词演算 $\boldsymbol{F}$ 中的真值联结词实质蕴涵(简称“蕴涵”)的真正含义是:不是前真而后假。蕴涵命题“$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ ”的真值完全取决于其前、后件($\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$)的真值,是其前、后件的真值的真值函数。传统形式逻辑所表述的人的普通逻辑思维中的充分条件命题“若 $\mathbf{A}$ 则 $\mathbf{B}$”的真值不取决于其前、后件的真值,而取决于其间是否具有必然联系。“若 $\mathbf{A}$ 则 $\mathbf{B}$”的真值就不是 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的真值的真值函数。可见,从语义上说,正统狭谓词演算的蕴涵命题“$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$”不是人的普通逻辑思考中的充分条件命题“若 $\mathbf{A}$ 则 $\mathbf{B}$”。蕴涵词“→”同表达充分条件关系的联结词“若,则”大相径庭。然而,正统数理逻辑通常都将“→”读做“若,则”,认为蕴涵关系是对充分条件关系的抽象。

(1) 正统狭谓词演算 $\boldsymbol{F}$ 将传统形式逻辑所总结出的能从已知得出新知、能确保论证不循环的正确推理格式变换成同语反复的蕴涵重言式——以蕴涵为主联结号的永真式。任一蕴涵重言式不外乎下述三者之一:①前件恒假;②后件恒真;③直接确定前件为真的根据包括直接确定后件为真的根据。显而易见,前两类蕴涵重言式不是推理式。那么③呢? 当人们根据一个推理式进行证明时,总是要求不许循环,因此,正确的推理式必须满足;在不需要确定结论为真的情况下先确定前提为真。可是,任一前件可真可假而后件也可真可假的蕴涵重言式,

在未获得直接确定后件为真的根据时不可能直接确定前件为真。较明显的例子是，正统狭谓词演算 ***F*** 将传统形式逻辑中能出新知的充分条件推理格式变换为如下的同基异构式：

$$\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{B}$$

这就是前件可真可假而后件也可真可假的一个蕴涵重言式。根据 ***F*** 的这个所谓“推理式”，要从 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})$ 得出 **B**，自然要先确定 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})$ 为真；要确定 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})$ 为真，则又须先确定 **A** 真和 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 真；根据 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 的真值函数定义表 21.1 所示的真值表。

表 21.1　真值表

	A　　B	A→B
1	1　　1	1
2	1　　0	0
3	0　　1	1
4	0　　0	1

在确定 **A** 真的情况下（见真值表第 1、2 行），要确定 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 为真，则须先确定 **B** 为真（据真值表第 1 行）。十分清楚，按照正统狭谓词演算 ***F*** 这个特殊的离散数学的思想，在 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\rightarrow\mathbf{B}$ 中，只有在确定后件 **B** 为真以后，才能确定前件 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})$ 为真。显然，从 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})$ 得出 **B** 是一种同语反复。对于人的普通逻辑思维来说，这是毫无价值的。因此，这类蕴涵重言式也不是推理式。

最早向我国系统地介绍数理逻辑的金岳霖教授在 70 年前就指出了：在数理逻辑由“赵云姓赵，赵云姓赵”这一命题可以推论到“赵云姓赵”，可是这种推论没有从已知进到新知的意义。金岳霖教授早就看出数理逻辑不是正确的推理理论（参见金岳霖著《逻辑》，商务印书馆，1937 年版第 162－163 页）。

（2）被读做“若，则”而其含义又不同于表述充分条件关系的“若，则”的实质蕴涵“→”在 ***F*** 中引起了数不清的蕴涵怪论。著名的蕴涵怪论可举 ***F*** 的如下几个定理。

① $\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$。

其意为，真命题为任一命题所蕴涵。倘若依此定理，由于“地球在自转”是真的，那么从“月球会发光”或“月球不会发光”，或者从别的任何命题都可推出“地球在自转”来。

② $\neg\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})$。

其意为，假命题蕴涵任一命题。要是依此定理，由于“地球是正方体的”是假的，那么以“地球是正方体的”为前提可以推出任意的不合逻辑的假命题。

③ $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$。

其意为,任意二命题,一定至少有一个蕴涵另一个。依此定理,试以“人”为论域,个体变元 x 则表示“任意一人”那么“x 死了蕴涵 x 活着,或者,x 活着蕴涵 x 死了”竟然永远是真的(即所谓重言式)。可是,在普通逻辑思考中,“若 x 死了则 x 活着,若 x 活着则 x 死了”却是显然不成立的,因为一个人“死了”既不是他“活着”的充分条件,也不是他“活着”的必要条件。

十分清楚,实质蕴涵不是人的普通逻辑思维中的充分条件关系,不是能从已知得出新知的推理的前提与结论之间的关系。作为正统狭谓词演算研究对象的真值函数关系的实质蕴涵不是逻辑推理工具。

现在来看正统狭谓词演算 ***F*** 中的所谓“逻辑量词”。***F*** 中只施加于个体变元的全称量词 $\forall x$ 的含义为“每一个 x”。对于无限个体域来说,要证实一个含有全称量词的命题 $\forall x\mathbf{A}(x)$ 为真,等于逐一去证实无限多个单称命题为真。显然,这是不可实施的,因此,从来不曾有人实施过。

就拿一般逻辑书通常举的“凡人皆有死”来说,***F*** 将其表述为:

$$\forall x(s(x)\rightarrow p(x)) \qquad (\alpha)$$

α 的逻辑语义为,“对于论域客体中的每一个体来说,至少成立下述二者之一:或者该个体不是人,或者该个体有死。”这样的逻辑含义中有所谓“逻辑量词”、“实质蕴涵”,故,为其所承载的命题为真不可能有限地确定。这种命题只有在下述情况下才能确定为真:人类全部消亡,再也没有任何人活着来确定它为真的时候!不用说含有量词的 ***F*** 系统不能进行从已知进到新知的推理,就是作为特殊的离散数学,量词的引入也使 ***F*** 在演算上无法避免种种麻烦。

总之,正统狭谓词逻辑不是正确的推理理论。以正统狭谓词逻辑为基础的正统数理逻辑自然不是正确的推理理论。

几十年来,一些国家正在研制的智能计算机主要是以正统狭谓词逻辑为逻辑理论基础的。可是,既然正统狭谓逻辑不是能从已知获取新知的正确的推理理论,用它作为逻辑基础研制出的计算机必定没有真正的推理功能,这样的计算机不可能成为智能机。因此,狭谓词逻辑不能作为人工智能机器推理的理论工具。

21.4 形形色色的非正统数理逻辑和传统形式逻辑也不能作为人工智能机器推理的理论工具

逻辑学家路易斯(C. L. Lewis)不满意数理逻辑学家弗雷格(C. Frege)和罗素(B. Russell)的实质蕴涵,提出了严格蕴涵,并从严格蕴涵出发,用正统数理逻辑的方法构造了模态逻辑严格蕴涵系统。严格蕴涵系统虽然避免了像 $\mathbf{A}\rightarrow(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$ 这一类实质蕴涵怪论,但又产生了自身的怪论。著名的严格蕴涵怪论的定理可举以下几例。

(1) $\Box \mathbf{A} \prec (\mathbf{B} \prec \mathbf{A})$。

其意为,命题“必然 **A**”为任意命题所必然蕴涵。倘若依此定理,由于“地球绕太阳转是必然的”为真,那么,从“天鹅是白的”或“有的天鹅不是白的”,或者其他任何命题都能必然推出“地球绕太阳转”。

(2) $\neg \Diamond \mathbf{A} \prec (\mathbf{A} \prec \mathbf{B})$。

其意为,不可能命题 **A** 必然蕴涵任意命题 **B**。倘若照此定理,由于“地球是长方体的”是不可能的,那么,以“地球是长方体的”为前提,能必然推出任意不合逻辑的命题来,如能推出命题“太阳的体积是 1 平方米”。

(3) $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \prec \mathbf{B}$。

其意为,永假命题必然蕴涵任意命题 B。倘若照此定理,由于“火星是圆球形并且不是圆球形”为永假命题,则,以其为前提,能必然推出任意命题,如能推出命题“太阳是圆锥体”。

(4) $\mathbf{B} \prec \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$。

其意为,任意命题必然蕴涵永真命题。如果照此定理,由于“火星是圆球形或者不是圆球形”为永真命题,那么,从任意命题(如“思维在心脏里进行”)就必然能推出“火星是圆球形或者不是圆球形”。

正因为如此,严格蕴涵仍然不是正确的推理关系。

形形色色的模态逻辑想当然地将“必然”、“可能”处理成一元模态词,而且深深地置身于真值函数的怀抱之中,成为一种特殊的真值函数。因而,其结果同正统狭谓词逻辑一样,依旧是十分古怪的。模态逻辑承认实质蕴涵,承认所谓“逻辑量词”(这是正统狭谓词演算 ***F*** 不能作为人工智能逻辑工具的两大致命点),并且引入量词,构成了形形色色的模态谓词演算 ***QTB***、$\boldsymbol{QS_4}$、***B***、***QT***、$\boldsymbol{QS_5}$ 等,因而模态逻辑逃脱不了“量词”的羁绊。同正统数理逻辑一样,它背离了人的普通逻辑思维实际,不可能成为正确的推理理论,自然不能作为人工智能机器推理的逻辑理论工具。

30 年前,逻辑学家冯·莱特(G. H. VonWright)、阿克曼(W. Ackermann)等人从对实质蕴涵和严格蕴涵的批评出发,提出了相关蕴涵(relevance)。1959 年,逻辑学家安德森(A. R. Anderson)和贝尔纳普(N. D. Jr. Belnap)由相关蕴涵和真值联结词构造了相关逻辑 ***R*** 系统。1958—1962 年,安德森和贝尔纳普把相关逻辑和模态逻辑结合起来构造了衍推蕴涵(entailment)逻辑系统 ***E***。相关逻辑和衍推蕴涵逻辑是作为基础数学的数理逻辑中一个较新的独立分支,然而它们至少仍然存在如下的种种问题:以真值函数关系为基础,承认实质蕴涵;把“必然”、“可能”误当做一元模态词,承认所谓模态逻辑是真正的逻辑;跳不出量词的泥坑,误将语言量词当做逻辑量词,构造了带量词的相关谓词演算 ***EQ*** 系统。故,它们依然背离人的普通逻辑思维实际,不可能成为正确的推理理论,同

样不能作为人工智能机器推理的逻辑理论工具。

传统形式逻辑堪称真正的逻辑科学,其主导思想(如推理能从已知得出新知、论证不循环等)深刻正确。但是传统形式逻辑的形式语言贫乏、形式化程度很低、演算技巧陈旧简陋、直言命题引入不可实施的所谓“逻辑量词”、“所有”、“有些”,其用手工方式搜集的推理式总共才几十个,推理能力十分有限,自然不能作为人工智能机器推理的逻辑工具。

21.5 当代形式逻辑才是人工智能机器推理合适的逻辑工具

当代形式逻辑坚持传统形式逻辑深刻正确的主导思想(如深深地植根于和自然语言形影不离的普通逻辑思考实际,在理论上坚持论证不许循环等),充分继承传统形式逻辑久盛不衰的理论成果,在不背离其作为从已知进入新知的认识工具的真正逻辑科学方向从而不会发展成为数学的一部分的先决条件下,借鉴现代数学作为导致清晰严密的工具的数学方法,廓清了笼罩在传统形式逻辑身上的朦胧的历史迷雾,摒弃了还留存于当今一些流行的传统形式逻辑读物中的种种陈陈相袭的积弊,开发出与现代科学水准相适应的新颖的逻辑思想和逻辑定理,实现了传统形式逻辑的当代发展,是人工智能合适的机器推理的逻辑理论工具。

当代形式逻辑一反传统的认识,认为逻辑学不是研究思维的(事实上人们至今对思维知道得很少),而是研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律的。当代形式逻辑所研究的领域是:现实世界的对象域上的个体、集、一元或多元函数、一元或多元关系、关系间的真值函数关系、关系间的充分条件关系和上述客观关系的客观规律,以及它们在意识中的反映——概念(或词)、命题和推理。如为传统形式逻辑所津津乐道的“概念间的属种关系”事实上就是在研究被概念所思考的客观世界的类(即集)与类间的包含关系。显然,作为一种思考,一个概念怎么可能去包含另一个概念呢?又如被现行逻辑论著奉为圭臬的不矛盾律说:“两个互相矛盾的命题 **A**、¬**A** 不可能同真”。显然,这里说的并非“思维的逻辑规律”,而是客观世界的逻辑规律:两个互相矛盾的事件 **A**、¬**A** 不可能并存。具有“不矛盾”这个带有规律性的逻辑性质的是客观世界,而不是思维,即,**A**、¬**A**只有在客观世界里才是不可能并存的。然而,众所周知,人们的思想事实上往往是可以自觉地自相矛盾的,从而,当代形式逻辑将千百年来被颠倒了的认识重新颠倒过来了。

当代形式逻辑的第二个独到之处是:揭示了使传统形式逻辑具有生命力的充分条件关系的精髓——两个独立性。普通逻辑思考中的充分条件命题“若 **A**

则 **B**”的真值不取决于前、后件(**A**、**B**)的真值,即,“若 **A** 则 **B**”的真值不是 **A**、**B** 的真值的真值函数。当代形式逻辑立足于客观世界的逻辑结构和逻辑规律,深刻地揭举了充分条件关系的两个独立性,指出,“若 **A** 则 **B** 的逻辑语义是:可独立于前、后件的真值确定不会是前真而后假(Ⅰ),并且前件为真可独立于后件的真值确定(Ⅱ)。”Ⅰ称为第一独立性,简称“一独”;Ⅱ称为第二独立性,简称“二独”;两个独立性简称“两独”。当代形式逻辑进一步将“两独”二分为逻辑的和逻辑外经验的两种,从而又将充分条件二分为逻辑的和经验的两种。譬如,在著名的假言推理肯定式:

若:**A**,并且,若 **A** 则 **B**,则:**B**

中,外面那个“若,则”表述逻辑的充分条件,其逻辑语义是:

只依据其前、后件的逻辑结构即可独立于“**A**,并且,若 **A** 则 **B**”和 **B** 的真值确定不会是“**A**,并且,若 **A** 则 **B**”真而 **B** 假,并且,“**A**,并且,若 **A** 则 **B**”为真可独立于 **B** 的真值得到确定。

当代形式逻辑称这种只依据其前、后件的逻辑结构即可确定的两独为“逻辑两独”。而当假言推理肯定式里边的那个“若,则”(可表述逻辑的或经验的充分条件)为经验的“若物体摩擦,则物体生熟”时,其逻辑语义是:

依据其前、后件的逻辑结构和经验内容(此二者合成全部内容)即可独立于“物体摩擦”和“物体生热”的真值确定不会是“物体摩擦”为真而“物体生热”为假,并且,“物体摩擦”为真可独立于“物体生热”的真值得到确定。

当代形式逻辑称这种除了其前、后件的逻辑结构还要依据它们的经验内容才能确定的两独为“经验两独”。

当代形式逻辑用充分条件号“$\rightharpoonup$”联结 **A**、**B** 构成的符号式“$\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$”表示 **A** 是 **B** 的充分条件,即表达“若 **A** 则 **B**”,读做“**A** 则 **B**”或“**A** 必然 **B**”。我们知道,“不是有 **A** 而无 **B**”(即 **A** 实质蕴涵 **B**)是以 **A**、**B** 为变元的真值函数关系;而“可独立于前、后件的真假确定的不会是 **A** 真而 **B** 假”就不再是真值函数关系,而是非函数的充分条件关系了,因为其中有一独。两独对于作为从已知进入新知的工具的逻辑科学来说具有决定性的重要意义。由于当有 $\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$ 时,可独立于 **A**、**B** 本身的真假确定(一独)不会是 **A** 真而 **B** 假,可独立于 **B** 真确定 **A** 真(二独);故,当有 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\rightharpoonup\mathbf{B}$ 时,就可独立于 **A** 与 $\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$、**B** 本身的真假确定(一独)不会是 **A** 与 $\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$ 真而 **B** 假,可独立于 **B** 真确定 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$ 为真(二独)。于是,可独立于 **B** 为真去确定 $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})$ 为真,并由此确定原本未确定真假的 **B** 为真。至此,我们看到了,包含在充分条件关系中的两个独立性是推理能得出新知(**B**)的逻辑根据,构成了向人们提供从已知(**A** 与 $\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B}$)进入新知(**B**)的工具的逻辑科学的两块基石,替人们铺平了从已知进入新知的道路。

时至今日,只有当代形式逻辑才清楚地、如实地刻画了充分条件关系。当代

形式逻辑中的充分条件关系就是刻画清楚后的必然关系。充分条件关系不是任何蕴涵关系的变种,它与实质蕴涵、严格蕴涵、相关蕴涵、衍推蕴涵有着实质性的区别。充分条件关系事实上构成了普通逻辑思考中可据以进行不循环论证从而能出新知的推理格式的理论核心,因此,充分发展了传统形式逻辑,就称为当代形式逻辑——鉴于它是研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律的,故而也可称做客体说形式逻辑。

当代形式逻辑的另一个独到之处是:不用量词。正统的谓词演算中的全称量词“每一个”($\forall$)只是语言中有时出现的语言量词。但被语句所承载的命题或被语句所指谓的客观事件的逻辑结构中根本就没有要求人们去逐一列举并逐一确定“每一个”个体如何如何的“逻辑量词”。对于可列举域如“在座的人”来说,设“在座的人”为 n 个可列举的个体,语句“每一个在座的人都是黄种人”(β)指谓下述事实:n 个原子事件的并存(即合取)。为 β 所表述的命题的逻辑结构为:n 个原子命题的合取,即:

$$p(e_1)\wedge p(e_2)\wedge\cdots\wedge p(e_n)$$

当代形式逻辑称为“外延合取命题”。

对于不可列举域为“人”来说,“凡人皆有死”(β′)指谓的并非 n 个事件的并存(即合取),因为思考者根本不可能说出人的个数到底是多少,根本不可能知道有多少个原子事件。因而语句 β′表述的不是外延合取命题。它所指谓的是这样的事实:事件“x 是人”是事件“x 有死”的充分条件。β′所表述的命题的逻辑结构是:$s(x)\rightharpoondown p(x)$。其逻辑语义是:具有两独的不会是 $s(x)$ 真而 $p(x)$ 假。具有 $s(x)\rightharpoondown p(x)$ 结构的命题称为“内涵充分条件命题”。可见,无论对于外延合取命题还是内涵充分条件命题来说,从逻辑结构上看事实上都没有什么“逻辑量词”。不用量词,不仅在技巧上可以避免含有量词的形式系统所不可避免的种种麻烦”,“而且,从主导思想方面说,不引入量词更接近普通逻辑思维实际。更重要的是,没有量词的名词演算 ***Cn*** 系统将为解决判定问题提供明朗的前景。不用量词是当代形式逻辑在逻辑史上的独创。

当代形式逻辑还有很多独到之处:除了建立起贯彻两个独立性的命题演算 ***Cm*** 系统、名词演算 ***Cn*** 系统和带等词的名词演算 ***Cnd*** 系统外,还在此基础上建立了以当代形式逻辑为逻辑的初等数论 ***N*** 系统,为进一步建立既具有不矛盾性又具有完全性(正好与著名的“可德尔不完全性定理”相反)的数论系统奠定了基础。当代形式逻辑彻底了结了迄今还使数学处于所谓“第三次危机”之中的悖论问题,指出:所谓“悖论”原本是“智”者对人类理智开的严肃认真的玩笑。当代形式逻辑排除了一切衍式故而排除了全部实质蕴涵怪论及像 $\mathbf{A}\wedge\neg\mathbf{A}\rightharpoondown\mathbf{B}$ 等为一般模态系统所难以避免的怪论。当代形式逻辑分析、处理了一系列逻辑史上迄今争论不休、久悬未决的难题(如客观基础、真假对错、宾词周延、主词存

在、演绎推理能否出新知、已证明的结论是否已证实等)，并全都获得了确定而又合理的解决……

总之，当代形式逻辑是迄今人们所看到的正确的推理理论，是作为人们从已知获取新知的一种很好的逻辑工具。此外，当代形式逻辑取消量词，便于机器实现，具有逻辑技术处理独特的优点。当代形式逻辑对知识的推理能力和表达能力强而且丰富。通过上述比较，显然只有当代形式逻辑才是人工智能机器推理合适的逻辑理论工具。

21.6　基于当代形式逻辑的内涵智能机核心元件是“必然门”

必然门是机器推理能从已知获取新知的核心元件。

客观事件间的客观的充分条件关系就是刻画清楚后的必然关系。当代形式逻辑采用可按对客体指谓同一的准则与自然语言互相翻译(语用学)的符号语言的机械的排列结构和变形规则(语构学)来研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律(语义学)，向人们提供在认识宇宙时其普遍有效的从已知进入新知的逻辑工具。当代形式逻辑最显著的特异性可归结为下述元逻辑思想:客观世界具有像化学结构、化学规律一样客观的逻辑结构、逻辑规律;宇宙不仅具有按一定的化学结构、化学规律从原有物质生成新物质的化学反应能力，还具有按一定的逻辑结构、逻辑规律从原有事件必然过渡到新事件的逻辑运演机制。当代形式逻辑以宇宙际客观的逻辑运演机制为研究对象，是研究客观世界的客体逻辑。在由语义学、语构学、语用学三位一体地组成的体系中，语义学是根本，语构学是清晰透彻而又完备无误地进行语义研究的形式化工具，而语用学则是为了沟通语义理论和采用自然语言的人们的应用实际，向人们提供有效而可行的逻辑方法。当代形式逻辑语构学的主要特征之一是不采用量词，从而当代形式逻辑形式系统不可能与采用量词的各种数理逻辑形式系统等价。当代形式逻辑可在自然语言理解、知识的获取和表示、机器翻译、自动推理、专家系统等人工智能领域中获得应用。

半个世纪来获得迅速发展的外延电子数字计算机的最根本的特征是:以模拟真值函数的与、或、非门作为硬件基础元件，故而，从静态看，任一状态是一个由“0 - 1”组成的有限序列:从动态看，每一次运算仅仅是通过二值的加法运算从一个“0 - 1”的有限序列变换到另一个“0 - 1”的有限序列。外延电子数字计算机在元件的理化状态、运算速度等方面的进展都丝毫改变不了取决于作为基础元件的与、或、非门的上述根本特征，因此，不可能具有从已知进入新知这种作为人类智能基本机制的功能。

未来真正的人工智能的基础装置是内涵智能机,其硬件的核心元件是从根本上区别于与门、或门、非门、输入与输出之间不是任何函数关系的必然门,必然门是机器推理能从已知获取新知的核心元件。而与门、或门、非门仅仅是起大量存储快速检索信息这种辅助作用的次要组成元件。当代形式逻辑刻画清楚了必然门的逻辑性质,为研制必然门从而进一步设计、制造内涵智能机提供了作为重要基础理论的逻辑理论基础。

人类智能作为一种思想,必定有物质原型,那便是客观的宇宙智能。倘无宇宙智能作为原像与之对应,那种人类的思想便是向壁虚构、脱离实际从而有害无益、只会碰壁的空想、瞎想,决非智能。“智”者切实、合理,“能”者可行、有益。而这,就因为有宇宙智能作为原像与之对应。故而,倘若无宇宙智能,人类又何来作为其映像的人类智能?因此,人类之所以具有智能,只不过是以人脑能实现的方式(在漫长的几百万年的进化过程中逐步形成)去如实摹写宇宙智能。如此而已,岂有他哉!有智能的人类明乎此,当要去发明创造可通过人机交流帮助人类进行发明创造的称为“人工智能”的机器时,除了让机器也像人类似的以自己(即机器)能实现的方式如实模拟宇宙智能(只有如实模拟这一点与人类完全一样,而其所采用的实现方式则与人类根本不同,因为,在工厂里制造的机器与几百万年进化而来的人类根本不同)之外,又何必苦苦地去寻求什么“认知模拟”、“人机合一”?倘若把宇宙智能比做太空中的明月,把人脑(所谓“脑海”)比做地球上的海洋,那么,人类智能便是海洋中的月影(海水对明月的如实反映);于是,人工智能要做的事情决不是“海洋模拟”、“海机合一”,而只是简简单单地做一面镜子(与海洋根本不同),即可将明月映入其中,与海洋中的月影比美;而“认知模拟”、“人机合一”却凭借先进的科技手段潜入海中,于是,捞起了带鱼螃蟹,甚至开出了海底石油,尽管这些都很好、都很有用,但与其预定的目标“获取月影”无关——形象的比喻能说明事理,但永远是跛脚的,这里只采用比喻中很相像的一点:从20世纪50年代美国开始,国际人工智能界半个世纪来先后在“认知模拟”、“人机合一”方针指导下千方百计地忙碌,尽管收获巨大,然而种种进展不仅与其预定目标“获得智能”无关,甚至迄今还说不清楚究竟什么是“智能”(不管是人类的还是机器的);正由于此,才把种种与“智能”无关的东西硬称为“智能”。

可以预测:当人类终于研制出第一台真正的智能工具时,除了按自己能实现的方式去摹写宇宙智能这一点外在性质像人脑外,这二者的宏观、微观内在机制由于根本无须模拟从而是根本不同的。第一台智能机绝不会在“认知模拟”、“人机合一”方针下实现。等到2050年,即使真的有了“人机合一”机器,不用说绝不会超过人的全部智能,连人的全部本能(如控制肢体运动)也超过不了。

如果说,在农业和工业时期,社会财富和国家实力的来源是土地、厂房、第二

代或第三代工具和劳动力，那么，在工业后的信息、智能时期，社会财富和国家实力的主要来源将是智能科学及在其指导下获得的智能装备。当前的局势可说是“大泽龙方蛰，五洲鹿正肥”。正在叩击第五个工具时代——智能工具时代门环的国际人工智能界这种还彷徨于“认知模拟”、“人机合一”迷途的历史状况，给中华民族在新世纪赢得在这个领域中的世界科技领先地位，形成超越国际先进水平的经济、军事实力，提供了奋力拼搏的绝好机遇。吸取由于武器（杀人的工具）的一代之差（第二代冷武器对第三代热武器），英法联军直捣京师，火烧圆明园的历史教训。排除干扰、当机立断，对内涵智能机迅速投入力量付诸工程实施。这里竭诚祈愿首先由中国人研制出第一台内涵智能机。为实现此目标，我们愿与有志于此的中国人齐心合力、共同奋斗！

21.7　必然门原理研究

必然门是基于当代形式逻辑的内涵智能机的核心元件，它根本区别于以往的外延计算机硬件的与门、或门和非门，输入和输出之间不是真值函数关系。本节综合当代形式逻辑、耗散结构论、协同论、非线性数学等理论提出实施必然门的原理。必然门的数学证明借鉴了协同论从被支配模推算出序参量方法，对不可能性的证明具有基本的重要性。这些证明隐含着发现现实的一种出乎意料的内在结构，是一些新机会的开辟。当代形式逻辑十个公理中就表述了两个不可能，其中 **A ¬B→¬（A→B）**，即¬［**A ¬B ！（A→B）**］，读做有 **A** 无 **B** 不可能 **A** 是 **B** 的充分条件。怎样才能刻画清楚 **A** 是 **B** 的充分条件呢？当代形式逻辑是用元语言表达的，这就是两个独立性。

第一独立性：不依据 **A**、**B** 的有无就可以确定不会是有 **A** 而无 **B** 。第二独立性：不依据 **B** 的有无就可以独立地确定 **A** 的有。必然门是未来内涵智能机的关键硬件，它不是真值函数，用现代外延计算机的与门、非门、或门的任何组合都实现不了必然门的功能。

A→B 中，**B** 是把一个补充的基本要素——内部时间 **T**——加到 **A** 里面去。这个时间不是一个数，而是一个算符，即用算符时间 **T** 对必然演变 **A→B** 进行描述，得到两种可能的描述：或者为自己给出相空间的一个点，这时我们不知道它属于哪一个划分，因而不知道它的内部年龄，或者知道它的内部年龄，但只知道划分，而不知道该点的精确位置。因此在内部时间 **T** 内，不可能确切地知道 **A**、**B**，但可以确定不会是有 **A** 无 **B** 。在 **A→B** 的必然演变中，前件即初始条件 **A** 和必然演变 **A→B** 出现了一个关系，带有时间之矢的 **A** 出自必然演变 **A→B** ，必然演变 **A→B** 也带有某时间之矢，并且改变了 **A**，但保持着它的时间之矢。所以 **A** 可以独立于 **B** 确定。**B** 是由 **A** 和必然演变 **A→B** 推出的，因此 **B** 对于 **A** 来说是

新知。

量子力学的基本思想是哈密顿量及经典力学的其他量，如坐标 q 或动量 P 都变成了算符。我们必须分清算符（一种数学运算）和它作用的对象（一个函数）。在一给定算符作用后只是复原的函数，称做这个算符的“本征函数”。算符作用后将本征函数乘上的数就是该算符的“本征值”。量子力学中的时间仍然是个数。

在当代形式逻辑名词演算 ***Cn*** 中有公式 203（**U**（**x**）⇀**A**）⇀**A**（若必然 **A** 则 **A** 律），其中的 **U**（**x**）⇀为必然算子，**A** 为算子作用的对象。（**U**（**x**）⇀**A**）⇀**A** 是 **A**⇀**B** 的特殊情况，是必然门的定义式、是重正化群逻辑结构式。只要选准本征函数和本征值，外延计算机与内涵智能机就能有机结合起来。

宇宙是有智能的，是指它的自组织能力。协同学研究一类由许多子系统构成的系统——这些子系统的性质可能截然不同，如电子、原子、分子、细胞、神经原、光子、器官、动物乃至人。协同学研究这些子系统如何协作，形成宏观尺度上的空间、时间或功能结构。协同学特别地研究了这种有序结构是如何通过自组织方式形成的。当代形式逻辑采用人工符号，从充分条件关系入手，刻画客观的逻辑结构和规律，与协同学相呼应。

海尔曼·哈肯（Hermann Haken）通过严谨的数学方法导出支配原理。所有的被支配模 ξs 都可以由序参数 ξu 显式地表出，即 $\xi s = fs(\xi u,\ t)$。对于所处理的大部分现实问题来说，序参数的数目一般是为数少的，而被支配模的数目可能是庞大的。这意味着可以将原来的方程所描述的极其复杂的系统简化为一些相对来说简单得多的方程，即序参数方程，$\xi u = M(\xi u, F)$。必然门的数学证明可以借助于哈肯教授的卓越工作。

模式（**U**（**x**）⇀**A**）⇀**A** 是抽象的，它是充满结构的无穷阶梯。什么样的数学才能产生多重尺度的模式？这些函数里必须有“递归”、“自我引用”的东西，一个函数的行为由藏在里面的另一个函数的行为导引，表现了某种改变一个函数的尺度以匹配另一个函数的办法。大自然的分形分维几何充分体现了这一点。使用重正化群理论的数学，用尺度变换把无穷大化为可处理。

迭代一个方程，而不是求解它时，这个方程变成了过程而不是描述，是动态的而不是静态的。

简单的决定论模型产生精巧的细微结构——尺度结构，大自然用简单的物理定律组织自身，处处以无限的耐心重复着同样的规律。复杂性来自持续不断的迭代过程，必然演变隐藏在复杂的结构中，它仅仅是尺度变换的东西，大自然把复杂性和简单性拴到一起。借助自相似性，给出折掉复杂性的方法，每次消去一层。

当代形式逻辑的命题演算 ***Cm*** 系统是由 10 个公理模式、采用两个原始规则导出、在命题演算 ***Cm*** 的基础上建立的名词演算 ***Cn*** 系统，只是补充形式语言

（引入个体变元、函数词和名词）；带等词号的名词演算 ***Cnd*** 系统，是在 ***Cn*** 基础上加等词号和关于等词号的三个公理。总而言之，当代形式逻辑仅是尺度结构上的尺度变换，仅是人类用符号成功地摹写了大自然的逻辑结构和逻辑规律。当代形式逻辑今后的发展还要按这种模式进行下去。

自然科学各领域希望向生物学渗透，从打开生命过程之谜中索取智慧、模板或原型，必然门从生物界中得到启示。

———不同生物体的遗传密码是完全相同的；

———生命现象在形式上是多种多样的，但是生命现象中最本质的东西在不同物体中的高度是一致的；

———整个生物界中构成生物体的基本物质的分子结构及分子活动都是非常相似的，在他们的最基本方面，有时甚至是完全相同的；

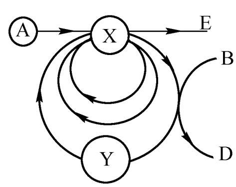
———蛋白质是由 20 种不同的氨基酸组成的，核酸是由 4 种主要的核苷酸所组成的，这 20 种氨基酸和 4 种主要的核苷酸在不同种属的生物体中是完全一致的。

必然门至少有 10 个，它们的逻辑结构式为：$\mathbf{A}\to\neg\neg\mathbf{A}$；$(\mathbf{A}\to\mathbf{B}\to\mathbf{C})\to\mathbf{B}\to\mathbf{A}\to\mathbf{C}$；$(\mathbf{B}\to\mathbf{C})\to(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to\mathbf{A}\to\mathbf{C}$；$(\neg\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to\neg\mathbf{B}\to\mathbf{A}$；$\mathbf{A}\neg\mathbf{B}\to\neg(\mathbf{A}\to\mathbf{B})$；$\mathbf{A}\to\mathbf{AA}$；$\mathbf{AB}\to\mathbf{A}$；$\mathbf{AB}\to\mathbf{BA}$；$(\mathbf{A}\to\mathbf{B})(\mathbf{A}\to\mathbf{C})\to\mathbf{A}\to\mathbf{BC}$；$\mathbf{A}\neg(\neg\mathbf{B}\neg\mathbf{C})\to\neg[\neg(\mathbf{AB})\neg(\mathbf{AC})]$，最多十几个。

下面举例说明。

若核酸、蛋白质和核酸蛋白质互催化关系分别用 **A**、**B**、**C** 代表，其逻辑结构式可表示为 $(\mathbf{A}\to\mathbf{B}\to\mathbf{C})\to\mathbf{B}\to\mathbf{A}\to\mathbf{C}$。

核酸与蛋白质之间的关系可以用一种交叉催化效应来描述：核酸每个分子都能再生其自身并在蛋白质的合成中起催化作用，蛋白质催化着核酸分子的自我再生。核酸和蛋白质之间存在的横向催化可以用“布鲁塞尔器”来表示，其反应路径如图 21.1 所示。



或

A→X

B+X→Y+D

ZX+Y→3X

X→E

图 21.1　核酸和蛋白质之间横向催化反应路径

核酸与蛋白质互相催化化学过程的非线性微分方程表示为：

$$x' = \mathrm{A} - (\mathrm{B}+1)x + x^2 y$$
$$y' = \mathrm{B}x - x^2 y$$

我们愿意同任何一位与必然门的哲学精神有遥远共鸣的人建立联系！

21.8 内涵智能机（1）——两个基础一个结合

现已证明，DNA 计算的剪接模型是完备的，理论上存在一个基于剪接操作的通用的可编程的 DNA 计算机，其程序可由向通用 DNA 计算机公理集和规则集中添加的字符串组成。现在的问题是这些公理集和规则集是否是有限的，如果是有限的，它们的逻辑式怎样表述，以它们为基础如何形成符号语言，这些符号语言的语义学、语构学、语用学是怎么论述的。笔者几十来悉心研究当代形式逻辑、混沌学、耗散结构理论、协同论、突变论、生物化学、中国医易学，在会通这些横断科学的基础上，对必然门进行了深入的研究。2000 年 11 月在贵州大学学报上发表了相关论文，可见本书 21.7 节。

“希望通过向生物学的渗透，从打开生命过程之谜中索取智慧、模板或原型，必然门从生物界中得到启示。

——不同生物生物体的遗传密码是完全相同的；

——生命现象在形式上是多种多样的，但是生命现象中最本质的东西在不同物体中却是高度一致的；

——整个生物界中构成生物体的基本物质的分子结构及分子活动都是非常相似的，在它们的最基本方面，有时甚至是完全相同的；

——蛋白质是由 20 种不同的氨基酸组成的，核酸由 4 种主要的核苷酸所组成，这 20 种氨基酸和 4 种主要的核苷酸在不同种属的生物体中是完全一致的。

具有生物化学知识的人一眼可以看出，矛头直指 DNA。DNA 是由称做核苷酸的一些单元组成的，这些核苷酸随着附在其上的化学组或基的不同而不同。共有 4 种基：腺嘌呤 A、鸟嘌呤 G、胞嘧啶 C 和胸腺嘧啶 T。一些单个的核苷酸顺序连在一起形成 DNA 链。单链 DNA 可以看做是由 A、G、C、T 组成的字符串。从数学上讲，这意味着可以用一个含有 4 个字符的字符集 Σ = A、G、C、T 来为信息编码，硅计算机即电子计算机仅使用 0 和 1 这两个数字。

由于 21.7 节运用了横断科学的几门专业的概念表述，文字仅有 3 页，会通这几门专业的人甚少，读起来很困难。实事求是地讲，21.7 节仅是给出了研究的一个详细摘要、一种思路、一个大纲。

大自然是有智能的，是指它的自组织能力，它是人类智能的源泉。各门科学仅是从独立的一个方面表述了它、摹写了它。大自然最根本的性质就是质朴（简单）、和谐、美。大自然总是从最简单的元素开始，应用最简单的物理、化学定理组织自己，不断自我引用。经过几十亿年的演化，呈现在人类面前的大自然

极其复杂,眼花缭乱的分形、分维结构,有无限个被支配膜,呈现无限阶梯,不是无限小就是无限大,到处都表现出非线性,人们不禁要问,不同专业怎样表述大自然的质朴、和谐、美。

内涵智能机是摹写了大自然智能的机器,能从已知得出新知,含有充分条件关系联结词、与联结词和非联结词。硅计算机不含有充分条件关系联结词,仅含有与联结词和非联结词(其中的或联结词、蕴涵联结词都可用与、非联结词定义),没有智能。0、1 字符集不能表现智能。含有腺嘌呤 A、鸟嘌呤 G、胞嘧啶 C、胸腺嘧啶 T 的 4 字符集 Σ = A、G、C、T 能否表示智能,答案是肯定的。Adleman 应用 DNA 计算机首先解决 NP 完全问题之一的有向哈密顿路径问题就是很好的证明。内涵智能机与 DNA 计算机有什么关系,DNA 计算机能否取代硅计算机,0、1 字符集与 A、G、C、T 字符集的关系,什么是内涵智能机,要回答这些问题,关键就要深入研究 A、G、C、T。从它们的基本结构开始,应用中国人最早的阴、阳理论去定义它们,寻找它们的阴阳表示,即 A = ;G: = ;C: == ;T: == ;再把该定义拿到生物化学的成果中加以验证,最起码从 DNA 的化学组成及结构,从生物体的遗传性状以密码的形式编码在 DNA 分子上,表现为 DNA 的碱基排列;从 Waston - Crick DNA 双螺旋结构,从 DNA 的形态及性质几方面验证 A、G、C、T 的阴阳表示是否合理。合理后进入下一步,从量子位研究 A、G、C、T,得出 C 为确定位[0],T 为重叠位$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$,A 为重叠位$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle+|0\rangle)$,G 为确定位[1]。进一步得出 DNA 分子的超并列性,是由于碱基的量子位性质决定的在 DNA 分子自组织化程序化实现的结论。DNA 计算机超并列运算,有别于硅计算机的并列运算,前者是自组织,后者是他组织,他组织的并列运算解决不了非决定性的计算,例如被 NP 完全问题代表的那些问题。这是 Adleman 成功的关键。再进一步就是将 A、G、C、T 表示为四进制:

$$C \equiv 00 \equiv 0_4 \qquad T \equiv 01 \equiv 1_4$$
$$A \equiv 10 \equiv 2_4 \qquad G \equiv 11 \equiv 3_4$$

这是将 DNA 计算机和硅计算机有机结合起来最关键的一步,有了它硅计算机就可以很好地为 DNA 计算机服务、根据 DNA 计算机、硅计算机不同的能力解决不同问题,以此作为它们分工的根据。

现在来回答本节开头提出的问题。DNA 计算机正处在发展的关键时期,正为自己寻找基础理论和应用基础理论。教育部资助项目的两本书——《当代形式逻辑引论》(电子工业出版社,2009 年 3 月出版)和本著作就是其基础理论。在本著作中,由于保密的原因,有些重要的定理没有发表,但不失它的完整性。这本书从语义的研究入手(《当代形式逻辑引论》和本书的第 1 篇、第 2 篇),然后,在此基础上,转而介绍语构的研究(本书的第 3 篇、第 4 篇),把有关语用的研

究适当地穿插在其中。令当代形式逻辑界专家们始料不及的是,当代形式逻辑摹写了 DNA! 也就是说,DNA 是当代形式逻辑活生生的载体。鉴于 DNA 复制体系是完备的,因而当代形式逻辑也是完备的。

要得出以上结论必须深入研究 DNA,要有很深的生物化学的功底,建议搞当代形式逻辑的人很好地研读宓怀风先生编著的《生物化学》。把《生物化学》同本著作的有关章节对照着仔细研读,就会发现,除了专业术语不同外,两本书共同指谓同一个东西。要得到这种来之不易的快乐,笔者整整花了三十年时间学习和思考! DNA 计算机的应用基础理论之门终于打开了。

——当代形式逻辑十个公理中的 $\mathbf{A}\to\neg\neg\mathbf{A}$ 公理用 DNA 语言表述就是 DNA 半保留复制,在这里非联结词“¬”更多地理解为“有补”,在当代形式逻辑里强调无就是有补。

——DNA 半保留复制中,一条为先链,另一条是以称为冈崎片段的短片段形式间断合成的,称为迟链。迟链的逻辑关系为$(\mathbf{A}\to\mathbf{B})(\mathbf{A}\to\mathbf{C})\to\mathbf{A}\to\mathbf{BC}$。

——遗传信息的传递包括复制、转录及翻译,核酸与蛋白质之间的关系可以用一种交叉催化效应来描述:核酸每个分子都能再生其自身并在蛋白质合成中起催化作用,蛋白质催化着核酸分子的自我再生。若核酸、蛋白质和核酸与蛋白质互催化关系分别用 **A**、**B**、**C** 代表,其逻辑结构式可表示为$(\mathbf{A}\to\mathbf{B}\to\mathbf{C})\to\mathbf{B}\to\mathbf{A}\to\mathbf{C}$,或者表示为$(\mathbf{B}\to\mathbf{C})\to(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\to\mathbf{A}\to\mathbf{C}$。

——限制性内切酶在不同位置同时裂解 DNA 双链,并把它分离成两条单链。用当代形式逻辑语言描述:**A** 是 DNA 双链,在某种限制性内切酶催化下,必然裂解成一种类型的两条单链 **B**,表示为 $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$,因此当代形式逻辑的分离规则可表示为:从 **A** 与 $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 得出 **B**。

——合取规则:从 **A** 与 **B** 得出 **AB**,对于 DNA 链来说则是利用了聚合酶,连接酶之类的工具酶而实现的。

DNA 如此天衣无缝地、美妙地演绎了当代形式逻辑体系的四个公理和两个原始规则。通用可编程的 DNA 计算机的公理集和规则集是有限的,它们的数量分别是最多十个和两个,其程序可由向这些公理集和规则集中添加的 A、G、C、T 字符串组成,以它们为基础形成符号语言,这些符号语言的语义学、语构学、语用学正如本著作论述的那样,建议搞 DNA 计算机的人很好地研读本著作。

内涵智能机就要呼之欲出了! 我们把它表述为“两个基础一个结合”:第一个基础是以当代形式逻辑为基础的 DNA 计算机,第二个基础是将四个碱基表示为 C≡00≡04、T≡01≡14、A≡10≡24、G≡11≡34 四进制,作为量子位使用的硅计算机;一个结合就是将上述两种计算机有机结合起来,让硅计算机为 DNA 计算机服务,使 DNA 计算机的输入和输出变得好操作。

我们有以下任务。

(1)纳米技术的发展,使生物芯片技术正在向纳米化、高度集成化和多功能化发展,基于当代形式逻辑的 DNA 计算机做成集成 DNA 芯片才算通用 DNA 计算机。

(2)将当代形式逻辑命题演算 ***Cm*** 系统、名词演算 ***Cn*** 系统碱基代码化。关键问题是 10 个公理、两个原始规则、个体变元、函数词和名词碱基代码化,然后根据碱基四进位制中的二进位制代码,编出当代形式逻辑公理、定理库,储存在硅计算机中以便查找 DNA 计算机的输入和输出。

(3)通过生物学的实验操作,达到碱基组装计算之目的,实现 DNA 自组织程序化,表达充分条件关系,解决硅计算机难以解决的问题。

(4)成立一个权威的领导体系。

(5)建立专家委员会和会战军团,在若干年内培养出会通内涵智能机各专业的年轻博士群。

21.9　内涵智能机(2)——从硅计算机到 DNA 计算机的转移

内涵智能机表述为“两个基础一个结合”:第一个基础是芯片化了的以当代形式逻辑为基础的 DNA 计算机,第二个基础是将四个碱基表示为 C≡00≡04、T≡01≡14、A≡10≡24、G≡11≡34 四进制,作为量子位使用的硅计算机;一个结合就是将上述两种计算机有机结合起来。

内涵智能机的系统结构由两部分组成:一个是硅计算机(也就是电子计算机),一台装备先进的个人计算机就可以;另一个是通用的可编程的 DNA 计算机。其物质形态,2013—2015 年为个人计算机加精心设计的使程序代码化在碱排列中的装有 DNA 片段的二十几根试管列,它的表述只是在本节第一段中去掉“芯片化了的”五个字。可以断言,这样的专为解决某一问题设计的内涵智能机是有智能的,是完全可实用的。2040 年芯片化了的内涵智能机就像现在的一台笔记本电脑。2110 年的内涵智能机就只是和人脑连接的一个接口。2110 年前的内涵智能机界面语言是简体中文,现有的用于计算机的各种语言可以自由应用。

如此简单质朴的东西,人们不禁会产生疑问:那就是内涵智能机? 这要从硅计算机到 DNA 计算机的五个转移说起:①材料从无机硅向有机分子 DNA 转移;②方法从微细化向自组织化转移;③理论基础从数理逻辑向当代形式逻辑转移;④制造方法从由上而下向由下而上转移;⑤消耗向低碳转移。除去这些条件以外,还要大量使用 DNA 分子生物学的实验操作。①合成:用 DNA 合成机,合成长度达到 100 碱基对左右的任意的 DNA 排列。②分离:将凝胶电泳后的凝胶切断运出来,分离出特定长度的 DNA 排列。③合并:将装在两个试管中的东西混

在一个中。④萃取:使用生物素——抗生物素蛋白,将包含某种图形作为部分列的 DNA 排列萃取。⑤退火——熔化:将互补的两根 DNA 排列耦合成两根链,从两根链分离成一根链。⑥放大:使用 PCR(聚合酶链锁反应)的 DNA 排列的大量复制制作。⑦切断:使用限制酶的 DNA 排列的切断。⑧酶连接:使用连接酶将具有互补剖面的 DNA 排列连接起来。⑨检测:试验管中哪怕含有一个 DNA 排列也要检测出来或检测出不含任何 DNA。这九项技术,我国已完全成熟。

硅计算机使用物理原理进行计算。DNA 计算中,两个碱之间称为 Watson-crick 互补耦合,被用在分子识别中。具体说就是利用腺嘌呤(A)和胸腺嘧啶(T)之间、鸟嘌呤(G)和胞嘧啶(C)之间的相互作用进行计算。DNA 计算是自组超并列计算,基于当代形式逻辑使该计算程序化就能产生智能。

DNA 计算的强大功能在于 DNA 分子的微小性和超并列性。例如,如果用一根标准尺度的 DNA 齐聚物表示一个文字,在 1ml 的溶液中就能实现具有六亿亿 B 存储容量的存储器。另外,使这样庞大数量的 DNA 分子超并列地工作,如果一次操作执行命令,即使一次操作费时 1000 秒,也相当于每秒执行六十万亿个命令。超并列性是由嘌呤、嘧啶量子位性质决定的,量子位性质是程序化自组织运算的基础。只有自组织的并列运算才能产生智能,无量子位的硅计算机即使并行运算也不能产生智能。

21.10 内涵智能机(3)——必然门就是程序化自组织 DNA 超并行运算

演绎推理的前提与结论之间的必然关系的两个独立性——第一独立性和第二独立性,是深刻的逻辑理论观点。如果演绎推理的结论必须是前提下所包含的,那么又何以还能给人以新知?两个独立性的提出,回答了这个难题。如何理解两个独立性,关键问题是引入算符时间。在量子力学中,时间仍然是数,不是算符。如果时间是一个数,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的前、后件的关系是确定的真值关系;那就是蕴涵关系;如果时间是算符,前、后件的关系就没有确定值,而是具有一系列可能值,即时间算符的本征值;因此我们不能确切地知道 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$,但是可以确定不会是有 $\boldsymbol{A}$ 无 $\boldsymbol{B}$,那就是充分条件关系。在表示充分条件关系时,一定要寻找具有量子位性质的材料——DNA。

两个独立性作为从已知进入新知的工具,对逻辑科学来说具有决定性的重要意义,它也是破解必然门的必经关隘。必然门是程序化自组织 DNA 超并行运算,因此径直去研究两个独立性和组成 DNA 的四个碱基是关键。该研究必须是一语中的、揭示其根本内涵的真知灼见,方法是创新的、重点突破的。一独和二独相辅相成,互相配合确保逻辑科学成为从已知进入新知的工具。当 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的

充分条件时,可独立于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的有无确定(一独)不会是有 $\boldsymbol{A}$ 无 $\boldsymbol{B}$,可独立于 $\boldsymbol{B}$ 为有确定 $\boldsymbol{A}$ 为有(二独),这是用元语言表述的两个独立性。四个碱基是胞嘧啶 C、胸腺嘧啶 T、腺嘌呤 A、鸟嘌呤 G,C、T、A、G 组成了 DNA。DNA 运算是自从有生物以来,决定生物进化的根本运算,已经在大自然运演了几十亿年。当今我们摹写这种计算是站在当代形式逻辑的基础上的,使这种计算程序化,进入从已知到新知的人工智能新时代。

$\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}$ 是把一个补充的基本要素——内部时间 T——加到 $\boldsymbol{A}$ 里边去,这个时间不是一个数,而是一个算符,即用算符时间 T 对必然演变 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 进行描述,在内部时间 T 内,我们不可能确切地知道 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$,但是可以确定不会是有 $\boldsymbol{A}$ 无 $\boldsymbol{B}$。在 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 必然演变中,前件即初始条件 $\boldsymbol{A}$ 和必然演变 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 出现了一个关系,带有时间之矢的 $\boldsymbol{A}$ 出自必然演变 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$,必然演变 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 也带有某时间之矢,并且改变了 $\boldsymbol{A}$,但保持着它的时间之矢,所以 $\boldsymbol{A}$ 可以独立于 $\boldsymbol{B}$ 确定,$\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 和必然演变 $\boldsymbol{A}\rightharpoonup\boldsymbol{B}$ 推出的,因此 $\boldsymbol{B}$ 对于 $\boldsymbol{A}$ 来说是新知。

在算符时间内程序化自组织 DNA 超并行运算,其实质是对由 DNA 序列表示的初始信息执行简单的操作——复制、剪接,最终形成的集合体的结构由各 DNA 片段碱排列决定。复制由 PCR(聚合酶链锁反应)完成,剪接由限制性内切酶、DNA 连接酶、外切酶协同完成。该过程完成了必然门的运演,进行了一个不漏的解决问题的探索。所有候选解都包含在超并行运算中,解不是唯一的,取出正确的解,是由将四个碱基表示为 $C\equiv 00\equiv 04$、$T\equiv 01\equiv 14$、$A\equiv 10\equiv 24$、$G\equiv 11\equiv 34$ 四进制,作为量子位使用的硅计算机完成的。

大自然给我们准备了程序化自组织 DNA 超并列运算的充分条件:第一、四个碱基具有量子位性质,C 为确定位[0],T 为重叠位$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>+|1>)$,A 为重叠位$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1>+|0>)$,G 为确定位[1];第二、限制内切酶识别链中特定的短序列,并在该位上将其“切割”用做分离算符,连接酶把刚切过的 DNA 粘端与其他链搭接在一起或连接在一起,作为绑结算符,聚合酶可作为自我复制放大算符。这些算符对具有量子位性质的碱基串运算,就完成了程序化自组织超并行运算,也就是完成了必然门的运演。

我国首先研制内涵智能机的有利条件如下所述。

(1)科学发展观日益深入全党、全军、全国人民。在“两弹一星”精神鼓舞下,举国上下万众一心,拧成一股绳。社会主义大合作是战无不胜、攻无不克的。

(2)通用的可编程的 DNA 编程计算机的理论基础——当代形式逻辑在中国大地上创立、发展。相信作者暂未发表的定理,再加上全党、全军、全国人民的齐心协力,能够使中华民族在国际人工智能研制中居于领先地位。

（3）我国有会通生物学、当代形式逻辑学、横断科学、纳米技术的人，将成为研制内涵智能机的点火者。

希望世界第一台内涵智能机首先在中国大地上诞生！

21.11 附　　件

Orthodox Mathematical Logic is Not a Reasoning Theory

written by Gong Qirong
(North region of Guizhou University , Guiyang huaxi 550025, P. R. China)
E-mail: gongmuwen@163. com

The real meaning of the material implication of the truth connectives in orthodox first-order predicate calculus system ***F*** which is the foundation of orthodox mathematical logic is that it is not the case in which the implicans is true whereas the implicate is false. The truth value of the implication proposition "**A→B**" is the truth function of the truth values of the implicans and the implicate. But the truth value of the sufficient condition proposition "if **A**, then **B**" in ordinary logical thinking process of human beings as is described by classical formal logic is not the truth function of the truth values of the implicans and the implicate. Semantically, material implication is utterly different from the "if…then…" which expresses the sufficient condition relation. However, in orthodox mathematical logic material implication is usually understood as "if …then…", and the implication relation regarded as an abstraction of the sufficient condition relation. Hence

(1) In orthodox first-order predicate calculus, the correct reasoning pattern, which is induced by traditional formal logic and which allows new information to be acquired from the known, is changed into the implication tautology of repetitive language. However, an implication tautology can only be one of the following three types: ① the implicans is always false; ② the implicate is always true; ③ whether the implicans is true or not is based on the truth of the implicate. Nevertheless none of the three types of implication tautology is the correct reasoning from by which new information can be obtained from the known.

(2) Material implication, which is understood as "if…then…" but is actually different in meaning from "if…then…", has given rise to innumerable implication paradoxes in ***F***. Of course, implication paradoxes are not reasoning forms either. It is very clear that material implication, which is the essence of first-order predicate cal-

culus, is not an instrument of logical reasoning.

In the system ***F***, the universal quantifier $\forall \mathbf{x}$ which ranges only over individual variables means "for every $\mathbf{x}$". For the domain of finite individuals, to verify a proposition with a universal quantifier $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ amounts to verifying an endless sequence of singular propositions one by one. That is apparently impracticable and nobody has over done so. The system ***F*** which involves quantifiers cannot do the reasoning to acquire new information from the known. Even when it operates as a particular discrete mathematics, the involvement of quantifiers plunges ***F*** into many unavoidable troubles during calculation.

In a word, orthodox first-order predicate logic is not a correct reasoning theory.

（转载自 The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 13, Number 3, Sept. 2007）

第 22 章　人工智能知识表示的逻辑理论工具研究

正统数理逻辑和形形色色的非古典数理逻辑各有弊端,语义畸变严重;传统形式逻辑的主导思想虽然深刻、正确,但演算技巧陈旧、简陋,推理能力和表达能力都有限;因而,它们都不能作为人工智能知识表示的逻辑工具。当代形式逻辑继承了传统形式逻辑深刻、正确的主导思想,克服了形形色色数理逻辑和传统形式逻辑的弊端,表达能力强而且丰富,因而是人工智能知识表示的最佳逻辑工具。

22.1　启发式信息就是充分条件关系的“两独”,实质蕴涵不具有启发式信息

人们一直把正统数理逻辑狭谓词演算 ***F*** 当做人工智能知识表示的工具,可是如今人们越来越感到这个工具在知识表示中有着明显的缺陷。

作为专家系统的一种基本形式的产生式系统,它的一个重要组成部分是产生式规则。产生式规则一般都采用“若……则……”来陈述人类专家总结出来的有关知识。这种规则中的“若……则……”的前后件之间存在着一种称做“启发式信息”的信息。这种启发式信息一定满足充分条件关系(这当然是为人类专家通过内涵的科学分析认可的)。“若……则……”所表示的规则与其前后件之间不是真值函数关系,而是非纯真值的内涵充分条件关系。因此,它实质上是一种内涵控制信息。

目前,产生式规则通常都是采用正统狭谓词演算 ***F*** 作为形式化工具来表示的。按此,一条产生式规则理当对应着 ***F*** 中的一个实质蕴涵式 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$。然而,***F*** 中的 $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ 的真值是其前后件真值的真值函数。它与满足充分条件关系的启发式信息殊异。故而,正统狭谓词演算 ***F*** 不能如实刻画满足充分条件的非纯真值的启发式信息。难怪,用其作为工具来表示产生式规则碰到了许多困难。

我们知道,在正统狭谓演算 ***F*** 中有如下定理:

$$(\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}) \qquad (\gamma)$$

然而,当 $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ 为真时,**A** 与 **B** 之间不一定满足充分条件关系。亦即,**A** 与 **B** 之间不一定存在内涵控制信息。例如,设 **A** 表示“孔明死了”,**B** 表示“孔明是军事家”,则“孔明未死,或者,孔明是军事家($\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$)”为真;然而,“孔明死了(**A**)”与“孔明是军事家(**B**)”之间没有内涵控制信息,即“若孔明死了,则孔

明是军事家”为假。设 **A** 表示“孔明死了”,**B** 表示“孔明活着”,则当“孔明未死了,或者,孔明活着($\neg$**A**$\vee$**B**)”为真时,“孔明死了(**A**)”与“孔明活着(**B**)”之间没有内涵控制信息,即“若孔明死了,则孔明活着”为假;然而奇怪的是,此时“孔明死了(**A**)”与“并非孔明活着($\neg$**B**)”之间反而存在内涵控制信息。可见,与 γ 相对应的“若$\neg$**A**$\vee$**B**,则 **A**$\rightarrow$**B**”不是规则。在一些产生式系统中,从$\neg$**A**$\vee$**B** 不可得出 **A**$\rightarrow$**B**。这就是一些专家系统的设计者不得不将“若$\neg$**A**$\vee$**B**,则 **A**$\rightarrow$**B**”从规则中淘汰出去的缘由:在“非 **A**,或 **B**”与“若 **A** 则 **B**”之间没有内涵控制信息(即启发式信息)。正由于此,专家系统的设计者在选用 ***F*** 中的形式定理作为规则的表示方式时,不得不非常谨慎。然而,至今,设计者们没有找到一个严格的关于怎样选用 ***F*** 的形式定理的标准。

被充当形式化知识表示工具的正统狭谓词演算 ***F*** 中的纯真值的实质蕴涵关系不存在启发信息,而专家系统中的产生式规则却需要顾及“若……则……”的前后件之间的启发式信息。正由于此,这种作为内涵控制信息的启发式信息有时也叫做“超逻辑”的控制信息。这里,“超逻辑”中的“逻辑”即正统数理逻辑。而正统数理逻辑是离散的基础数学,所谓“超逻辑”就是超出离散的基础数学的范围之外。因而关于启发式信息这种“超逻辑”的问题,其实就是真正的逻辑问题。这个真正的逻辑就是当代形式逻辑。因为当代形式逻辑中的充分条件关系具有两个独立性。产生式规则的“若……则……”的前后件之间的关系就是充分条件关系。

以往不曾被说清楚究竟是什么的“启发式信息”(或“内涵控制信息”),今天,当代形式逻辑给我们提供了答案。启发式信息(或内涵控制信息)就是存在于充分条件关系中的两个独立性:用“若……是……”表示的产生式规则可独立于前后件的真假确定(第一独立性)不会是前真而后假,前件为真可独立于后件的真假确定(第二独立性)。

22.2　当代形式逻辑比正统数理逻辑的表达能力强而且丰富

至此,应该对正统数理逻辑提出下述两个问题:

(1) 正统狭谓词演算 ***F*** 中有哪些定理可以成为专家系统中的规则?

(2) 除了 ***F*** 中的定理之外,还有没有实际可用的有效规则?

已经证明了:从形式上说,当代形式逻辑名词演算 ***Cn*** 系统中的“充分条件”、“必定”分别与正统狭谓词演算 ***F*** 系统中的“实质蕴涵”、“每一个”对应时,***Cn*** 与 ***F*** 是交叉关系,互相只包含对方的真部分,有共同的定理(当然,语义完全不同),也各有分别不属于对方的定理。

为了对 ***Cn*** 和 ***F*** 做纯语构的对照，需要建立二者之间的对应关系：

Cn	***F***
⇀	→
U(x)⇀	**∀x**
U(x)!	**∃x**

在把 ***Cn*** 和 ***F*** 做纯语构的对照时，不能忘记二者在语义上的原则性差别（见第 20 章）。

Cn		***F***	
式	含　义	式	含　义
A(x)⇀B(x)	**A** 必定 **B**； **x** 满足 **A** 是 **x** 满足 **B** 的充分条件	***A*(x)→B(x)**	**x** 满足 **A**、**x** 满足 **B**，在这二者中至少是其中之一
U(x)⇀A	必然 **A**； **x** 在论域 **U** 中是 **x** 满足 **A** 的充分条件	**∀xA**	对于论域中的每一个 **x** 来说，都有 **x** 满足 **A**
U(x)! A	可能 **A**； **x** 在论域 **U** 中不是 **x** 不满足 **A** 的充分条件	**∃xA**	论域中至少有一个 **x**，使得 **x** 满足 **A**

F 与 ***Cn*** 的语义完全不同，***F*** 语义畸变严重，人们觉得可用是由于自发地把它改造为 ***Cn*** 的语义。

下面列举出一些互相对应的 ***F*** 和 ***Cn*** 中成立的形式定理的例子：

序　号	***Cn***	***F***
1	⊢ **(U(x)⇀A)⇀A**	⊢**∀x A→A**
2	⊢ **A⇀U(x)! A**	⊢ **A→∃xA**
3	⊢ **(U(x)⇀A⇀B)⇀(U(x)⇀A)⇀U(x)⇀B**	⊢ **∀x(A→B) →∀xA→∀xB**
4	⊢ **(U(x)⇀A⇀B)⇀U(x)! A⇀U(x)! B**	⊢ **∀x(A→B) →∃xA→∃xB**
5	⊢ **(U(x)⇀U(y)⇀A⇌U(y)⇀U(x)⇀A**	⊢ **∀x∀y A↔∀y∀xA**
6	⊢ **U(x)! U(y)! A⇌U(y)! U(x)! A**	⊢ **∃x∃y A↔∃y∃xA**

这就回答了前面提出的第(1)个问题：按照二者纯语构的对应关系，***F*** 中的定理翻译成 ***Cn*** 的式后，如果也是 ***Cn*** 的定理，则 ***F*** 中的这个定理便可以成为专家系统中的规则，但必须将 ***F*** 的语义改为 ***Cn*** 的语义。

下表右边是狭谓词演算的实质蕴涵怪论式，在 ***F*** 中是定理；而与之相对应的左边的式，***Cn*** 称之为衍式或涵衍式，是 ***Cn*** 的除外式，已被清除出 ***Cn*** 系统之外。

序　　号	*Cn*	*F*
7	$\dashv \mathbf{U(x)\rightharpoonup A\wedge\neg A\rightharpoonup B}$	$\vdash\forall \mathbf{x(A\wedge\rightharpoonup A\to B)}$
8	$\dashv \mathbf{(U(x)\rightharpoonup A)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup B\rightharpoonup A}$	$\vdash\forall \mathbf{xA}\to\forall \mathbf{x(B\to A)}$
9	$\dashv \mathbf{U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B\wedge\neg B}$	$\vdash\forall \mathbf{x(A\to B\vee\neg B)}$
10	$\dashv \mathbf{U(x)\rightharpoonup(A\rightharpoonup B)\vee(B\rightharpoonup A)}$	$\vdash\forall \mathbf{x[(A\to B)\vee(B\to A)]}$
11	$\dashv \mathbf{U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B\wedge\neg B\rightharpoonup C}$	$\vdash\forall \mathbf{x(A\to B\wedge\neg B\to C)}$
12	$\dashv \mathbf{U(x)\rightharpoonup A\rightharpoonup B\rightharpoonup C\vee\neg C}$	$\vdash\forall \mathbf{x(A\to B\to C\vee\neg C)}$

$\dashv$ **A** 表示 **A** 不可证,显然,***F*** 中有无限多个定理不能作为专家系统的规则。

以下,我们列举的是回答前面提出的第(2)个问题的例子。

序　　号	*Cn*	*F*
13	$\vdash\mathbf{(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup(U(x)\rightharpoonup A)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup B}$	$\dashv \mathbf{(A\to B)}\to\forall \mathbf{xA}\to\forall \mathbf{xB}$
14	$\vdash\mathbf{(A\ B\rightharpoonup C)\rightharpoonup U(x)\rightharpoonup A)(U(x)\rightharpoonup B)\rightharpoonup(U(x)\rightharpoonup C}$	$\dashv \mathbf{(AB\to C)}\to\forall \mathbf{xA}\forall \mathbf{xB}\to\forall \mathbf{xC}$
15	$\vdash\mathbf{(A\rightharpoonup B)\rightharpoonup U(x)!\ A\rightharpoonup U(x)!\ B}$	$\dashv \mathbf{(A\to B)}\to\exists \mathbf{xA}\to\exists \mathbf{xB}$
16	$\vdash\mathbf{(A\rightharpoonup BC)\rightharpoonup(U(x)!\ A\rightharpoonup(U(x)!\ B)(U(x)!\ C)}$	$\dashv \mathbf{(A\to BC)}\to\exists \mathbf{xA}\to\exists \mathbf{xB}\exists \mathbf{xC}$

左边是 ***Cn*** 的定理,可以作为专家系统中的规则;十分奇怪,在 ***F*** 中语构上与 ***Cn*** 的这些定理相对应的式却不是定理。这就是说,在 ***F*** 的定理之外,有无限多个实际可用(即具有内涵控制信息)的有效规则。

显然,比起正统数理逻辑来说,当代形式逻辑的表达能力强得多、准确得多、丰富得多。

22.3　形形色色的非古典数理逻辑和传统形式逻辑各有弊端

非古典数理逻辑学家路易斯不满意正统数理逻辑学家弗雷格和罗素的实质蕴涵,认为实质蕴涵引起了数不清的实质蕴涵怪论。

路易斯提出了严格蕴涵,并从严格蕴涵出发,用正统数理逻辑的方法构造了模态逻辑严格蕴涵系统。严格蕴涵系统虽然避免了一类实质蕴涵怪论,但又产生了自身的怪论。

形形色色的模态逻辑想当然地将“必然”、“可能”处理成一元模态词,而且深深地置身于真值函数的怀抱之中,成为一种特殊的真值函数。因而,其结果同正统狭谓词演算一样,依旧是十分古怪的。模态逻辑承认实质蕴涵,承认所谓“逻辑量词”(这是正统数理逻辑狭谓词演算的两大致命弱点),甚至引入无论是人还是机器都不可能实施的所谓“量词”,构成形形色色的模态谓词演算系统。

因而模态逻辑逃脱不了“量词”的羁绊。同正统数理逻辑一样，它背离了人的普通逻辑思考实际，倘若把它作为知识表示的工具，必然出现各种各样的麻烦。

数理逻辑学家冯·莱特、阿克曼等人从对实质蕴涵和严格蕴涵的批评出发，提出了相关蕴涵。数理逻辑学家安德森和贝尔纳普由相关蕴涵和真值联结词构造了相关逻辑系统，并把相关逻辑与模态逻辑结合起来构造了衍推蕴涵逻辑系统。相关逻辑与衍推蕴涵逻辑作为基础数学的数理逻辑中一个较新的独立分支，将会对数学基础的研究发生影响，然而它们仍然存在至少是下述种种问题：

（1）以真值函数关系为基础，承认实质蕴涵；

（2）把“必然”、“可能”误当做一元的、特殊的真值函数关系词模态词，承认所谓模态逻辑是真正的逻辑；

（3）跳不出量词的泥坑，误将语言量词当做所谓“逻辑量词”，构造了带量词的相关谓词演算系统和衍推蕴涵谓词演算系统。

故而，它们终究是古典数理逻辑的一种替换物，依然背离人的普通逻辑思考实际，不能作为知识表示的工具。

传统形式逻辑堪称真正的逻辑科学，其主导思想（例如，推理能从已知得出新知、论证不循环等）深刻、正确。但是传统形式逻辑的形式语言贫乏、形式化程度很低、演算技巧陈旧简陋、直言命题引入不可实施的所谓“逻辑量词”“所有”、“有些”，其用手工方式搜集的推理式总共才几十个，表达能力、推理能力十分有限，自然不能作为知识表示的逻辑工具。

22.4 只有当代形式逻辑才是知识表示的最佳工具

时至今日，只有当代形式逻辑才清楚如实地刻画了充分条件关系。当代形式逻辑中的充分条件关系不是任何蕴涵关系的变种，它与实质蕴涵、严格蕴涵、相关蕴涵、衍推蕴涵有着实质性的区别。充分条件关系事实上构成了普通逻辑思考中可据以进行不循环论证从而能出新知的推理格式的核心。

当代形式逻辑不用量词。以往的各种谓词演算中的全称量词“每一个”（∀）的来源只是语言中有时出现的语言量词，不是什么“逻辑量词”。当涉及不可列举的个体域时，尽管作为语言载体的语句中有时会出现语言量词，但作为被语句所承载的命题或被语句所指谓的客观事件的逻辑结构中根本就没有要求人们去逐一列举并逐一确定“每一个”个体如何如何的“逻辑量词”。当代形式逻辑不用量词，“不仅在技巧上可以避免含有量词的形式系统所不可避免的种种麻烦”，“而且，从主导思想方面说，这比引入量词更接近普通逻辑思维实际”。

当代形式逻辑不承认所谓模态逻辑是真正的逻辑，认为模态逻辑中的模态算子□、◇其实是一种特殊的真值函数。从对模态逻辑的批评中，当代形式逻辑

提出了二元的“必然”、“可能”、“偶然”、“风马牛”（即“彻底地偶然”）关系，指出，“若 **A** 则 **B**”与“**A** 必然 **B**”同义。“若 **A** 则 **B**”就是“**A** 必然 **B**”，表达式皆为 **A**⇀**B**。必然关系是二元的非纯真值联结关系，具有第一独立性，有时具有第二独立性。由此出发，“**A** 可能 **B**（符号式为 **A！ B**）”、“**A** 偶然 **B**（符号式为 **AOB**）”、“**A** 风马牛 **B**（即‘**A** 彻底地偶然 **B**’，符号式为 **AFB**）”可定义为：

$$\mathbf{A}!\ \mathbf{B} =\mathrm{df} \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$$

$$\mathbf{AOB} =\mathrm{df} \neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\mathbf{B})\neg(\mathbf{A}\rightharpoonup\neg\mathbf{B})$$

$$\mathbf{AFB} =\mathrm{df}\mathbf{AOB}\wedge\neg\mathbf{AOB}$$

！、O、F 等亦皆为二元的非纯真值联结关系。这种对客观世界联结关系的刻画，符合客观事实，因而符合人的普通逻辑思维实际，与传统形式逻辑中的“必然”、“可能”、“偶然”等一致。

当代形式逻辑建立了贯彻两个独立性的一个隶属于一个的命题演算 ***Cm*** 系统、名词演算 ***Cn*** 系统和带等词的名词演算 ***Cnd*** 系统；当代形式逻辑彻底地了结了迄今还使数学处于所谓“第三次危机”之中的悖论问题；当代形式逻辑排除了一切衍式，故而排除了全部实质蕴涵怪论及 **A**∧**A** ⥽ **B** 等为一般模态系统所难以避免的怪论；当代形式逻辑分析、处理了一系列逻辑史上迄今争论不休、久悬未决的难题（如客观基础、真假对错、宾词周延、主词存在、演绎推理能否出新知、已证明的结论是否已证实等），并全都获得了确定而又合理的解决；当代形式逻辑给出了“辩证矛盾”、“辩证概念”、“辩证命题”等一系列辩证逻辑术语的定量、清晰的定义，实现了辩证命题的形式化。

总之，当代形式逻辑是目前我们所看到的一种正确的推理理论，是作为人们从已知获取新知的一种很好的逻辑工具。比起正统数理逻辑、形形色色的非古典数理逻辑和传统形式逻辑来，当代形式逻辑表达能力强而且准确、丰富，是人工智能中知识表示的最佳逻辑工具。

22.5　附　　件

Contemporary Formal Logic Symbol System Can Logically Represent All Knowledge

written by　Gong Qirong

(North region of Guizhou University , Guiyang huaxi 550025, P. R. China)

E-mail:gongmuwen@163. com

So far, Contemporary Formal Logic is the only logic that has explicitly described the sufficient condition relations as they actually are. The sufficient condition relation

is in fact the necessarily relation described explicitly. It is not a variation of any implication relation, it is quite different from material implication, strict implication, correlation implication and entailment implication. As a matter of fact, it forms the theoretical core of a reasoning pattern by which people can acquire new information with the helpof ordinary logical thinking without falling into circular argument.

Contemporary Formal Logic does not employ quantifiers. It is free from any trouble that is unavoidable in formal systems which involve quantifiers, what is more, it turns out to be even closer to the reality of ordinary logical thinking than if quantifiers are introduced into the system.

Model words such as $\Box$, $\Diamond$ of model logic is a special pure truth value. According to Contemporary Formal Logic, "if **A**, then **B**" is synonymous with "**A** necessarily **B**", "**A** entails **B**" is exactly "**A** necessarily **B**". Their expression forms are $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$. The necessity relation is a binary non-pure truth values connection relation. It has the first independence, and sometimes the second independence. According to this, we can define "**A** probably **B** (**A**! **B**)", "**A** occasionally **B** (**A**O**B**)", "**A** wind-horse-cow **B**" (i. e. **A** totally occasionally **B**, symbolized as **A**F**B**) as follows: $\mathbf{A}!\ \mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})$; $\mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} = \mathrm{df}\ \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \land \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg\mathbf{B})$; $\mathbf{A}\mathrm{F}\mathbf{B} = \mathrm{df}\ \mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B} \land \neg\mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B}$. !, O and F are also binary non-pure truth value connection relations. Description of the connection relation is in accordance with the reality of ordinary logical thinking of human beings.

Contemporary Formal Logic established the prepositional calculus system ***Cm***, the notional calculus system ***Cn*** and the notional calculus system with equivalence terms ***Cnd***. Contemporary Formal Logic got rid of all paradox formula, material implication paradoxes and paradoxes such as $\mathbf{A} \land \neg\mathbf{A}$ ⥽ **B** that model system can't avoid; the problem has been solved in a definite and reasonable way.

In a word, compared with logic of all shades, Contemporary Formal Logic has stronger, richer and more accurate expressing ability, so Contemporary Formal Logic symbol System can logically represent all knowledge.

（转载自 The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 13, Number 3, Sept. 2007. 转载时略做修改）

第 23 章　当代形式逻辑在人工智能中又一应用理论研究

23.1　人工智能与知识工程概述

23.1.1　智能的概念和智能的机器实现——知识工程

世界事物都有其客观存在的性质、结构和运动规律。对客观世界不断地进行感知与“认识”的能力,不断地记录、积累、检索和利用这种“认识”从而形成“知识”的能力,以及运用“知识”使自己不断地适应环境和改造世界的能力称为智能。许多专家认为,不仅人类有智能,蚂蚁、蜜蜂、海豚也有智能。有些专家甚至认为,某些植物也有智能;除了地球,其他星球可能有生物,它们也可能有智能。这些说法都有道理,否则生命不能进化、物种不会变异,世界就不会如此精彩,宇宙也不会如此深奥无限! 智能的内涵非常丰富,因此对它进行严格的定义,既无必要也无可能。狭义上智能的概念包括,其主体必须具有意识,具有认识世界、改造世界的主动性而且具有利用已知推出新知的逻辑推理能力。能够获得新知的逻辑推理是高级智能(人类智能)的核心。因此这个定义是合理的、正确的。但是从智能的工程实现或机器实现(知识工程)的角度考虑,在广义上了解智能的概念,把握智能构成的要素,更加重要且完全必要。

智能的主体是生命。生命体能感知客观世界、有意或无意地利用积累的感知,提高认识或形成“知识”,适应或改造世界。因此生命体才具有智能。感知是智能的第一要素,表达和存储感知是智能的第二要素,检索和利用“认识”或“知识”是智能的第三要素。

人类是生命最高级的形式。人类智能是高级智能,其他智能无法与之相比。人类有丰富的感知能力,特别是阅读能力和听讲能力。人类还有很强的表达感知、存储感知、将感知求精后化为知识的能力:人不仅能用基因保存感知,还可用大脑记忆;人还能以语言、文字、图片和各种符号的形式表达知识并将它们存储在自身以外的介质中。人类能够快速检索所需要的知识,利用原有知识学习新知识、推理出新知识,并利用各种知识主动地适应并改造世界。当然,人类与其它动物相比,也有不足之处,但是人能克服自身的限制,例如,人与鸟比,不能飞,

但人能通过模仿鸟,反复试验,造出飞机;人的视觉、听觉和触觉的一些特性不如某些动物,但人能通过模仿它们,制造出各种传感器,在功能特性上胜过它们。人还能模拟人类自身的功能,如加法运算,在古代造出了算盘,在现代发明了电子计算机。这种善于比较、发现自身不足、获得启发、模拟其他生命体或人类自身的各种功能特性、开阔思路、不拘外形、综合运用各种知识,实现在某种功能上、性能上超过模拟对象的努力是人类独有的可贵品格,也是智能最高级的形式。

各种生命的智能(包括人类智能)称为自然智能;人工制造的机器所具有的智能称为人工智能。有时也常常把如何在机器上实现智能的理论研究称为人工智能。在机器(现在主要指电子计算机)上研发并实现智能的工程都是基于知识的,因此称为知识工程。其最辉煌的成果是已经使用的各种专家系统及开发这些专家系统的软件工具或软件环境。这些成就是 20 世纪 80 年代开始逐渐涌现的,它们和通信网络一起,使人类走进了崭新的知识经济时代。人类智能创造了 8000 年的地球文明,也创造了并推动着人工智能的发展;她与人工智能结合,揭示了微观世界和宏观世界的本质,有效地利用了电子、质子、中子和中微子技术造福人类,又使人类登上了月球,并着手探索水星和火星的奥秘。人类智能是最伟大的。

人工智能即机器智能,必须包括智能的三个要素。因此知识工程也必须包括三个方面的综合研发:各种传感通道(如视觉、嗅觉、听觉、触觉与神经系统及脑神经元的搭接等)和传感器,包括多通道的机器学习课题;更有效的存储介质和知识表示方法,以便高效地存储、检索和推理;对各种知识进行高效检索和推理的机制,以便加快知识的有效利用。概括地说,要进行三类研发:知识表示、知识获取(主要通过传感技术和学习技术)和存储、知识的检索和推理。人工智能理论指导了知识工程的实践,而知识工程的辉煌又使人工智能的理论找到了正确的发展方向并正在有力地推动着她的发展。

知识工程近 30 年的实践表明,知识表示方法越好、越适合具体应用,机器获取知识(包括学习)和保存知识的能力就越强,机器拥有的知识就越多、越丰富,机器检索有用知识,据此推出新知识并综合利用各种知识的智能就越高。也就是说,知识表示方法决定了机器智能的高低,决定了机器“聪明”的程度。

23.1.2 知识工程的复杂性决定了知识表示方法的多样性

60 多年来,计算机应用经历了数值计算、数据处理和知识处理三个阶段。在数值计算阶段,人们利用计算机的高速运算能力,解决了即时性较强的依靠人

脑和手工计算无法解决的问题,如天气预报和导弹飞行轨迹控制。在数据处理阶段,人们利用其海量存储能力和强大的检索能力(主要归功于数据库技术),解决了以大量纸质文件存储的商业数据和历史数据的快速处理问题,为市场预测、商业决策和知识或规律的挖掘奠定了基础。在知识处理阶段,人们利用海量的数据库和知识库及强大的检索能力和产生式系统具有的可以推出新知的能力,开发了在智能方面等价或超过专业领域中的顶级专家或专家组的专家系统、决策支持系统和智能化的管理信息系统,等等。从广义上说,这三个阶段的机器或多或少都具有智能三要素,都具有一定的智能。因此,计算机的各种应用多多少少都与知识工程相关。

知识工程的应用可分为两类:一类是控制,可以控制小到卫星表、微波炉、洗衣机,大到数控机床、飞机、导弹和航天飞机的日常工作或正常运行。它们都需要用计算机程序表示的控制知识,另一类是知识处理,可以是较简单的,如手机语音和笔迹的识别功能及自动检索和拨号的功能、管理信息系统中用于人机交互的智能接口,也可以是非常复杂的,如生物DNA鉴别、疾病诊断、有机物分子结构识别、110接处警决策支持、定罪量刑参考系统、自然语言翻译(文字的或语音的)、自然语言理解(文字的或语音的)、卫星图像处理、图形图像的模式匹配与检索和修补、计算机辅助软件开发(也称为开发环境)。这些系统,有的还等待开发;有的已经开发完成但并不实用;有的虽然已经使用,但还不够完善。它们的复杂性在于:都需要高级的信号识别、纠错并完成转换的系统,以便获取知识,记录环境变化或适应操作人员的不同水平;都需要知识库来存储大量的常识、专家的经验和有关领域的专业知识;都需要对知识库进行快速检索以便特定知识的有效利用或推理的高效实现,从而及时获取合理、有效的解决方案或评语、结论或结果。

知识工程的复杂性在于其应用对象非常广泛,而且不同的应用对象,其知识结构是不相同的;对不同的知识结构,适用的知识表示方法也是不相同的;知识表示方法不仅要适合对象的知识结构特点,更要满足所选用的硬件工具和软件工具的要求和限制,还要合理地组织有用的知识(如索引、排序等),以便快速检索和高效推理的实现。

知识工程的复杂性决定了知识表示方法的多样性。例如语音处理,要用波形表示知识并与多种采样技术结合;地理信息系统要用图形图像和关联的文字或符号表示知识并与图像匹配技术或特性表索引技术结合;有智能接口的中医疾病诊断专家系统要采用上述两者结合的方法来表示和获取中医知识和老中医的经验;它们都需要花大力气开发实用的知识库来支持机器智能的运行。笔者在十多年前主持完成了三个知识工程项目:一个是文物管理系统,它用图形图像和关联的文字表示文物知识,并用图像匹配技术和特性表索引

技术表示文物的多路径检索知识;另一个是110接处警决策支持系统,它用多重表格表示接口知识、产生式系统表示推理知识、数据库作为索引并关联警情和处警预案的方法表示处警知识;还有一个是定罪量刑参考系统。它用数据库和人机交互技术收集被告的犯罪事实和情节、产生式系统表示我国刑法细则、循环迭代和控制的方法表示数罪并罚知识、数据库的关联表示共同犯罪及其处罚、文本处理方法表示判决书的生成和修改的知识。知识工程的实践表明,使用单一的知识表示方法,如只用文字或逻辑推理,是不可能开发出任何实用有效的知识系统的。必须综合运用多种适合的知识表示方法才能完成知识工程项目的研发。

23.1.3 技术和工具的阶段性决定了各种知识表示方法的局限性

生物经历了几亿年的进化和变异。智能也经历了几百万年的发展,特别是人类智能还创造了各种工具和技术。人类历史的不同阶段有着不同的工具和技术。工具和技术必然制约知识表示。因此工具和技术的阶段性决定了各种知识表示方法的局限性。例如计数和运算,在原始社会,因为人类不会用数字符号表示知识,就使用硬物器的划痕来表示知识并完成简单的计数和运算;后来有了算盘,就用珠子的多少和所在的挡位表示数字,能够进行复杂的算术运算;到了现代社会,有了计算机,在没有键盘输入技术和高级语言编译系统前,只能使用二进制数表示数字和控制知识,使用很多排的扳键开关、信号灯或穿孔纸带和卡片来进行输入和输出;20世纪60年代以后,计算机可以使用二进制、八进制、十进制、十六进制等表示数字,可以直接用键盘输入十进制数和复杂的运算符,甚至可以用手写体或语音来表示数学知识,完成复杂运算的人机交互。

在更加先进的机器代替现代计算机以前,归根结底,知识表示必须能够转化为二进制数字;知识本身必须能以二进制形式获取(包括学习)和存储;知识利用(检索和推理)必须能够通过二进制运算(比较和加法)实现,不能超越。对智能的表示,特别是人类各种知识的表示,都会受到计算机的限制。因此,为满足这种限制而进行的知识表示和处理的研究或尝试都应当得到肯定。例如状态空间的表示和搜索、产生式系统、逻辑演绎、遗传算法、神经网络等。在机器智能有限时,如何加大人的参与力度并强化人机交互或人机结合,以提高整个知识处理系统(包括人、机器和环境)的效率,也是值得研究的。同样,模拟生物智能,特别是对人类智能(脑细胞存储知识、脑电波的传播和神经元的搭接来完成知识的表示和利用)的模拟也是很有意义的。就如计算机能够通过传感器直接接收和处理语音的声波和图像的光波一样,机器直接接收脑电波、识别

并处理脑电波,从而在知识层面实现计算机和大脑的直接交互也是可能的。当然,这种研究十分艰巨,路途非常遥远。从国际上近十几年才开始接收、分析和处理猴脑简单信号的实验,就可看出这一点。

23.1.4　当代形式逻辑与各种现代知识表示方法结合的必要性

现代知识表示方法中,使用最普遍的有结构对象表示法、产生式系统、Prolog 语言和数理逻辑等。前者重点描述对象的各种结构和性质、对象之间的各种关系等,即论域中的事实或事物的状态。后三者重点描述专业领域的定理或规则,即科学规律和专家经验,它们是知识的核心、智能的基础。但是,在表示定理或规则时,数理逻辑用蕴涵式,并被表达为前后件的真值函数,无法避免语义畸变和蕴涵怪论;其他方法使用 if-then 的形式,即具有内涵的条件和结论之间的充分条件关系,可以从已知推出新知或引导新的处理。机器使用 if-then 形式时,都不允许转化为析取式或合取式,因此保留了逻辑控制知识。事实表明,人工智能的应用理论和几十年的实践早已发展了数理逻辑又超越了数理逻辑。

事实表明,规则是知识的核心、智能的基础,具有真理性和客观存在性及与其前、后件真假值无关的独立性。规则不是依赖于前后件真假的函数,不是蕴涵,而是前后件之间的充分条件关系。智能的基础需要逻辑学,特别需要以刻画清晰的充分条件关系为基础的能够推出新知的逻辑理论的支撑。当代形式逻辑就是在这种形势下应运而生的。

当代形式逻辑(可缩写为 LEL)对充分条件关系语义的刻画,即两个独立性,是其最精彩的部分,也是 LEL 不同于其他逻辑系统的本质特征:**A**⇀**B** 表示 **A** 是 **B** 的充分条件,可以独立于 **A**、**B** 本身的真值确定(逻辑地或经验地确定,下同),这称为“一独”。“一独”是充分条件关系的本质。“二独”指:可以独立于 **B** 的真值确定 **A** 是否为真。很多充分条件关系具有“二独”,根据具有“二独”的充分条件关系,人们才能从已知 **A** 真推出新知 **B** 真。LEL 还有一个重要特点:紧密结合人们普通逻辑思考的实际,既研究内涵又探讨外延,将内涵逻辑与外延逻辑区分开来,将推理式与导出式区分开来,无语义畸变;能实施“必然、可能”推理而不引入模态词;能正确刻画归纳推理和类比推理并将它们融于演绎推理之中;取消了外延的逻辑量词,代之以内涵的“必然”或“可能”,简化了处理方法又便于机器实现。

总之,现代知识表示方法是多样化的,描述复杂对象的结构、性质与联系都离不了它。但是任何知识工程都必须用推理式或推导式来表达专业领域的科学知识和专家经验;而任何推理及其控制的表达和运行都需要其他现代知识表示方法所表示的对象性质或状态的支持和驱动。因此,其他现代知识表示方法需要 LEL 的支撑;而 LEL 也需要其他知识表示方法的辅助和补充。LEL 与多样化

的知识表示方法相结合是完全必要性的。

23.2　基于当代形式逻辑和实体-关系模型的知识表示方法 CERLEL

23.2.1　实体-关系模型(CER)和结构对象的知识表示

1. CER 和数据库概念模式设计

美国著名计算机科学家 Peter. Chen 在 1976 年提出了**通用实体-关系模型**(本文简称 CER)。这个模型早已成为数据库概念模式设计的有力工具,早已经在世界各国广泛采用。

CER 用事物及其联系来描述客观世界。事物称为实体,具有个体和总体两级。后者常称为实体集。事物之间的联系用实体联系名表示。实体联系所连接的实体集内的个体之间有一对一、一对多或多对多联系,用联通值标记。实体联系也具有个体和总体两级。后者也称为实体联系集。实体(集)和实体联系(集)都用属性描述。属性分为标识属性和描述属性。前者唯一地确定(标识)一个实体或实体联系。后者描述实体或实体联系的固有特性。

20 世纪 80 年代后期,CER 模型又有新的发展。较多的学者把实体和实体联系模型分为子集层和普遍层两级。事物及其联系的普遍性放在普遍层描述,它们的特殊性放在子集层描述。不重叠的子集层 $E_i(i \geqslant 1)$ 构成普遍层 E。

CER 常用 ER 图,形象、直观地描述一个论域(如企业、学校)的概念模式,作为数据库设计的中间环节。论域的 ER 图是现实世界的纯粹表示。现用 ER 图描述普通高校某系的**教学管理数据库**的概念模式,作为 CER 应用的实例,如图 23.1 所示。

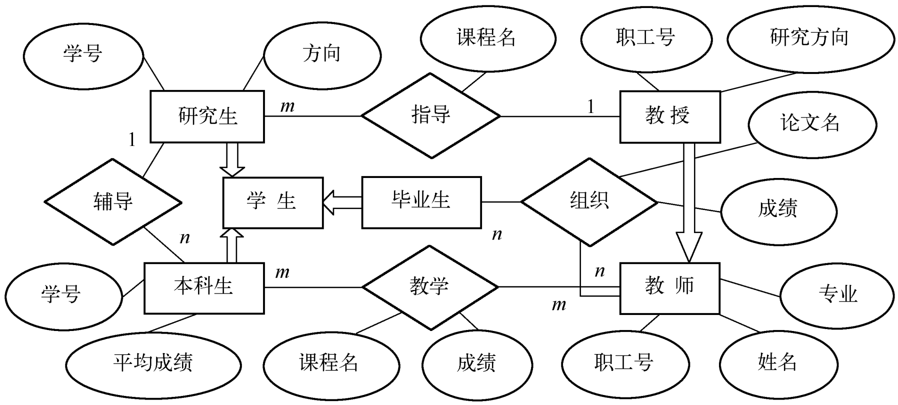


图 23.1　某大学某系教学管理数据库的 ER 图

ER图用矩形表示实体、菱形表示联系。符号⇨表示子集层指向普遍层。l、m、n等是整数,表示联通值。椭圆表示属性。为了简明,本例只画出部分属性。如“教授”实体,只画了标识属性“职工号”和描述属性“研究方向”。

2. CER与知识表示

CER的实质就是用节点和弧表示现实世界中的客观事物及其联系。这类似于人工智能(简称为AI)领域广泛采用的结构对象的知识表示方法。这类方法是以图论的节点和弧或记录的槽、槽面和填充值的方法为基础的,主要有语义网络、框架、单元和剧本。

语义网络是一种网络结构,用节点－槽－槽值来表示物体、概念或事件及其联系。CER的类似结构是实体(实体联系)－属性－属性值。语义网络本质上是两元关系,对于多元关系要引入附加节点,用几个两元关系描述。而CER则可以直接表示实体之间的多元联系,结构清晰,处理也较为简单。

框架的结构也类似于CER,用于描述格式固定的事物或事件。框架的槽可用另一个框架描述,从而扩展成框架系统。而CER可通过子集层和普遍层的联系,或通过描述局部的ER分图和描述全局的ER总图的联系,直接构造复杂系统的整体描述,因而其描述能力远强于框架方法。

单元方法采用槽名－槽值对的结构。而CER则用实体(实体联系)名取代单元名,且其**属性－属性值对**与单元方法的结构类同,因此也能取而代之。

剧本方法可以用表示事件序列的ER图取代。而后者更能直观地表达事件之间的联系,并可利用其联系的**属性－属性值对**,更清楚地解释特定事件发生的前因后果。

结构对象知识表示所特有的推理方式,如继承、匹配、预测等,CER也同样能描述和实现。例如,子集层实体可以继承普遍层实体的属性;描述同类论域的多个分ER图之间可以通过匹配来实现预测推理等。

综上所述,CER描述结构对象知识并据此推理的能力比较强。尤其是它既能把论域作为整体进行完整统一的描述,又能以**属性名－属性值对**,对论域中的实体(集)及其联系进行细致的刻画,其灵活性远胜于AI领域迄今广泛使用的结构对象知识表示方法。

然而,CER不能描述实体及其联系之间的逻辑关系,缺乏推理能力。因而它不能作为一种普遍有效的知识表示方法。只有和作为逻辑科学最新发展的当代形式逻辑相结合,才能使CER在知识表示方面具有强大的生命力。

23.2.2　当代形式逻辑(LEL)比数理逻辑的知识表示能力强

当前AI领域中常用的知识表示方法,除了上述结构对象知识表示法,还有

产生式系统、Prolog 语言和数理逻辑等。前两者使用以 IF-THEN 形式出现的**规则**描述论域内的科学规律和专家经验,构成了专家系统的核心。**规则**刻画了具有内涵的条件和结论之间的充分条件关系,反映了客观存在的真理,因而可以指导实践,用来从已知推出未知。对于数理逻辑在 AI 中的应用,可评述如下。

数理逻辑(主要是一阶谓词演算)已用于定理证明系统和问题求解系统。虽然这些系统中的规则使用数理逻辑的蕴涵式表示,但规则本身并不是前、后件的真值函数,而是独立于前、后件真假的客观规律。因此,相关系统必须遵守许多限制才能实际应用。

所有事实表明,在 AI 的实用系统中,规则都具有真理性和客观存在性及与前、后件真假无关的独立性。因此,规则不是依赖于前、后件真假的函数,不是数理逻辑的蕴涵,而是前、后件之间的充分条件关系。AI 的应用发展了数理逻辑又超越了数理逻辑。

数理逻辑的致命弱点是不区分外延命题和内涵命题,误用真值函数描述客观世界的逻辑结构(并非真值函数),严重地限制着 AI 的发展。数理逻辑的蕴涵怪论并不鲜见,实用系统必须采取措施才能避免。例如,数理逻辑中的“等价变换”并不等价:对 $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C}$ 进行“等价变换”可得到$(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{C})\vee(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{C})$。但是前者表示只有 **A**、**B** 同时真,**C** 才为真;而后者表示“只要 **A** 真或 **B** 真, **C** 都为真”。这种错误在实用系统中是绝对不能允许的。另外,量词的存在也给机器处理带来很大困难。由于这些,人们不得不对描述论域的表达式进行多种限制,并实施多种消除量词的方法。这些“修补”措施,能否避免由理论基础错误所带来的潜在危险,令人怀疑;但是很明显,它们严重地限制了用逻辑表达知识并据此推理的能力,极大地降低了实用系统的效率。

AI 理论研究和实用系统的开发都呼唤着新的逻辑理论,当代形式逻辑 LEL 就是在这种形势下应运而生的。LEL 用两个独立性定义了充分条件关系:充分条件关系就是内涵的必然关系,它是客观存在的,与前、后件的真假无关,可以确定不可能前真而后假;前后件也是客观存在的,可以在无须确定后件为真的情况下确定前件为真;它可用基本联结号一表示。其他的基本联结号是合取(∧)和否定(¬)。导出的联结号都用基本联结号刻画,有约合(!,即可能)、偶然(O)、有缘(Y)、无缘(F, 即风马牛关系)、尽举相容选择(↾)、蕴涵(→)、析取(∨)等。两种联结号都有严格的定义且符合人们普通逻辑思维的习惯。另外,LEL 的名词演算公理系统 ***Cn*** 创造性地取消了量词。与广泛使用的一阶谓词演算(简称 ***F***)相比,***Cn*** 增加了“必然”、“可能”、“偶然”等普通逻辑思维常用的推理,又不引入“模态词”;增加了归纳、类比推理,并将它们融于演绎推理之中(详见本书第 10、11、15、16、18、19 章)。因此 ***Cn*** 表达知识的能力远胜于 ***F***;又由于取消了量词,使基于 ***Cn*** 的机器处理比基于 ***F*** 要简单得多。

LEL 的另一个特点是：紧密结合人类逻辑思考的实际，既研究内涵又探讨外延，并将内涵逻辑与外延逻辑区分开，将推理式与导出式区分开，因而无语义畸变。语义畸变也是数理逻辑表示知识时难于克服的又一严重弊端。

总之，LEL 应该成为 AI 的逻辑理论基础。LEL 的应用研究，必将为更加充分、更加有效地表达知识并在机器上实现正确而高效的推理开拓新的道路。

23. 2. 3　知识表示的 CERLEL 方法

由于单纯用逻辑表示知识，对于论域中复杂的结构对象，非常困难，至少难以方便而形象地表达。例如，实体有属性，而属性中又包含别的实体联系时，或推理的目标成群出现时，常常很难表达清楚。另外，用单一的方法描述大量知识，将不可避免地导致组合爆炸而无法实现机器推理。所以笔者提出基于**实体－关系模型和当代形式逻辑结合**的知识表示方法（CERLEL）。

1. CERLEL 的基本概念及其层次结构

CERLEL 方法使用当代形式逻辑 ***Cn*** 系统的 n 元名词 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_i)$（$i=0, 1, 2, \cdots, n; 0 \leqslant i \leqslant n$）描述客观世界的实体和实体关系。CERLEL 方法的基本概念如下所述。

（1）实体（集）：实体指客观世界中的人、事件、物体等。具有同样性质的实体构成实体集，在不至于混淆的场合也可以称为实体。实体用 n 元名词描述。

（2）实体关系：包括实体之间的联系，用于描述雇佣关系、师生关系、拥有关系、空间位置关系、从属关系等，具有同样性质的实体联系的集合称为实体联系集（也可简称为实体联系），用 n 元名词描述；**实体关系**还包括实体联系（集）之间的**逻辑关系**，用 LEL 刻画。

（3）属性：指实体或实体联系固有的性质（称为描述属性）及与其他同类个体区分的标识（称为标识属性），都以 n 元名词的变元表示。

（4）函数：指属性值域之间的映射关系，用 k 元函数 $f(\mathrm{x}_j)$（$j=0, 1, 2, \cdots, k, 0 \leqslant j \leqslant k$）描述。

（5）实体群：用无变元名词描述实体（集）和实体关系（集）的聚集。

（6）实体群关系：描述实体群之间的关系。描述方法与实体关系的描述法类似。

（7）规则：实体关系（群）之间的充分条件关系。

（8）事实：客观世界中的事物及其联系，以及这些联系之间的关系，用实体或实体关系描述。并用集和群来描述实体（集）和实体关系（集）的聚集。

（9）论域：客观世界中人们感兴趣的部分，由事实和规则组成。

在 ***Cn*** 系统中，n 元名词 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_i)$ 的值域是 $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$，反映描述对象在论域中的

存在(T)或不存在(F)。变元 x_i 表示对象的属性。P(x_i)描述实体时,x_i 表示实体的属性,用以标识或描述实体的性质;对于普遍层实体,x_i 是它的标识属性或其子集层实体的共性;对于子集层实体,x_i 是其标识属性或其个性。在描述实体联系时,对于从属关系,x_i 是有关的普遍层实体或子集层实体的标识属性;对于其他联系,x_i 是有关实体的标识属性或者是对该联系的性质的描述(即该联系的描述属性)。每个变元 x_i 都各有其值域。k 元函数表示不同值域中的属性之间的映射关系,例如,$x_{j+1}=f(x_{j-2},\ x_{j-1},\ x_j)$。函数关系也存在一对一、一对多或多对多关系。可采用著名学者 E. F. Codd 在 1971 年提出的关系数据库规范化理论,按需要合并或分解实体集和实体联系集;正确地确定和处理属性之间的关系;压缩属性的数量,并把它们放到最恰当的实体集或实体联系集中,以便机器处理时减少冗余、加快检索,避免增删异常。

实体联系之间的逻辑关系用来刻画论域的逻辑结构。逻辑关系来源于论域中的科学结论、公理、定理和专家经验,也来源于 LEL 本身。其中主要是充分条件关系,称为规则,用符号“$\rightharpoonup$”表示。充分条件关系分为条件和结论两部分。每部分可以由多个实体联系及对联系的操作组成。这些实体联系有时用逻辑符号($\wedge$,$\vee$)联结。实体联系的否定($\neg$)表示:描述的对象在论域中存在,则取值 F;否则取值 T。充分条件关系有时仅在一个实体联系集的一部分和另一个实体联系集的某一部分之间存在。此时就要对实体联系集进行选择操作。可以把实体联系集看做二维表格,因此选择操作分为两种:横选、竖选。前者包括横选操作符(δ)和关系操作符(≥、≤、=等)。引入这些符号,可进行横选,选取实体联系集中满足关系的子集。例如,$\delta_{x_5}>8(P)$表示从 P 这个实体联系集中选出第 5 列属性值大于 8 的个体构成新的子集。后者引入投影操作符($\prod$)来对表格进行竖选,选出满足条件的属性组构成新的子集。例如,从 P 中选出第 4、5、8 列属性构成子集,表示为:$\prod x_4,x_5,x_8(P)$。

客观世界中,多个实体集和连接它们的关系常常组成实体群。实体群可以具有嵌套结构且实体群和实体群之间、一个实体群和另一个实体群内的某个实体集(或实体联系集)之间也可能存在联系或存在联系之间的逻辑关系,这被称为实体群关系。例如,描述一个工厂的生产,涉及零件、部件、产品等多个实体集。它们之间存在多种联系,这些联系之间又存在多种逻辑关系。这种复杂的网状结构称为**实体群**,表达了该工厂的生产管理。如该工厂又从属于某个公司,则该公司内部的各个工厂之间的上下游供求关系就是**实体群关系**的例子。

2. 各种 CERLEL 图的实例和解释

用图表达复杂的知识,常会使人有直观、清晰和把握全局之感。因此复杂系统的设计都离不开图形工具。绘制 CERLEL 图,有如下规定。

(1) 实体(集)用矩形框表示,框内填入实体(集)名。

(2) 实体联系(集)用多边形(常用菱形、三角形等)框表示,框内填入实体联系(集)名。用直线将每个联系(多边形框)与相应实体(矩形框)连接,各端标出联通值。

(3) 属性用椭圆框表示,框内填入属性名,并用直线将它连接到所属实体或实体联系上。

(4) 实体(集)之间的从属关系用,用符号⇨表示,箭头由子集层实体指向普遍层实体。

(5) 实体群用点画线框标出界限。

(6) 实体联系的逻辑关系用直线上方附加逻辑联结符来表示。直线末端终止于相应的联系集。如果逻辑关系是部分的,加上 Part 标记。对于充分条件关系,条件部分和/或结论部分可能是实体群。此时须分别用点画线框出边界且直线末端须终止于相应的点画线框。

(7) 实体群关系用实体关系的相应符号表示。但相应直线或箭头的末端都要终止于相应的点画线框、多边形框或矩形框。

下面以 CERLEL 图为工具,描述一些复杂知识。注意,为了节省版面,图中很多属性或联通值等都省略了。

【例 1】 工厂管理机构的 CERLEL 图(见图 23.2)。图中实体联系"专长能力"指专业知识技能和工作能力。"专长能力"**制约**着实体联系"领导"。实体"设备科"**负责**(实体联系)"设备维护和更新"(是实体"工作"的子集)。"姓名"是实体"厂长"的标识属性,"住址"是其描述属性。一个**厂长**"领导"多个"管理机构",所以"领导"是 1 对多联系(即联通值为 1、m)。注意标识属性"姓名"也要连接到相关的两个实体联系上。图中标识属性"科名"、"职工号"也须如此处理。

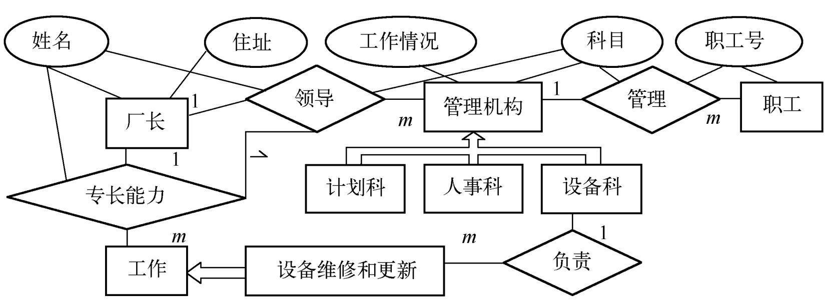


图 23.2　某工厂的管理机构

【例 2】 工厂生产机构的 CERLEL 图(见图 23.3)。本图表示计划科"负责"计划,"指导"车间,各管理机构"管理"车间是车间"生产"的充分条件。这

是条规则,其条件部分涉及多个实体联系(实体群),故在图中用点画线标出了这个实体群的边界。

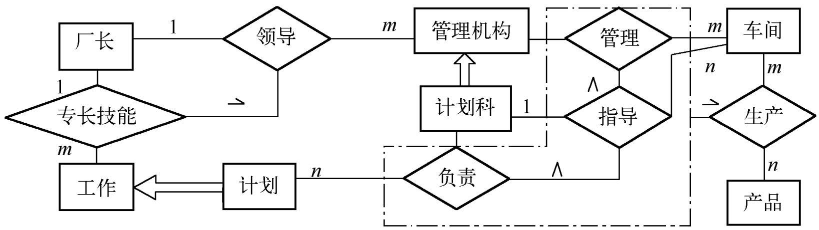


图 23.3　某工厂的生产机构

【例 3】　描述常规产品制造(见图 23.4)。四个实体联系构成实体群。它是实体联系“制造”的充分条件,与“制造”一起构成实体群关系。其中“厂名”和“产品名”分别是“工厂”和“产品”的标识属性。它们的组合构成实体联系“制造”的标识属性,“质量”和“工作量”是其描述属性。图中其他属性和联通值都省略了。

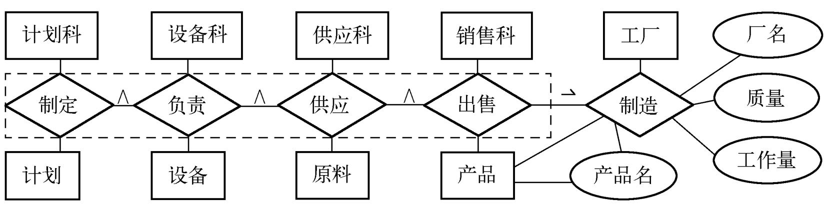


图 23.4　常规产品制造

【例 4】　事件序列的实例(见图 23.5)。在图 23.5 中,“离开 3”表示顾客就餐事件按正常序列发展直到结束。另外两个“离开”都是偏离正常序列的。偏离的原因,一个可能是“观察”结果使他不满意,如太脏、菜的价格高或花色不好;另一个可能是“坐等”太久,生气而去。由图 23.5 可知,联系的属性常常可以用来解释事件发展偏离正常序列的原因。

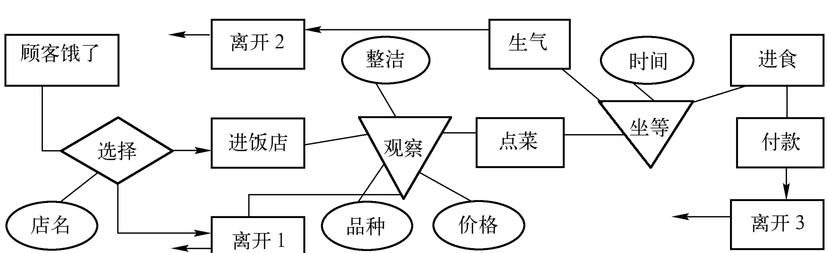


图 23.5　事件序列描述

【例 5】　精密仪器制造和使用的知识用实体群关系描述(见图 23.6)。该图表示“工人”有好的技术“指导”,能用“维修”好的设备,并注意“防止”灰尘和

潮湿，是高质量“制造”和安全“使用”精密仪器的充分条件。为了表达清晰，有时同一个节点可画到多处。此时名称必须一致，如图 23.6 中的实体“工人”。

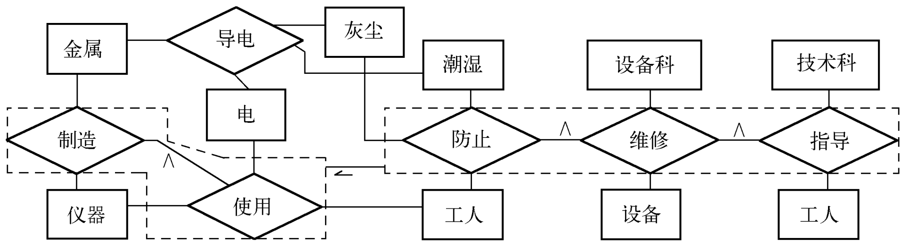


图 23.6　精密仪器制造和使用常识

3. CERLEL 系统的封闭世界（简称 CWA）解释

CWA 是知识库系统广泛采用的强有力的元规则。其含义是实体联系 P(b_1, b_2, …, b_k)（$k \geqslant 0$，整数，b_k 代表个体常量），如在知识库中不存在，且不能从已有规则推出，则假定¬P(b_1, b_2, …, b_k)为真。基于 F 的知识库采用 CWA 有三条限制：①每个常量 b_k 只表示一个个体；②有一个完全的知识库描述论域；③事实和规则以 Horn 子句描述。如果要取消限制③，又要确保知识库的一致性，必须保证没有这样的公式 G：① G 是基原子公式的逻辑或，② P(b_1, b_2, …, b_k) ∨ G 可以用知识库中的规则推出，但 G 不能推出。对于基于 F 的系统，这些限制很难实现。但 CERLEL 是基于 LEL 的（既研究内涵又探讨外延），可安全地采用 CWA，现论证如下。

从无限的世界中总可以划分出人们感兴趣的论域。论域的有限性决定了每个个体可由一个常量表示。对于论域，人们的认识具有相对真理性，描述它的知识库在一定时间内、一定程度上可以是完全的。事实上，人们没有充分把握就不会着手建立知识库。因而 CWA 的①②两条限制可以满足。对于限制③，在基于 LEL 的系统里没有意义，可予取消。

假设知识库中有 Horn 子句 G = P(0) ∨ P(1) 及 Q(3)，并有规则 R：IF Q(x) THEN P(x)。使用 R 可以推出 P(3)，则得到 P(3) ∨ G 为真。但由于既无 Q(0) 又无 Q(1)，不能用 R 推出 P(0)、P(1)。根据 CWA 就有¬P(0) 和¬P(1)。这与 G 矛盾，即非 Horn 子句给数理逻辑带来了麻烦。这是 F 把规则解释成为前、后件的真值函数引起的。在 LEL 中，规则用具有内涵的充分条件关系描述，在前、后件的真值未知时，可确定不会前真后假。另外，按照人们的思维习惯，一条规则的条件不成立（未知或假），就不会去使用它。因此上述 G，如果是论域中的事实，但 Q(0) 和 Q(1) 未知，人们不会用 R 去推理 P(0) 和 P(1) 的真值（机器也不会启用 R），所以不会产生矛盾。反之，如果 G 不是事实，就应从知识库中删

除。CWA 在 CERLEL 中的使用情况见表 23.1。

表 23.1 前、后件在机器中的状态和规则或 CWA 的启用情况

前　件	后　件	规则或 CWA 的启用情况
真	未知	规则启用,知识库中插入后件为真,CWA 不启用
真	假	规则启用,知识库中改后件为真,CWA 不启用
真	真	规则启用,CWA 不启用;无矛盾
假	未知	规则不启用,CWA 成立;无矛盾
假	假	规则不启用,CWA 不启用;无矛盾
假	真	规则不启用,CWA 不启用;无矛盾
未知	未知	规则不启用,CWA 成立;无矛盾
未知	假	规则不启用,CWA 成立;无矛盾
未知	真	规则不启用,CWA 成立;无矛盾

由表 23.1 可知:当且仅当前件为真时,规则才用来进行推理;CWA 仅仅在规则不启用,且前件或后件未知时才启用。因此,任何情况下,知识库都是一致的。

上述论证说明,基于 CERLEL 方法的系统,采用 CWA 是安全的。只要知识库是完全的,CWA 不会导致矛盾。另外,可以看出,每个充分条件关系都可作为知识库的完整性约束,用于阻止破坏知识库一致性的误操作;在知识库长期使用后,每个充分条件关系都可用做一致性检查和恢复的准则,这些工作可由机器完成,体现了 LEL 的优越性。

CWA 对于减少知识库冗余极为有用。但有时为了加快搜索,避免遍历整个知识库,设计时在库中增加一些形如 $\neg P(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ 的事实也是必要的。

4. 基于 CERLEL 方法的知识库系统的推理及其实现

LEL 是一种“接近普通逻辑思维实际”、“避免了蕴涵怪论”的逻辑体系。使用这种具有一致性的逻辑理论为基础的 CERLEL 方法描述论域,如同定义这种理论的一种解释。根据 CERLEL 图,精确地描述论域中的事实和规则所建立的表达式的集合(知识库),如同一个系统具有完全关系的公理集。对知识库查询,用知识库求解问题和定理证明,实际上就是使用这个公理集做形式化演绎。

利用充分条件关系推理,能由已知推出新知。例如图 23.2 中,由“厂长”的“专长能力”可以推出对“管理机构”的“领导”分工的指导意见。不仅如此,使用 LEL 的充分条件传递规则($(\mathbf{B}\rightharpoondown\mathbf{C})\wedge\mathbf{A}\rightharpoondown\mathbf{B})\rightharpoondown\mathbf{A}\rightharpoondown\mathbf{C}$ 和公理$(\mathbf{B}\rightharpoondown\mathbf{C})\rightharpoondown(\mathbf{A}\rightharpoondown\mathbf{B})\rightharpoondown\mathbf{A}\rightharpoondown\mathbf{C}$,可以推出新规则,获取论域中的新定理,实现知识库系统的自动完善。

用 CERLEL 方法设计的系统,机器可以利用相应实体联系的属性及相关实体的属性,比较令人信服地解释推理成立的原因。这点在图 23.4、图 23.6 中已

能体现。

CERLE 方法描述的结构对象知识,还可以进行下列推理。

(1) 匹配:如果一个实体、实体联系、实体群或 CERLEL 分图和另一个匹配,就可以由已知推出未知。至少可以确定新的实体或实体联系的属性名、个数,以及实体群或分图内的实体和实体联系的名称、个数,并确定种种逻辑关系;至于属性值,可分别采用默认值(如平均值),在掌握精确值后,再做修正。例如使用图 23.2、图 23.3,可以为建立新厂的管理机构或生产机构提供蓝图。

(2) 继承:子集层实体对于普遍层实体的属性可以直接继承、默认继承和过程继承。例如图 23.2,子集层实体"计划科"等的"科名"、"工作状况"等属性可到普遍层实体"管理机构"中寻找,属性值可以直接继承。其科室人数等属性值可采用默认继承,而工作效率等属性值可采用过程继承。

(3) 预测:描述事件序列的实体和实体关系,可用来预报事件发展的进程,推理特定事件发生的前因后果。对于事件序列的分叉点,常用实体联系描述。这种联系的属性可以解释事件序列进程向不同分支延伸的原因,为人们处理问题提供合理的预测。图 23.5 就是描述事件序列的实例。

还有如下课题需要深入讨论。

(1) 对 ***Cn*** 系统的表达式进行归结可能是实现机器推理的必经之路,本章后面几节将做初步探讨。更系统、更完善的归结方法有待进一步研究。

(2) 规则之间的关系是推出新规则的基础之一,如何描述和处理也需要进一步研究解决。

(3) 基于 LEL 的系统的动态知识和不确定性知识如何描述,也需要解决。

(4) 归纳推理、类比推理如何实用,机器又如何实现,也有待研究。

23.3　当代形式逻辑的消解原理 LELRM

23.3.1　消解原理是机器实现逻辑推理和定理证明的重要途径

基于数理逻辑的机器定理证明和问题求解已经有了深入研究。研究表明,直接证明一个谓词公式的永真性是相当困难的,在某些情况下也是不可能的。另外,普通逻辑思维中的推理规则和定理太多,而形式又多种多样;且假言推理、合并、各种结合律和交换律、链规则等又有着不同的适用性。这就使证明定理或求解问题的搜索空间一般都非常大,再加上可能的组合爆炸,常常使理论上的可行性变成实践中的不可行性。为此,人们就尝试用反证法的思想,把关于永真性的证明转化为不可满足性的证明,即把 $p \rightarrow q$ 永真转化为 $p \wedge \neg q$ 是不可以满足

的证明。关于不可满足性的证明,海伯伦(Herbrand)及鲁滨孙(Robinson)进行了卓有成效的研究。他们证明了数理逻辑的一切公式都可以变换为子句集,他们都以子句集为基础,提出了反证过程所需要的理论和方法。

海伯伦构造了一个特殊的域(H 域),并证明只要对 H 域上的一切解释进行判定,就可得知子句集是否不可满足。但是,一般子句集的基原子有无限多个,H 域上的解释也有无限多个。他证明:子句集不可满足的充要条件是对 H 域上的一切解释都为假;这只要证明存在一个不可满足的基子句集就可以了。但由于子句集的基原子可能有无限多个,这种证明过程的时空复杂度仍然无法容忍。因此,直接使用海伯伦的这个定理在计算机上证明子句集的不可满足性仍然不现实。

1965 年,鲁滨孙(Robinson)提出了归结原理,又称为消解原理或消解法,才使机器定理证明和问题求解变为现实。鲁滨孙指出,谓词公式转化为子句集后,子句集中的子句是合取关系,其中只要有一个子句不可满足,则子句集也不可满足。也就是说,在子句集的归结过程中,如果得到一个空子句,就证明了这个子句集是不可满足的。使用归结原理时,要先把描述论域的公式集变换为子句集;把要证明的结论或求解的问题取反,也变换为子句集;再合并两个子句集。对子句集的消解变换为:在子句集中查找经过置换能形成互补文字的两个子句;通过对这两个子句消除互补文字、合并相同文字得到消解式;再将消解式加入原有子句集,继续上述消解。这个过程直至没有新子句产生(不成功)或得到空子句(成功)才终止。鲁滨孙把复杂的匹配搜索和多种多样的逻辑推理变换为上述在现代计算机上有限步骤内可以完成的简单而机械的消解法。消解法为机器定理证明和问题求解奠定了基础。

总之,消解法是机器实现逻辑推理、定理证明和问题求解的重要途径。借鉴基于数理逻辑的消解原理,研究**增加了充分条件关系而又没有量词**情况下的消解方法,以便应用于 LEL 描述的知识系统,解决基于 LEL 的机器定理证明、问题求解,是应当重视的大课题。笔者经两年研究,提出了基于当代形式逻辑的消解原理(本文缩写为 LELRM),现简介如下。

23.3.2 当代形式逻辑的子句定义和分类

阅读本节前必须首先熟悉基本联结号:充分条件号(⇀,简称条件号)、合取号(∧)和否定号(¬)。还要熟悉导出联结号:约合号(!,可能);偶然(O);有缘(Y);风马牛关系(F,无缘);尽举相容(↾,制析);蕴涵(→);析取(∨)等,理解这些符号的严格定义(详见第 7、19 章)十分重要。为了减少联结号中文名称的长度,以便表达清晰和叙述方便,本节把充分条件号简称为条件号,尽举相容号称为制析号;它们联结构成的表达式分别称为条件式和制析式;其他联结号构成的表达式也用类似方法命名,下文不再说明。

本节先讨论子句的类型和混合式的单一化问题。一般都把原子式(包括原子命题)及其否定称为文字。单个文字构成单文字子句如 **A** 和¬**B**(y)。多个文字的制析称为制析式。制析型子句由制析式构成,如 **A**↾**B** 和 **C**(x)↾¬**D**(x,y)↾**E**(f(x,y))。多文字的析取称为析取式。析取型子句由析取式构成,如 **A**∨**B**∨¬**C** 和 **P**(x)∨¬**Q**(y)。文字之间既有析取号又有制析号的表达式称为混合式如 **A**↾(**B**∨**C**)和 **A**∨(**B**↾**C**)。可以证明 **A**↾(**B**∨**C**)⇀**A**∨**B**∨**C**,**A**∨(**B**↾**C**)⇀**A**∨**B**∨**C**,即混合式可以单一化,变换成析取型子句(证明略)。约合型子句比较复杂,可有三类:多个单文字的约合构成单文字约合子句,如¬**A**！**B**！**C**。多个析取式的约合构成析取式约合子句,如(**C**∨**D**)！(**F**∨**G**∨¬**H**)。多个制析式的约合构成制析式约合子句,如(**C**↾**D**)！(**F**↾**G**↾¬**H**)。

要说明的是混合式的约合,如(**A**∨**B**↾**C**)！(**A**↾**D**∨**E**),以及有限个单文字、析取式、条件式和混合式的约合,如 **A**！(**B**∨**C**)！(**D**↾**C**∨**C**),经单一化后,其处理方式和上述三类约合型子句相比,没有特殊之处。因此只要讨论单文字子句、制析型子句、析取型子句及三种约合型子句等六种子句的处理方法就可以了。

23.3.3　当代形式逻辑任意公式的子句化步骤和逻辑有效性的证明

子句化就是任意公式变换为子句集的过程。子句集由子句的合取构成,常用由逗号分开的多个子句表示。下列子句化步骤中使用的变换都是已证公式,即演绎的主要依据。对常用公式,如结合律、交换律等,就不再一一列出了。因此,变换过程使用的公式序列就是:“任意公式可以变换成逻辑上遵循它的子句集”这个结论有效性的证明。

1. 消除充分条件号和蕴含号

消除条件号:用¬**A**↾**B** 取代 **A**⇀**B**;用 **A**！¬**B** 取代¬(**A**⇀**B**)。

消除蕴含号:用¬**A**∨**B** 取代 **A**→**B**;用 **A**∧¬**B** 取代¬(**A**→**B**)。

2. 使否定号直接作用于原子式

应用四条对偶规则即可实现。即用¬**A**∧¬**B** 取代¬(**A**∨**B**);用¬**A**∨¬**B** 取代¬(**A**∧**B**);用¬**A**！¬**B** 取代¬(**A**↾**B**);用¬**A**↾¬**B** 取代¬(**A**！**B**)。

3. 变换成子句的合取

使用下列公式进一步变换成子句的合取。公式中符号⇌表示左右可以根据变换的需要互推,即互为充要条件。

(1) $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\vee(\mathbf{A}\wedge\mathbf{C})\rightleftharpoons\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$。

(2) $(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})\vee\mathbf{A}\rightleftharpoons(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\wedge\mathbf{A}\vee\mathbf{C})$。

(3) $\mathbf{A}\upharpoonright(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})\rightleftharpoons(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})\wedge(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{C})$。

(4) $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\upharpoonright(\mathbf{A}\wedge\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$ 。

(5) $\mathbf{A}!\ (\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})\rightharpoonup(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\wedge(\mathbf{A}!\ \mathbf{C})$。

(6) $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})!\ \mathbf{C}\rightharpoonup\mathbf{A}!\ \mathbf{B}!\ \mathbf{C}$。

根据式(5)和式(6)可知,⇀号左部的形式类似,可变换为两个子句或一个子句。

(7) $(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\vee(\mathbf{A}!\ \mathbf{C})\rightleftharpoons\mathbf{A}!\ (\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$。

(8) $(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\upharpoonright(\mathbf{A}!\ \mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}!\ (\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$。

(9) $\mathbf{A}!\ (\mathbf{B}\upharpoonright\mathbf{C})\rightharpoonup(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})\upharpoonright(\mathbf{A}!\ \mathbf{C})$。

(10) $(\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{B})!\ (\mathbf{A}\upharpoonright\mathbf{C})\rightharpoonup\mathbf{A}\upharpoonright(\mathbf{B}!\ \mathbf{C})$。

熟悉了 LEL 后可知,对于∨、∧、↾和 !,**交换律、结合律**都成立。但对于相同文字的合并,只有∨、∧、↾ 时成立;! 时不成立。另外,分析上述公式也可知,式(1)是合取对析取的分配律;式(2)是析取对合取的分配律;式(3)是制析对合取的分配律;式(7)是约合对析取的分配律。另外,式(1)、式(4)、式(7)、式(8)又与初等代数中提取公因式的方法类似。无疑,通过有限次使用上述公式,可以将任一公式变换成逻辑上遵循它的多个子句的合取。

4. 子句之间的变量分离标准化和子句集

通过子句之间的变量分离标准化(即通过变量改名,使每两个子句都没有相同的变量名),用逗号代替合取号,就构成了子句集。

23.3.4 子句集的消解和消解过程逻辑有效性的证明

1. 消解的基本步骤

用子句集演绎,可使种类繁多的公理、规则和公式统一成一条简单的“**将两个子句合并,消除互补文字**”的消解推理规则,便于机器实现。消解推理的基本步骤如下所述。

(1) 检验是否满足可消解子句对的类型限制。

析取型子句只能和制析型子句、单文字子句或含有单文字式的约合型子句消解;制析型子句或含有制析式的约合型子句不能和约合型子句中的析取式消解;约合型子句中的析取式不能和另一个约合型子句中的析取式消解。有约合型子句参与消解时,至少有一个子句必须是单文字子句或制析型子句;或者至少有一个约合型子句中含有单文字式或制析式;如果有析取型子句或含有析取式的约合型子句参与消解,则要求每个析取式中都没有互补文字或只有一个析取

式有互补文字且全部文字都是互补文字。例如，两个子句 $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$，$\mathbf{C}_2 = \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C}$。$\mathbf{C}_1$、$\mathbf{C}_2$ 消解后得到消解式 $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$；当 $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ 时，与传统消解不同[7]，不能和 $\mathbf{C}_2$ 消解。又如，$\mathbf{C}_1 = (\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B})\,!\ \mathbf{C}$，$\mathbf{C}_2 = \neg \mathbf{A}\,!\ \mathbf{B}\,!\ \mathbf{D}$ 时，得到消解式为：$\mathbf{B}\,!\ \mathbf{C}\,!\ \mathbf{D}$；当 $\mathbf{C}_1 = (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})\,!\ \mathbf{C}$，就不能和 $\mathbf{C}_2$ 消解；当 $\mathbf{C}_2 = (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B})\,!\ \mathbf{D}$ 时，也不能和本例中所有的 $\mathbf{C}_1$ 消解。

（2）寻找项（常量、函数、变量）对变量的置换，并作用于两个父辈子句，使它们含有互补文字对。例如，$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}(x,\ e_1)$，$\mathbf{C}_2 = \neg \mathbf{P}(e_2,\ y) \upharpoonright \mathbf{P}(e_2,\ e_1)$。可找到置换 $\{e_2/x,\ e_1/y\}$，使之作用于 $\mathbf{C}_1$、$\mathbf{C}_2$，就有了互补文字对 $\mathbf{P}(e_2,\ e_1)$ 和 $\neg \mathbf{P}(e_2,\ e_1)$。

（3）合并相同的文字，消除两个父辈子句中的互补文字（两步都包括置换后出现的与互补对相同的文字）。消解式仅由剩余文字组成。例如上述例子中，$\mathbf{C}_1$、$\mathbf{C}_2$ 消解后得到的消解式为空子句 NIL。

消解式即两个子句的剩余文字。剩余文字之间的联结号由下列判断和过程确定。

没有约合型子句参与消解时，称为非 **P** 型消解。非 **P** 型消解时，若有：

① 单文字子句参与消解，则原来联结号不变。

② 析取型子句参与消解，则联结号为析取。

③ 两个制析型子句消解，则联结号为制析。

有约合型子句参与消解时，称为 **P** 型消解。P 型消解时要将两个父辈子句的合取变换成约合。由此构成析取式、制析式和单文字式的集合，式之间是约合关系，称为 **P** 型集合。不能进行非 **P** 型消解的父辈子句也可以同样处理，进行 **P** 型消解的尝试：把 **P** 集当做子句集，只取满足前述类型限制的单文字式和制析式或析取式作为父辈子句，反复调用上述基本步骤（2）和（3）中的类似过程进行化简。化简时，要用新产生的式取代父辈子句。父辈子句可以多次取用，但不保留在 P 集中。终止条件是：产生空式（NIL）或用尽所有的式（包括新产生的式），不能再产生新的式。由此得到化简的 **P** 集，即 **P** 型消解的消解式。

2. 消解法逻辑有效性的证明概要

由前面的讨论可知，原始公式子句化后得到的子句集在逻辑上遵循原始公式，而子句集中可能有四类子句、六种形式。

各种子句之间和同类子句之间可能消解的组合数为：$C_6^2 + 6 = 21$。但其中的 14 种组合，消解法成立；7 种不成立。

不成立的组合方式可以用除外方阵证明。

成立的组合方式，其消解依据可用下列已证公式表示。其中非 **P** 型消解 4 种（使用的公式见下列（1）~（4）），P 型消解 10 种（使用的公式见下列（5））。

它们实际上表示了可消解子句对的类型限制。至此 LELRM 的逻辑有效性已证毕。要说明的是其中一部分也是传统逻辑的推理格式(见所附注释,证明略)。

(1) 单文字子句和单文字子句。

$\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathrm{NIL}$(空子句,即矛盾)。

(2) 单文字子句和制析型子句。

① $\mathbf{A} \wedge (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$(假言推理肯定式)。

② $\neg \mathbf{C} \wedge (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{B} \upharpoonright \mathbf{C}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathrm{B}$(依据同上)。

(3) 制析型子句和制析型子句。

① $(\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{B} \upharpoonright \mathbf{C}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{C}$(三段律)。

② $(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$(合并)。

③ $(\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B} \upharpoonright \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{B} \upharpoonright \mathrm{D}) \rightharpoonup \mathbf{B} \upharpoonright \neg \mathbf{B} \upharpoonright \mathbf{C} \upharpoonright \mathbf{D}$ 或者 $\mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{C} \upharpoonright \mathbf{D}$(依据同上,注意与数理逻辑不同,不是永真式,不能从子句集删除)。

④ $(\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{B}) \rightharpoonup \neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{B} \upharpoonright \neg \mathbf{B}$(推出永真式,可从子句集删除,下同)。

(4) 析取型子句和制析型子句。

① $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$。

② $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$。

③ $(\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{B} \upharpoonright \mathbf{D}) \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ 或者 $\mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$($\rightharpoonup$号右边是永真式)。

④ $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{B} \vee \neg \mathbf{B}$($\rightharpoonup$号右边是永真式)。

(5) P 型消解(即约合型消解)。

① $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{A}!\ \mathbf{B}$($\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 中至少有一个为约合型子句时使用)。

② $\mathbf{A}!\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{B}!\ \mathbf{A}$(约合交换律)。

③ $(\mathbf{A}!\ \mathbf{B})!\ \mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}!\ (\mathbf{B}!\ \mathbf{C})$(约合结合律)。

用上述公式①可构造 P 集。用公式②和公式③,可对该 P 集中的每一对式尝试消解,以便得到化简的 P 集,即新的消解式。消解的依据是下列已证公式。

- $\mathbf{A}!\ \neg \mathbf{A} \rightharpoonup \mathrm{NIL}$(空子句,即矛盾)。
- $\mathbf{A}!\ (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$。
- $(\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B})!\ (\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{C}) \rightharpoonup \mathbf{B} \upharpoonright \mathbf{C}$。
- $(\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B})!\ (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}$。
- $(\mathrm{D} \upharpoonright \neg \mathbf{C} \upharpoonright \mathbf{B})!\ \mathbf{A}!\ \mathbf{C} \rightharpoonup (\mathbf{D} \upharpoonright \mathbf{B})!\ \mathrm{A}$。
- $\mathbf{A}!\ \mathbf{B}!\ (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{B}!\ \mathbf{B}$。
- $\mathbf{A}!\ \mathbf{B}!\ (\neg \mathbf{A} \upharpoonright \neg \mathbf{B}) \rightharpoonup \mathbf{A}!\ \neg \mathbf{A}$ 或者 $\mathbf{B}!\ \neg \mathbf{B}$(推出空子句,即矛盾)。

对于实用系统,必须排除所有可能矛盾的命题,即必须做到任意命题必不可矛盾:

$$\mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\mathbf{B}!\ \neg\mathbf{B})$$

也就是说，$\neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg(\mathbf{B}!\ \neg\mathbf{B})) \rightharpoonup \mathrm{NIL}$ 成立，即下列公式成立：

$$\mathbf{A}!\ \mathbf{B}!\ \neg\mathbf{B} \rightharpoonup \mathrm{NIL}$$

另外，由 23.3.3 节的公式(7)可得：

$$\mathbf{A}!\ (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\ \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A}!\ \mathbf{C})$$

当用公式 $\mathbf{A}!\ (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \rightleftharpoons (\mathbf{A}!\ \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A}!\ \mathbf{C})$ 消解时，如果由约合分配律得到两个 NIL 的析取，最终也可推得 NIL。

考虑到上述 9 个公式，以及式 $\mathbf{B}!\ \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{B}$ 并不成立，可知，能够进行 P 型消解的子句只有 10 种组合，且只能是：单文字子句（或含有单文字式的约合型子句）和制析式约合子句或者析取式约合子句或其他单文字式约合子句；制析型子句和制析式或单文字式约合子句；制析式约合子句和其他制析式约合子句；单文字式约合子句和其他单文字式约合子句。如果有析取式参与消解，则要求该子句满足限制：该析取式中没有互补文字，或者该析取式的全部文字都是互补文字。

至此，14 种可以消解的子句组合及其证明依据都介绍完毕。

23.4　对基于 CERLEL 和 LELRM 的人工智能语言 LELAIL 的探索

23.4.1　计算机上应用 LELRM 实现反演推理的研究

在 LELRM 中，事实和规则都可以用子句描述。一般规则的形式为 $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{D}$，写成 $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B} \rightharpoonup \mathbf{C} \rightharpoonup \mathrm{D}$ 逻辑上更强。其子句形式为 $\neg\mathbf{A} \upharpoonright \neg\mathbf{B} \upharpoonright \neg\mathbf{C} \upharpoonright \mathbf{D}$。表示可能或不可能这类事实时，用约合型子句。例如，论域中 P(x) 可能真，表示成 U(x)！P(x)。这里 U(x) 表示变元 x 在论域中。显然，对于任何具体系统，U(x) 普遍有效；$\neg$U(x) 是 NIL，即矛盾。对于“不是 **A** 必定是 **B**”，即“两者至少必有一个成立”的事实，用 $\neg\mathbf{A} \upharpoonright \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A} \upharpoonright \neg\mathbf{B}$ 两个子句描述。一般的事实可用单文字子句描述。对于常量，用 e_1、e_2 等符号表示事实和规则中“某个或某些个体”这个概念（如果它们依赖于论域中其他某个或某些个体集，就应该表示成这个或这些个体集的函数）。对于待证明的定理（目标）或待求解的问题中出现的“某些”、“哪个”等概念，用变元 x、y、z 表示，这与 Prolog 语言中的处理方式类似。通过这些方法完成论域中知识的形式化。

论域知识形式化后，再把公式集变换为子句集 S，把待证公式或要求解的问题取反后也变换为子句放入 S。对 S 消解，新产生的消解式再放入 S。重复上述过程，直至新子句即消解式为 NIL 或$\neg$U(x) 而成功地终止。或者用尽 S 中的子句，不能再产生新子句或机器的内存耗尽而失败。

23.4.2 基于 LELRM 并应用反演法的定理证明实例

为使读者理解和掌握使用反演法进行定理证明，本节举两个例子，例子中给出了演绎的主要依据。一些常用的公式，如结合律、交换律等，就不再列出了。

1. “充分条件前后件合取律”的证明

即要证明(**A→C**)(**B→D**)→**AB→C D**。

证明：将该公式取反，化为子句集。若归结该子句集得到空子句，则证明了公式成立。

原公式取反，¬((**A→C**)∧(**B→D**)→**A∧B→C∧D**)。

消除→号，再两次使用公式 **A**！¬**A**→NIL 和合取的对偶律，得到混合式约合型子句：

((¬**A**↾**C**)！(¬**B**↾**D**))！(**A**！ **B**！(¬**C**∨¬**D**))

然后两次使用公式 **A**！(¬**A**↾**B**)→**B**，消去文字 **A**、**B**，化简后得到子句：

C！ **D**！(¬**C**∨¬**D**)

最后两次使用公式 **A**！(**B**∨**C**)⇌(**A**！ **B**)∨(**A**！ **C**)，得到 NIL，证毕。

2. “必然 A 则可能 A，须以 A 不矛盾为条件”的证明

即要证明¬(**A→B**！ ¬**B**)→(**A→B**)→**A**！ **B**

证明：将公式取反，化为子句集。如归结该子句集得到空子句，则证明了公式成立。

原公式取反后得到：¬(**A→B**！ ¬**B**)！ ¬((**A→B**)→**A**！ B)。

消去→号得到：

(**A**！ ¬(**B**！ ¬**B**))！(¬**A**↾**B**)！ ¬(**A**！ **B**)

使否定号直接作用于原子式得到混合式约合型子句：

A！(¬**B**↾**B**)！(¬**A**↾**B**)！(¬**A**↾¬**B**)

反复使用文字 A 和公式 **A**！(¬**A**↾**B**)→**B**，化简这个约合型子句得到：

(¬**B**↾**B**)！ **B**！ ¬**B**

使用公式 **A**！(¬**A**↾**B**)→**B** 和 **A**！ ¬**A**→NIL 得到：NIL，证毕。

23.4.3 建立基于 LELRM 反演法的人工智能语言(LELAIL)的尝试

应用 LELRM 进行反演的实验性人工智能语言(缩写成 LELAIL)，20 世纪 90 年代中期已经在太极机上用 VAX-LISP 实现了。LELAIL 共 600 多行，由 54 个函

数构成。具有简单的人机接口，如输入子句集时，可对子句型进行鉴别、分类、做语法检查并提示出错信息等。还定义了 Report 函数，在成功时它能报告成功的路径和/或待解问题中变量的值；失败时它能报告全部搜索过程。该函数还能显示系统进行某步推理的原因，便于控制策略的研究和完善。为了减少搜索的工作量，采用宽度优先方式的支持集策略，既提高了效率，又可保持完备性。另外，系统在用户输入子句集的同时，能将各类子句按消解时得到 NIL 的可能性的大小排序：单文字子句、制析型子句、析取型子句、约合型子句。利用这类启发式信息，系统的效率得到了较大提高。

23.4.4　应用 LELAIL 的实例

为使读者了解 LELAIL，本节举一个例子说明其应用。例子中给出了演绎的主要依据。但对一些常用的公式，如结合律、交换律，例子中就不再列出了。

已知：①海豚不识字；②任何能阅读者都识字；③某些海豚可能有智力。

求：④哪些有智力者可能不会阅读？

本例中用 **D**(y)、L(y)、R(y)、I(y)分别表示变元 y 是海豚、识字、会阅读、有智力。相应的表达式和子句分别是：

① **D**(y)⇀¬L(y)，其子句形为：¬**D**(y)↾¬L(y)。

② R(x)⇀L(x)，其子句形为：¬R(x)↾L(x)。

③ **D**(e_1)！I(e_1)，其子句形和原表达式相同。

④ I(z)！¬R(z)，表达要求解的问题。将其取反后再子句化，得到：

¬I(z)↾R(z)。

与基于数理逻辑的系统不同，规则用条件号描述，子句化后得到制析型子句(见上例①、②)。这种变换互为充要条件，且变换的结果与变换前一样，也不是前、后件的真值函数，因此逻辑控制信息仍然保留在子句中。

LELAIL 系统受到 Lisp 语言规定的限制，用 EO 表示制析，NOT 表示非，P 表示约合，S 表示单文字，·x、·y 和·z 等符号表示变元。因此上述子句集的输入形式为：

①(EO (NOT D·y) (NOT L·y))；

②(EO (NOT R·x) (L·x))；

③ (P (S (D　e_1) (S (I　e_1)))；

④ (EO (NOT I·z) (R·z))。

系统提供的答案是：({ e_1/·z })，即 e_1 置换了 z，表示有智力者 e_1 可能不会阅读。从输出的成功路径看，系统做了三步：由式①和式②消解所得的消解式，再和式④消解。最后由第二步所得的消解式与式③消解得到 NIL。实际上

系统总共搜索了 13 步才结束,效率是 3/13。对系统用了很多实例试验。这些试验表明求解不同实例的效率差距较大,平均效率较低。

23.5 本章小结

本章概述了当代形式逻辑在人工智能领域的应用理论的研究概况。知识表示方法 CERLEL 的提出和在一些知识工程项目开发中的应用,为相关领域的具有复杂逻辑结构的知识描述提供了强有力的工具,为项目的成功奠定了基础。这些项目先后获得贵州省政府科技进步奖和省公安科技进步奖,得到同行的一致好评。基于当代形式逻辑的消解原理 LELRM 的提出,以及基于 LELRM 的实验性人工智能语言 LELAIL 的开发,为建立可以综合运用普通逻辑思考中的“必然”、“可能”、“偶然”、“有缘”、“无缘”等概念进行推理并具有机器学习功能的新型人工智能语言探索了道路、提供了经验。这些研究和探索与现代计算机科学和人工智能理论的最新成就紧密结合,很有意义。可以深信,随着当代形式逻辑在人工智能领域的应用理论研究的深入,在现代计算机上可以运行的具有初步智能的实用系统是能够开发成功的。这些知识工程项目的成功,能为突发事件模拟、政府决策、疾病诊断、法院判决、作战方案评估等大而复杂系统的运作提供强大的辅助和支撑。

然而,这些已经完成的工作,仅仅是当代形式逻辑在人工智能领域实际应用的初步尝试。特别是 LELRM 和 LELAIL,无论理论本身还是系统的人机接口、推理效率、过程性知识表示和处理等,都需要进一步研究和完善。

(1) 直接输入公式,由机器实现子句化,并自动转化为 Lisp 语言能接受的函数,是项繁重的工作,还有很多问题有待研究和解决。另外,利用最新的语音或手写体识别技术,作为人工智能语言的人机接口,也值得研究。

(2) 研究子句的某种子集(与数理逻辑中的 Horn 子句类似),对子句化前的规则和事实中的正负文字的数量和排列顺序进行限制,也许是提高子句化速度和推理效率的有效途径。为此需要研究,如何对输入的规则和事实的形式做出适当规定,以便在不降低知识描述能力的前提下提高子句化和子句集处理的速度。提高效率的另一条途径是发现和利用各种子句类型所固有的启发式信息,以及子句之间在消解时能够缩短长度得到 NIL 的可能性大小的信息。另外,采用深度优先搜索的支持集策略,也可能会提高推理效率。

(3) 直接调用 Lisp 语言中的函数,增强过程性知识表示和处理的能力。当初选用 Lisp 作为母语言,就是充分估计了这一有利条件。然而仍有不少工作需要完成。

(4) Prolog 语言不能运用人们普通逻辑思考中的“必然”、“可能”、“偶然”、

“有缘”、“无缘”等概念。要建立新型人工智能语言,必须使这部分功能得到机器实现并更加完善。而这些概念在日常知识描述和逻辑推理中如何应用、应用价值和应用方法等也需要深入探讨。

（5）对模糊性知识和不确定性知识的表示和处理,现代人工智能已经有不少研究成果。作为新型人工智能语言,应该提供足够的通用模式,以便用户方便地选择。因此,这方面要研究的课题也很多,主要是:不确定性的度量和“必然”、“可能”、“偶然”等概念的关系怎样? 不确定性或模糊性如何定量描述? 如何正确处理? 等等。

附　录　A

On Sufficient Condition Relation

By Prof. Gong Qirong

(North region of Guizhou University , Guiyang huaxi 550025, P. R. China)

E-mail: gongmuwen@163.com

In the history of logic, "sufficient condition" as an important connective relationship has always been the focus of attention of logicians, because there must be universally valid sufficient condition relation between the presupposition and conclusion of any inference formula. For the inference that new knowledge can be acquired from existing knowledge in fact, the presupposition must contain sufficient condition relation. However, over the past 2000 years, researches on the logical meaning of sufficient condition relation from Aristotle and Philo in ancient Greece to Mo Di in China in Early-Qin Dynasty have always been controversial. Nevertheless, there is a very clear point: the sufficient condition event "if ***A***, then ***B***" of non-pure value function is not the compound event of true value function studied by orthodox mathematical logic.

1. Sufficient Condition Relation Has the Same Meaning with Necessary relation

In popular formal logics works, "***A*** necessarily ***B***" is often used to define "if ***A***, then ***B***" of sufficient condition relation. For example, in *Popular Logic Readings* of famous Chinese logicians Jin Yuelin et al. (China Youth Publishing House, 1962), "if ***A*** exists, ***B*** will necessarily exist" is used to define that ***A*** is the sufficient condition of ***B***, namely, "if ***A***, then ***B***". That is to say, a very typical opinion of traditional formal logic is as below: necessity relation refers to sufficient condition relation of binary non-pure value function, namely, logical meaning of connective "if, then" of binary non-pure value function. However, regrettably, the logical meaning of "necessarily" that can be regarded as a connective has not been clearly defined, so that sufficient condition relation defined by the connective has not obtained a strict, accurate and unanimously recognized definition. Nevertheless, luckily, although the

logical meanings of the above two have not been defined clearly, for the influential opinion of traditional formal logic that uses necessarily to define sufficient condition relation, there is a clear point: from the logic sense, the two above share the same meaning.

We use a symbolic expression $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ to express "$\boldsymbol{A}$ necessarily $\boldsymbol{B}$" or "$\boldsymbol{A}$ is the sufficient condition of $\boldsymbol{B}$", in which the ideographic artificial symbol $\rightharpoonup$ is called "sufficient condition symbol", $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ is called "if $\boldsymbol{A}$, then $\boldsymbol{B}$" (this is called symbolic pronunciation), and "$\boldsymbol{A}$ necessarily $\boldsymbol{B}$" or "$\boldsymbol{A}$ is the sufficient condition of $\boldsymbol{B}$" is a symbolic logical meaning. Compound event $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ of non-pure value function that takes $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ as the antecedent and consequent is called "sufficient condition event". As a result, the event that can be synonymously stated with at least two different sentences such as "event is necessarily in motion" and "x is event ($\boldsymbol{A}(x)$), necessarily, x is in motion ($\boldsymbol{B}(x)$)" is expressed as $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ with our symbols, in which the logical symbol x is called individual variable. Natural language is particular about conciseness, so that the proposition $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ does not adopt the long-winded statement of "x is event, necessarily, x is in motion" under normal circumstances, but adopt the concise statement of "event is necessarily in motion". Since individual variable is omitted and unmentioned, two sentences before and after the word "necessarily" appearing in the statement are contracted into two nouns and then two sentences connected by "necessarily" are contracted into a sentence including "necessarily". Just for the habit of natural language, some people feel that binary connective relation "necessarily" in the compound event of non-pure value function looks very much like unary connective relation.

Is there an event like "necessarily $\boldsymbol{B}$"? That's to say, can "necessarily" be unary connective relation? From the perspective of expression habit of natural language, the means of expression of the statement "necessarily $\boldsymbol{B}$" is usually encountered. For example, in real number mathematics that regards real number as the range, there is the sentence "necessarily $x^2 \nless 0$" below used to state mathematical law. Generally, in order to meet the conventional language habit better, the law is often said to be "x^2 necessarily not less than zero" synonymously. Here, at the first sight, the event expressed with the sentence above makes people feel that it seems to be in $N\boldsymbol{B}(x)$ form, in which N indicates "necessarily" and $\boldsymbol{B}(x)$ indicates "$x^2 \nless 0$". Nevertheless, after close observation we find that the sentence above is just a concise expression of sufficient condition event $\boldsymbol{U}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$, in which $\boldsymbol{U}$ indicates domain "real number", $\boldsymbol{U}(x)$ indicates "x in domain real number" or "x refers to

real number". Obviously, this is a logically true open event (logically true individual-event function). Sufficient condition event $\boldsymbol{U}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ can also be stated to be "x is a real number, necessarily, x^2 not less than zero" while "x^2 necessarily not less than zero" is the concise and synonymous expression of the event: keep logically true "x is a real number" omitted and unmentioned (because real number is originally regarded as the domain, individual variable x certainly remains unchanged in domain real number), in order to meet language habits, move the word "necessarily" that states binary connective relationship into the remaining sentence and then abstract a short simple sentence from a long-winded compound sentence. That's to say, the event that seems to be in $N\boldsymbol{B}(x)$ form and actually in $\boldsymbol{U}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ form from the perspective of language presentation is a special circumstance of sufficient condition of $\boldsymbol{A}(x) \rightharpoonup \boldsymbol{B}(x)$ form when $\boldsymbol{A}(x)$ is $\boldsymbol{U}(x)$.

Here, we carry out an important guiding ideology when analyzing logic theory problems: the logical structure of proposition stated for a sentence does not depend on the language expression of the sentence divorced from the context and greatly determined by national or individual language habits, but the objective logical structure denoted by the sentence (also called the logical content of proposition stated by the sentence) determined by the context (objective environment). Obviously, the sentence made by the context to have a single meaning has only one denotation and there is only one proposition that revolves around the denotation, but there are thousands of sentences that can be used to carry the exclusive proposition and have different language expressions. That is to say, the fact is as below: the sentence made by the context to have a single meaning has a denotation and states a proposition and meanwhile there may be thousands of different sentences with different language expressions that have the same meaning with the sentence. From this, it can be seen that a proposition is corresponding to the denotation of the sentence that represents the proposition (namely, object) while there is many-to-many relationship between propositions and sentences that carry the propositions. Just for this reason, the logical structure of a proposition does not depend on the form of expression of language, but the objective logical structure denoted by a sentence. It is irrelevant to analyze the logical structure of the proposition carried by a sentence through the form of language expression of the sentence.

So far, we have never stipulated the logical meaning of sufficient condition or necessary relation clearly. Even so, we still define that: from the perspective of logical meaning, the two above are completely synonymous. Next, we will discuss: What

does the complete synonymy between sufficient condition and necessary relation mean from the perspective of logical meaning?

2. Discussion Developed from an Instance

There is a statement below on Page 709 of *Dictionary of Mathematics* Volume VII published by People's Publishing House:

"Prove: the sum of 1, 3, 5, 7, ⋯, $(2n-1)$ is n^2.

(1) If there is a proposition of $n=1, 1=1^2$, the equation exists.

(2) Suppose $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$ exists for a value k of n. If $2k+1$ is added to both sides of the equation, then: $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$. When k is replaced by $k+1$, the equation still exists. From this, it can be seen that, if the equation exists for positive integer value k of n, the equation also exists for positive integer value $k+1$.

According to (1) and (2), we know that the equation exists for any positive integer value of n."

Respectively represent $1=1^2$, $1+3+5+7+\cdots+2k-1=k^2$, $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ (k refers to a positive integer), $1+3+5+7+\cdots+\cdots+2n-1=n^2$ (n refers to any positive integer) with $\boldsymbol{A}(1)$, $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ and $\boldsymbol{A}(n)$. "Suppose $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$", "if $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$", and "according to $\boldsymbol{A}(1)$, if $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$, so $\boldsymbol{A}(n)$" appear in the quotation above. "Suppose⋯, then⋯", "if⋯, then⋯", and "according to⋯, so⋯" appear here. Obviously, all these show the sufficient condition relation between antecedent and consequent. We will analyze the logical meanings of these expressions according to the fact.

Obviously, from the perspective of extension, as the elements, the equations in $\boldsymbol{A}(n)$ form compose the infinite set as below:

n	$\boldsymbol{A}(n)$	Symbolic Representation
1	$1=1^2$	$\boldsymbol{A}(1)$
2	$1+3=2^2$	$\boldsymbol{A}(2)$
3	$1+3+5=3^2$	$\boldsymbol{A}(3)$
4	$1+3+5+7=4^2$	$\boldsymbol{A}(4)$
⋮	⋮	⋮
k	$1+3+5+7\cdots+(2k-1)=k^2$	$\boldsymbol{A}(k)$
$k+1$	$1+3+5+7+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$	$\boldsymbol{A}(k+1)$
⋮	⋮	⋮

In the above, k refers to a positive integer. There are an infinite number of equations in $\boldsymbol{A}(n)$ form and the length of equations (the number of symbols in equations) tends to be infinite with the increase of n. Thus, people can not list an infinite number of equations above one by one (then can not identify whether it exists by listing and checking one by one). For technologies with limited functions adopted by human beings with finite life and energy (e.g. computer with the largest capacity), a positive integer m can be found and people cannot write out any equation among an infinite number of equations in full when $n \geqslant m$. It's impossible to identify whether any equation exists by means of direct checking calculation. That is to say, we cannot identify whether $\boldsymbol{A}(n)$ exists by listing the extension of infinite set one by one. However, from the perspective of connotation, the infinite set above has an obvious common and only property that can grasp and state finitely (namely, the nature shared by all elements in the set and only possessed by elements in the set, also called connotation):

The i^{th} item is $2i-1(i=1,2,3,\cdots,k)$, there are k items in total, and the sum of all items is k^2.

Then, $\boldsymbol{A}(k)$ and $\boldsymbol{A}(k+1)$ can be respectively and intensively expressed as ($\sum_{i=1}^{k}$ indicates the sum from the 1^{st} item to the k^{th} item):

Connotation Equation	Explanation	Step
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) \overset{?}{=} k^2$	$\boldsymbol{A}(k)$	1)
$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) \overset{?}{=} (k+1)^2$	$\boldsymbol{A}(k+1)$	2)
$\Vert$		
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+[2(k+1)-1]$		3)
$\Vert$	($\Vert$ shows the connotation connection between 1) equation and 2) equation on the left)	
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2k+1$	(Removal of brackets and simplifying)	4)

Vertical equation of 2) $\boldsymbol{A}(k+1)$ equation to 3) on the left in the steps above depends on the connotation of $\boldsymbol{A}(n)$. This step is very crucial and it is a step that plays a crucial role in all steps; vertical equation of 3) to 4) depends on $2(k+1)-1=2k+2-1=2k+1$. In this way, we confirm that:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2k+1 \tag{5)}$$

Items that appear on the left and right of equation can be replaced by equal items, the equation remains unchanged, and $\boldsymbol{A}(k+1)$ can be expressed as:

$$\begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)}_{\substack{?\,\| \\ k^2}} + 2k+1 \overset{?}{=} (k+1)^2 \end{array} \tag{6)}$$

We call attention to the following important facts: from step 1) to step 6), we only write out the connotation equations of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ and have never confirmed whether the equations exist from beginning to end in fact (certainly, it is not allowed and unnecessary to "suppose"), so a question mark "?" is marked on each equal sign " = " to show the every impact fact of "not confirm whether the equation exists" (if making a supposition, the very important fact will be desalinated). Certainly, the existing of all other equations are confirmed (no matter the equal sign is written vertically or horizontally), so no question mark "?" is marked on the equal sign " = ".

According to the identical existing of $k^2+2k+1=(k+1)^2$ and the expression indicating $\boldsymbol{A}(k+1)$ obtained from step 6), the fact ① below can be confirmed:

① The fact that $\boldsymbol{A}(k)$ exists and $\boldsymbol{A}(k+1)$ does not exist will not happen in fact; 7)

Obviously, there is the fact ② below:

② All people who implement step 1) ~7) confirm the existing of fact ① above;

In consideration of $\boldsymbol{A}(n)$ connotation, $2(k+1)-1=2k+1$, $k^2+2k+1=(k+1)^2$, transitivity of equality relation, and substitutability of equal items as evidences in step 1) ~7), the real existence does not depend on the existing of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$. Thus, there is the fact ③ below:

③ When determining that the fact ① above exists, the confirmer does not need to depend on the existing of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$.

The facts ①, ②, ③ above can be synthetically and concisely stated as:

We can confirm that it is impossible that $\boldsymbol{A}(k)$ exists and $\boldsymbol{A}(k+1)$ does not exist independent of the existing of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$.

"The equation of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ exists or not" means "objective mathematic event $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ as the semantics of corresponding equation exists or not". Thus, the integration of the facts ①, ②, ③ above can also be synonymously stated as:

We can confirm that it is impossible that $\boldsymbol{A}(k)$ exists and $\boldsymbol{A}(k+1)$ does not exist independent of the existing of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$.

The objective fact is a sufficient condition event, which is symbolically represented with "$\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$". The existing of the whole sufficient condition event $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$ does not depend on the existence of antecedent and consequent $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ (so that it is not the true value function of true values of the antecedent and consequent); moreover, it must be confirmed independent of the existence of antecedent and consequent (namely, it is unnecessary to confirm the existence of the antecedent and consequent). The form of formulation of natural language of sufficient condition event "$\cdots \rightharpoonup \cdots$" can be used in different contexts: "if…, then …", "…necessarily…", "… is the sufficient condition of…", and "…then…" and so on. Sometimes, people may improperly say "if…exists, …. will exist" (Call attention to: The existence of a sentence or equation means the existence of corresponding objective event. This is an objective fact independent of man's will, so that it cannot be supposed; to confirm the existence of a sufficient condition event, it is unnecessary to make such a supposition, because it can be confirmed independent of the existence of antecedent and consequent.).

To sum up, we draw the following conclusions:

The logical meaning of sentence "if $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$" is the objective sufficient condition event $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$ denoted by the sentence and we can confirm that it is impossible that $\boldsymbol{A}(k)$ exists and $\boldsymbol{A}(k+1)$ does not exist independent of the existence of $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$.

Herein, we obtain the general definition of sufficient condition relation (namely, necessary relation):

If both $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ and $\boldsymbol{B}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ are events (in which, each i is a natural number and n is finite and can equal to 0), $\boldsymbol{A}(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$ and $\boldsymbol{B}(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$ are respectively the examples of $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ and $\boldsymbol{B}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ and the following three facts exist:

(1) For the history of people, the thing that $\boldsymbol{A}(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$ exists and $\boldsymbol{B}(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$ does not exist may not happen in the past, at present and in the future;

(2) People have already confirmed (or known) the fact (1);

(3) When confirming the fact (1), people does not need to depend on the non-existence of $\boldsymbol{A}(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$ or the existence of $\boldsymbol{B}(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$.

Then, $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ is the sufficient condition of $\boldsymbol{B}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots,$

x_n) and sufficient condition event "if $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$, then $\boldsymbol{B}(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$" exists.

In order to simply and omit n ($n \geqslant 0$) individual variables appearing in the scope of $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ is used to represent sufficient condition events. It can be read as "if $\boldsymbol{A}$, then $\boldsymbol{B}$", "$\boldsymbol{A}$ sufficient condition of $\boldsymbol{B}$", and "$\boldsymbol{A}$ necessarily $\boldsymbol{B}$". The ideographic artificial sign "$\rightharpoonup$" is called sufficient condition sign.

3. Two Independences of Sufficient Condition Relation-Discussing the Two Dependences of Implication Relation

Any objective event is indicated with $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. The important logical property "existence can be confirmed independent of $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$" included in sufficient condition event $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ is called "independence of sufficient condition relation to confirm the existence of antecedent and consequent" and also called the first independence. Therefore, the stipulation of sufficient condition event $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ can be further summarized as:

With the first independence, it is impossible that $\boldsymbol{A}$ exists and $\boldsymbol{B}$ does not exist.

To have or reject the first independence is the principle dividing line of sufficient condition relation as the necessary relation in traditional formal logic after clear scribing and real implication of true value function relation in orthodox mathematical logic. Sufficient condition proposition and implication proposition are respectively concerning about sufficient condition event and implication event and the truth or falsity of a proposition depends on the existence of corresponding objective event under consideration. However, as everyone knows, the true value of implication proposition $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ of true value function needs to depend on the true value of the branch proposition A, B completely, the former is a specific two-value discrete mathematical function of the latter, and the determination of true value of $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ needs to depend on the determination of true value of $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. The discrete mathematical nature included in the implication event of true value function can be called the first dependence. According to the logical standard of the first independence, see the two examples below:

(α) "Snow is black" and "two plus two equals four";

(β) "$\boldsymbol{C}$ and not $\boldsymbol{C}$" and "$\boldsymbol{D}$".

The relation between the left and right events of α, β does not meet $\rightharpoonup$ (sufficient condition) relation, so that there is no sufficient condition (or necessarily) connection; however, according to the discrete mathematic standard of the first dependence, the left and right events of α, β above completely meet $\rightarrow$ (implication) relation. Ac-

cording to the logical standard of the first independence and mathematical laws, we easily confirm that the aforesaid sufficient condition proposition $\mathbf{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$ is true; nevertheless, if the sufficient condition sign "$\rightharpoonup$" is replaced by "$\rightarrow$" (implication), according to the discrete mathematical standard of the first dependence, the truth or falsity of the changed implication proposition $\boldsymbol{A}(k) \rightarrow \boldsymbol{A}(k+1)$ cannot be confirmed before the truth or falsity of the branch proposition $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ is confirmed. Thus, the implication relation of two-value function of discrete mathematics cannot serve as sufficient condition (or necessarily) relation with the first independence. Implication relation is useless in mathematical induction.

According to the situation whether the existence just depends on the logical structures of antecedent and consequent and still needs to depend on the experience and nature of antecedent and consequent, sufficient condition events can be divided into logical (e. g. $\boldsymbol{A}(k) \wedge [\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)] \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$) and experiential (e. g. $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$). Complementary with the first independence, for a series of logical sufficient condition events and any experiential sufficient condition event, there is a very important logical property. We explain according to the aforesaid experiential sufficient condition event $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$. Obviously, for a confirmed positive integer k (e. g. positive integer 5), the existence of $\boldsymbol{A}(k)$ (e. g. $\boldsymbol{A}(5)$) may be confirmed in the circumstance where it is unnecessary to confirm the existence of $\boldsymbol{A}(k+1)$ (e. g. $\boldsymbol{A}(6)$). The important objective logical property included in sufficient condition event $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ can be concisely expressed as:

The existence of $\boldsymbol{A}$ can be confirmed independent of the existence of $\boldsymbol{B}$.

We define the logical property as "independence of existence of antecedent to existence of consequent to confirm sufficient condition relation", also called the second independence. The first independence and the second independence are collectively called two independences. Two independences contained in a series of logical sufficient condition events and all experiential sufficient condition are respectively called two logical independences and two experiential independences. Two logical independences are determined and only determined by science of logic (putting forward and implementing logical standards); two experiential independences are determined by related empirical sciences (e. g. mathematics, physics, and chemistry and so on) together with science of logic (namely, according to logical standards). The logical sufficient condition equation with two independences is an inference formula that can acquire new knowledge from existing knowledge and also the most important research object of object logic. The following can be strictly proved: the first independence

does not exist between the antecedents and consequents of many implication tautologies (these implication tautologies compose implication paradox); the second independence does not exist between the antecedent and consequent of any implication tautology-only under the condition when the consequent is directly confirmed to be true, the antecedent can be confirmed to be true (just for this reason, it is called "tautology" – the repetition of same element, certainly circulate). This can be called the second dependence of implication (the determination of existence of the antecedent needs to depend on the determination of existence of the consequent). The first dependence and the second dependence are collectively called two dependences. Thus, the implication tautology with two dependences (impossible to obtain new knowledge from existing knowledge) in orthodox mathematical logic is different from the inference formula with two independences (possible to obtain new knowledge from existing knowledge); the two-value discrete mathematical truth can be applied to obtaining the scenes that need two-value quantitative relation laws of this kind beyond new knowledge and it plays a significant role in the application of extensional electronic digital computers.

Two independences are the logical essence of sufficient condition relation. The true value of sufficient condition event $\boldsymbol{A} \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ is not the true value function of true values of antecedent and consequent $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ of the event. Sufficient condition relation is the connective relationship of non-pure value function and also the real logical connective relationship.

4. Roles of Two Independences of Sufficient Condition Relation in Proving

Now, we analyze the logical meaning of "according to…, we know…".

(1) and (2) in "according to (1) and (2), we know…" that appear in the quotation at the beginning of this section are as follows:

(1) $\boldsymbol{A}(1)$ exists, then $1 = 1^2$. This is a very obvious fact;

(2) "If $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$" exists, i. e. there will be sufficient condition event $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$, as mentioned earlier.

Considering that k appearing in $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{A}(k+1)$ of (2) is a positive integer, it can be 1, 2, 3…. Thus, there are the infinite sequence of sufficient condition event as below: $\boldsymbol{A}(1) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(2)$, $\boldsymbol{A}(2) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(3)$, $\boldsymbol{A}(3) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(4)$, …. After (1) and (2) stand side by side, there is the conjunction event (coexisting at the same time) as below: $\boldsymbol{A}(1) \wedge [\boldsymbol{A}(1) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(2)]$. According to well-known inference formula $\boldsymbol{A}(1)$

$\wedge [\boldsymbol{A}(1) \rightarrow \boldsymbol{A}(2)] \rightarrow \boldsymbol{A}(2)$, it can be proved that $\boldsymbol{A}(2)$ exists; according to $\boldsymbol{A}(2) \wedge [\boldsymbol{A}(2) \rightarrow \boldsymbol{A}(3)] \rightarrow \boldsymbol{A}(3)$, it can be proved that $\boldsymbol{A}(3)$ exists; …; in this way, it can be proved in order that $\boldsymbol{A}(4)$ and $\boldsymbol{A}(5)$ exist; up to infinity (theoretically speaking, k appearing in $\boldsymbol{A}(k)$ will be large enough). The inference formula is usually called "sufficient condition inference affirmative formula", for it has two logical independences, new knowledge can be obtained from existing knowledge, and it is completely different from implication tautology of orthodox mathematical logic with two dependences. Similar to infinite sequence of equation in $\boldsymbol{A}(n)$ form discussed in the example analyzed before, there is an infinite sequence that directly proves that $\boldsymbol{A}(1)$ exists and then successively proves that $\boldsymbol{A}(2)$, $\boldsymbol{A}(3)$… exist. Extensionally speaking, the infinite sequence of the proving cannot be listed one by one. However, the connotation that can be grasped and stated finitely is: for (1) "$\boldsymbol{A}(k)$" and (2) "If $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$" exist, if $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$; so, $\boldsymbol{A}(k+1)$ exists. This can be expressed with a symbolic expression as below:

$$\boldsymbol{A}(k) \wedge [\boldsymbol{A}(k) \rightarrow \boldsymbol{A}(k+1)] \rightarrow \boldsymbol{A}(k+1) \qquad (\mathrm{I})$$

Corresponding to the infinite sequence of the proving above, of which the extension cannot be listed one by one and the connotation can be grasped and stated finitely, it can be concluded that any event in the infinite sequence of event concerning positive integer below exists:

$$\boldsymbol{A}(1), \boldsymbol{A}(2), \cdots, \boldsymbol{A}(k), \boldsymbol{A}(k+1), \qquad (\mathrm{II})$$

The common and only property (connotation) of infinite set (extension) of the event that has been confirmed to exist can be infinitely grasped and stated as A(n). n refers to an arbitrary positive integer.

An infinite number of proving (see Ⅰ) above that can conclude an infinite number results (see Ⅱ) comes down to one proving:

"For (1), $\boldsymbol{A}(1)$ exists; and for (2), if $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$; so: $\boldsymbol{A}(n)$ exists."

This can also be expressed as the proving adopted in the example analyzed above:

"According to the existence of $\boldsymbol{A}(1)$ for (1) and if $\boldsymbol{A}(k)$, then $\boldsymbol{A}(k+1)$ for (2), we know that $\boldsymbol{A}(n)$ exists."

This can also be synonymously (namely, denoting the same object) expressed with signs as below:

$$\Vdash \boldsymbol{A}(1) \wedge [\boldsymbol{A}(k) \rightarrow \boldsymbol{A}(k+1)] \rightarrow \boldsymbol{A}(n) \qquad (\mathrm{III})$$

This is the expression of "mathematical induction". $\boldsymbol{A}(1)$ is called "base",

solid and finite; $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$ is called "induction" and can induce and progress to infiniteness. This is the deduction of "method of induction". The semantics of symbolic expression (Ⅲ) is the objective sufficient condition event below (for convenience, $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$ are respectively used to represent $\boldsymbol{A}(1) \wedge [\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)]$ and $\boldsymbol{A}(n)$), of which the antecedent has been confirmed to be existing and then the consequent that has not been confirmed (in fact, cannot be directly confirmed) can be indirectly confirmed to be existing: "it can be confirmed independent of the existence of $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$ (the first independence) that it is impossible that $\boldsymbol{B}$ exists and $\boldsymbol{C}$ does not exist and the existence of $\boldsymbol{B}$ can be confirmed independent of the existence of $\boldsymbol{C}$ (the second independence); $\boldsymbol{B}$ has confirmed to be existing, so that $\boldsymbol{C}$ that has not been confirmed can be confirmed to be existing." This is the logical meaning of "according to…, we know…".

In the leftmost sign $\Vdash$ of symbolic expression of the objective sufficient condition event above, $\vDash$ indicates "the right expression is an objective law", two short transverse lines indicate two independences, and the first vertical line indicates "the antecedent has been confirmed to be existing".

The expression patterns of natural language of the objective law can also be "…, so …" and "for …, it is proved that…" and so on.

Two independences in the objective law above guide people: (1) to enter new knowledge from existing knowledge, i. e. $\boldsymbol{A}(n)$ that has not been confirmed and cannot be confirmed directly is confirmed to be existing (new knowledge) by confirming $\boldsymbol{A}(1)$ and $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$ to be existing (existing knowledge); (2) to use finite means starting from connotation to grasp infinite extension, i. e. through finite enforceable steps (the first step is to confirm that $\boldsymbol{A}(1)$ exists, the second step is to confirm that $\boldsymbol{A}(k) \rightharpoonup \boldsymbol{A}(k+1)$ exists, and there are 8 steps in total) to confirm that an infinite number of expressions in $\boldsymbol{A}(n)$ form exist. However, the method used to confirm the first independence between events on infinite domain by extracting the connotation (common and only property) of infinite set within finite steps is called "scientific analyzing method of connotation".

The objective law with two independences represented by Ⅲ is a logical law in mathematics and the two independences are still experiential (mathematical here). In the practice of formal logic thinking, complicated logical proving is usually represented as simple as Ⅲ. The strict and complete logical expression of proving made according to the mathematical logical law should be:

$$\Vdash [\boldsymbol{B} \wedge (\boldsymbol{B} \rightharpoonup \boldsymbol{C})] \rightharpoonup \boldsymbol{C} \qquad (\text{Ⅳ})$$

In $\Vdash$, $\vDash$ represents that the right expression is objective logical law, the two short transverse lines represent two logical independences, and the first vertical line represents that the premise premise $\boldsymbol{B} \wedge (\boldsymbol{B} \rightharpoonup \boldsymbol{C})$ has been confirmed to exist (i. e. "according to (1) and (2), it's concluded that the logical inference $\boldsymbol{A}(n)$ that has not been confirmed to exist when two logical independences confirm the premise exists (namely, "we know…" in the quotation). This achieves grasping an infiniteness number of events on infinite domain with finite enforceable steps and entering new knowledge from existing knowledge, that is to say, it's concluded that the consequence has not been confirmed to exist when the premise is confirmed to exist by confirming the premise to exist.

This is the embodiment of roles of two independences of sufficient condition relation in proving.

From the perspective of production process and practical application, two experiential independences are the origins and end-results of two logical independences. Two independences are the logical essences of sufficient condition relation and can act as two solid footstones of science of logic of universally applicable tool to grasp infiniteness with finiteness and acquire new knowledge from existing knowledge. If science of logic is bound to grow into a pawning tree with deep roots, luxuriant leaves and rich fruits, two independences included in sufficient condition relation are two growing green leaves when the tree sprouts.

5. The Conclusion of Proving Is New Knowledge for the Premise or Not

Whether logical proving can lead to a new truth and whether the conclusion is new knowledge for the premise are persistently unsolved problems in the history of logic.

Now, we make some analyses and discussions by taking the fact that a new truth is got through proving in the history of science.

Newton said, "I can see more because I stand on the shoulder of a giant." The giant refers to generations of ancestors who engaged in social practice widely in long term. The practice of the giant is profound and great and we might call it profound practice to make it different from shallow practice engaged by a small number of people in short term. Darwin used to write a book named "Orchid and Insect". He stood on the shoulder of a giant like Newton and summarized a truth proved by profound practice: "all orchids are the media of insects (β)". The expression of β is $s(x) \rightharpoonup p(x)$. After that, someone who had been to Madagascar found that angraecum ses-

quipedale was growing on the island. Its lip calyx's tubulous extension with a length of 29cm is just like a long needle used by rope-knotting craftsmen and nectar is hidden at the bottom of it. The person who found angraecum sesquipedale had never seen and dared not to believe the existence of bees and butterflies with so long tongues, so he wrote a letter to ask Darwin and used his narrow and shallow practice to deny the truth of β. Darwin had a rock-firm faith on β proved by giant's profound practice. He proved "giant orchid is the medium of insect (p (e))" according to β and "giant orchid is an orchid (s(e))" and decisively predicated that the island must have insects and butterflies with tongues with corresponding lengths to sip the nectar of giant orchid and pollinate for giant orchid. Some scholars in biological community who had never climbed the shoulder of giant used to laugh at Darwin for his prediction and considered that there was no moth with such a long tongue. However, what about the fact? Shortly after Darwin made such a predication, through close observation, people found a hawk moth on the island, the lip of which can coil by 20 circles when flying. Darwin's predication and proving that can lead to new truths win together. The great success greatly shocked the biological community at that moment. The inference formula adopted by Darwin included in our formal language is as below:

$$s(e) \wedge [s(x) \rightharpoonup p(x)] \rightharpoonup p(e)$$

This can be considered as the deflation of the two forms of inference below:

$$[s(x) \rightharpoonup p(x)] \rightharpoonup [s(e) \rightharpoonup p(e)]$$

$$s(e) \wedge [s(e) \rightharpoonup p(e)] \rightharpoonup p(e)$$

The former is called substitution theorems and the latter is called the affirmative inference formula of sufficient condition.

6. Scientific Analysis Method of Connotation Seen from Sufficient Condition Relation Expressed by "If, Then" of Generalization Rule of *F*

Scientific analyzing method of connotation was introduced above. Now, we try to analyze how is the first independence in "if, then" used in metalanguage of orthodox mathematical logic established. Take the proving process of famous generalization rule "if **A**, then $\forall x$**A**", the proving of the famous generalization rule is the finite sequence of expression containing **A** and ending with $\forall x$**A** that possesses the undermentioned nature: Any expression except **A** may be a generally acknowledged truth or the result obtained by taking the aforesaid expression as the assumption and using primary principles. We use Greece letter $\mathbf{\Gamma}$ to express the finite sequence of the formula

aforesaid. After the finite sequence **Γ** of the expression called "proving of generalization rule" above is written out, people confirm that: no matter whether **A** and $\forall$x**A** are theorems (can be proved), the thing that **A** is a theorem and $\forall$x**A** is not a theorem may not happen in the past, at present, and in the future for the history of people. Here, we see the important fact as below: in fact, people confirm that it's impossible that **A** is a theorem and $\forall$x**A** is not a theorem and people does not consider whether **A** and $\forall$x**A** are theorems when confirming the point. The fact is really clear: people only know the connection between **A** and $\forall$x**A** on formal structure-the latter is composed of the prefix $\forall$x and the former and the structures of ***A*** and $\forall$x are unknown. Under the circumstance, it's impossible to know whether ***A*** and $\forall$x***A*** are theorems. Objective logical law forces metalogic used when orthodox mathematical logic is developed to depend on sufficient condition (or necessarily) relation with the first independence and it is useless for the implication under its research. We also see that, the method used to set up the first independence in the metalogic of orthodox mathematical logic may not be extensional, because there are an infinite number of expressions in ***A*** and $\forall$x***A*** forms, which cannot be listed one by one. Therefore, the method used to set up the first independence can only be connotational: analyzing the necessary relation between the connotation of ***A*** and the connotation of $\forall$x***A*** in a scientific way. We call the method used to set up the first independence "scientific analyzing method of connotation". The connotation of infinite extension is finite and can be grasped and analyzed finitely; to write out the sequence ***Γ*** of expression with a finite length is to carry out the grasping and analyzing of finite connotation of the infinite extension concretely and then establish the first independence in "if ***A***, then $\forall$x***A***" while the extensions of ***A*** and $\forall$x***A*** are not involved. In "if ***A***, then $\forall$x***A***", from the perspective of both language and logic, there is no "universal quantifier" involving all extensions. From the perspective of language, there is no quantifier, which is an obvious fact; from the perspective of logic, there is no quantifier either, because the nature of each individual of infinite domain cannot be confirmed so that it is of practical significance. People with finite life and energy cannot and do not need to touch each individual of infinite domain. In fact, people may only need to grasp the finite connotation of infinite domain and use finite scientific analyzing method of connotation to establish "if, then" between infinite domains. Logically speaking, the "if, then" containing the first independence has no quantifier and needs no quantifier.

The development of science of logic introduces quantifier and the further devel-

opment of science of logic will be bound to break away from quantifiers.

Obviously, "if $\boldsymbol{A}$, then $\forall x\boldsymbol{A}$" does not only have the first independence, but also have the second independence: whether $\boldsymbol{A}$ is a theorem can be confirmed independent of whether $\forall x\boldsymbol{A}$ is a theorem. When this rule is used to get the result that $\forall x\boldsymbol{A}$ is a theorem according to the fact that A is a theorem (e. g. get the result that $\forall x(\boldsymbol{C}(x)\rightarrow\boldsymbol{C}(x))$ is a theorem according to the fact that $\boldsymbol{C}(x)\rightarrow\boldsymbol{C}(x)$ is a theorem), it is required to confirm that $\boldsymbol{A}$ is a theorem and it is unknown if $\forall x\boldsymbol{A}$ is a theorem. That is to say, for $\boldsymbol{A}$, $\forall x\boldsymbol{A}$ is a new theorem.

When developing orthodox mathematical logic, objective logical law forcibly prevents its metalogic from using implication tautology that cannot lead to a new theorem as the inference formula, regarding implication as sufficient condition, and using unenforceable extensional universal quantifiers and sets up sufficient condition relation with two independences through finite scientific analyzing method of connotation.

7. So-called "Logical Quantifier" in Mathematical Logic $\boldsymbol{F}$ System

In 1936, American mathematical logician A. Church proved the undecidable theorem concerning $\boldsymbol{F}$: there is no procedure to confirm whether any expression of $\boldsymbol{F}$ is valid (or can be proved). From now on, people commit themselves to seeking the decidable scope of $\boldsymbol{F}$. So far, the decidable scope of F has been confirmed to be very narrow. The boundary of maximum decidable range has never been confirmed. From the perspective of guiding ideology to compose $\boldsymbol{F}$, the dilemma of $\boldsymbol{F}$ may be related to "each individual" that attempts to use universal quantifiers for infinite domain: for infinite domain, the nature of each individual cannot be confirmed and there is no algorithm that may end in finite steps. The undecidable nature of $\boldsymbol{F}$ can be regarded as a punishment for over-confident people with finite life and strength who attempt to confirm the nature of each individual.

"Quantifier" here refers to a quantifier adopted as a logical word in first-order predicate calculus of orthodox mathematical logic, but not a quantifier in traditional logic or a quantifier in language. The semantics of universal quantifier $\forall x$ in $\boldsymbol{F}$ is "each individual in the domain" and the semantics of existential quantifier $\exists x$ is "there is as least one individual in the domain". For this, what we have to say is that human beings have never used such quantifiers logically when seeking the genuine knowledge of finite individual domain or infinite individual domain that cannot be listed one by one as general principles. The reason is very simple: people (certainly including mathematical logicians or mathematicians) cannot use such quantifiers logi-

cally. Such quantifiers require human beings to confirm the nature of each individual of individual domain that cannot be listed one by one. The infinite requirements on extension are beyond the finite strengths and life of human beings.

Logical semantics provides people with the logical criteria to confirm the logical true value or experiential true value of a proposition. Logical criteria that determine the true value of a proposition such as quantifier was put forward in the semantics of orthodox mathematical logic. This is the fact. However, there is another more important fact that it has never been implemented by human beings (certainly including mathematical logicians or mathematicians), because it cannot be implemented by any person. Quantifier is a logical criterion put forward by someone indeed that cannot be implemented by any one and has never been implemented.

Agnosticism is absurd. Agnostics have to admit that it is knowable that the real world is unknowable. Thus, real agnostics can only face the world and human beings in silence and even have no right to say "the world is unknowable". Agnostics can only keep silence like fish and give up the right of speech to Gnostics. Human beings have already confirmed true propositions shaping various systems, including general principles concerning the truth that individual domain cannot list one by one. This is the most important fact that acts as the evidence of discussion on related logical quantifier problems. Another important fact is as below: people have finite life and strengths and cannot confirm the nature of each individual of non-listable domain one by one. Combine the most important fact with the second important fact and determine the third important fact: human beings have never applied logical quantifiers to non-listable domain when seeking true knowledge. Of course, some people (including mathematical logicians or mathematicians) consider that people actually use logical quantifiers in the cases above. This is indeed a very important fact. Without the very important fact, we do not need to make so many statements here. The very important fact above makes us think of another equally important fact in the process of cognition of "thinking orientation" problem: in a very long historical period, people used to think that thinking is one's heart, but not one's mind. However, there is a fact that is more important than this very important fact: the thinking that thinking is in one's heart, but not one's mind actually happens in one's mind, but not one's heart. That is to say, for people who insist on that every person uses quantifiers in each occasion of seeking the general true propositions concerning non-listable domain (α), just for the person must face such non-listable domains as "person" and "occasion", when he attempts to confirm the "truth" of general propositions, he must

throw unenforceable logical quantifiers and seek other feasible logical criteria applicable to his finite strength and life. That is to say, even in the logical structure of the proposition α that firmly believes that a proposition contains logical quantifiers, there is no logical quantifier in fact.

Quantifier indeed exists in language as a word class. In order to differ from logical quantifier, we call it language quantifier. In fact, people often use language quantifiers to state a proposition that contains no logical quantifier. This is also a fact. This is only a conventional language habit. In several million years before the occurrence of science of logic, language has existed; after the occurrence of science of logic, language is still not specially serving logic. Thus, it's very common that language habit is inconsistent with logical requirements. Or, why does logic adopt artificial signs? The language quantifier in the sentence does not represent that the logical quantifier in the proposition is a representation of inconsistence between language and logic. It is unnecessary and impossible to change the language habit inconsistent with logical requirements. Taking the aforesaid sentence α for example, the word "each" that appears in the sentence is not a logical quantifier, but a language quantifier. The sentence α can synonymously be said to be "people are bound to use quantifiers when seeking general true propositions concerning non-listable domain" (α'). Nevertheless, after the change, (α') is closer to logical requirements, but for the changed sentence does not meet language habit, it seems to be "unlike a sentence". A sentence must abide by language habit and be "like a sentence". The logical structure of the proposition carried by the sentence cannot derive from the language analysis on the sentence and it is required to analyze the objective logical structure of the event denoted by the sentence. We use English in the discussion on quantifier and speak out a series of English sentences. These sentences may contain language quantifiers. We must comply with language habits. However, we can conclude: no matter whether there is a language quantifier in a sentence, the proposition carried by the sentence will contain no logical quantifier, because in the objective logical structure of objective event denoted by the sentence, there is no thing directly corresponding to "logical quantifier".

On the part of "every man will die one day" (β_1) people often say, it can have various synonymous sayings: "every person will die" (β_2), "man must die one day" (β_3), and "if an individual is a person, then the individual will die one day" (β_4), and so on. Taking "object" as the domain (represented by "U"), "man" (represented by "s") and "die" (represented by "p") are two unary nouns on the domain

and all these cannot be listed one by one. Thus, represented by a symbolic expression, the logical structure of the proposition carried by such synonymous sentences as β_1, β_2, β_3, β_4 is as below:

$$s(x) \rightharpoonup p(x) \qquad (\beta)$$

There is no such thing as "logical quantifier" in the logical structure β of the proposition. The proposition β involves non-listable domain. However, the truth of β can be confirmed by scientific analyzing of connotation of s and p, i. e. from the perspective of means, it can be confirmed finitely. That is to say, just for there is no such thing as quantifier in the proposition β, people can finitely confirm that β is true in the condition that there are more and more people on the earth. The proposition β can be stated by sentences β_1 and β_2 and when it is included in ***F*** that adopts logical quantifiers, see the following:

$$\forall x(s(x) \rightarrow p(x)) \qquad (\beta')$$

The logical semantics of β' is "for each individual in the domain object, at least one of the two below exists: the individual is not a person and the individual will die one day." (β_5). Because: $\forall x(s(x) \rightarrow p(x))$ identically equal to $\forall x(\neg s(x) \vee p(x))$.

The logical meaning of sentence β_5 is greatly different from β_1, β_2, β_3 and β_4: there is no "logical quantifier" or "real implication" in the logical meanings of β_1, β_2, β_3 and β_4, and then the existence of the proposition β carried by them can be confirmed finitely; there are "logical quantifier" and "real implication" in the logical meaning of β_5, and then the existence of the proposition β' carried by it cannot be confirmed finitely. Only in the following condition, the truth of proposition β' can be confirmed: there is no living person in the world any longer, so there is no living person who can confirm the truth of β'. Normal and sane people may not make the proposition β' that can be confirmed to exist in the condition where there is no living person to confirm the existence of the proposition after all the people die. The change from β to β' can be called the distortion of logical semantics. Scholars who created and developed orthodox mathematical logic just used the distortion of logical semantics to solve meta-mathematics problems (at the beginning, in the period of Boole and Frege, they were not so clear-headed and self-conscious, but later, in the period of Russell, Hilbert and Godel, they were more clear-headed and self-conscious). Perhaps, in order to solve metatheory problems, human beings have to spend the heavy cost of distortion of semantics. Nevertheless, it's the time to solve metatheory problems by adopting the method with few and even no distortion of semantics.

8. Extensional Proposition and Connotational Proposition

We divide compound proposition area into extensional propositions and connotational propositions.

8.1 Extensional Proposition

Suppose that there is a set $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_m\}$, m is a confirmed natural number above 0 and e_1, e_2, $\cdots$, e_m can be listed one by one. If what the proposition **A** thinks is that all individuals in the set S have property *p* or at least one individual in the set has property p, ***A*** is called extensional proposition. Extensional propositions include extensional conjunction propositions and extensional disjunction propositions.

8.1.1 Extensional Conjunction Proposition

Extensional conjunction proposition thinks that all listable individuals in the set S have property p. For instance, the proposition expressed by the sentence below is an extensional conjunction proposition.

1) All novels of Lu Xun do not exceed 30 000 characters.

Example 1) thinks that every novel in the set (Lu Xun's novels) has the property that it does not exceed 30 000 characters. That is to say, example 1) thinks about the conjunction of the first novel not exceeding 30 000 characters, the second novel not exceeding 30 000 characters, $\cdots$, the m^{th} novel not exceeding 30 000 characters among Lu Xun's novels.

The logical expression of extensional conjunction proposition is:

$$p(e_1) \wedge p(e_2) \wedge \cdots \wedge p(e_i) \wedge \cdots \wedge p(e_m)$$

8.1.2 Extensional Disjunction Proposition

Extensional disjunction proposition thinks that at least one of listable individuals in set *S* has the property *p*. For instance, the proposition expressed by the sentence below is an extensional disjunction proposition:

2) Some people present are unable to operate computers.

Example 2) thinks that at least one individual in the set (people present) is unable to operate a computer. That is to say, example 2) thinks about the disjunction of the first unable to operate a computer, the second unable to operate a computer, $\cdots$, the m^{th} unable to operate a computer among all people present.

The logical expression of extensional disjunction proposition is as below:

$$p(e_1) \vee p(e_2) \vee \cdots \vee p(e_i) \vee \cdots \vee p(e_m)$$

As we know, to confirm that the conjunction proposition is true, it is required to

confirm that each conjunct is true one by one; to confirm that the disjunction proposition is false, it is required to confirm that each disjunction proposition is false, it is required to confirm that each disjunct is false. Thus, extensional proposition just thinks about the finite set in which all individuals can be listed one by one. The proposition that thinks about the finite set, infinite set or empty set in which all individuals cannot be listed on by one is not an extensional proposition, but a connotational proposition.

8.2 Connotational Proposition

Suppose that S is a finite set, infinite set or empty set in which all elements cannot be listed one by one, if the proposition **A** thinks that individuals in set *S* have property *p* and must have property *q* or have property *p* and may not be without property *q*, **A** will be called a connotational proposition. Connotational propositions include connotational sufficient condition propositions and connotational possible proposition.

8.2.1 Connotational Sufficient Condition Proposition

Connotational sufficient condition proposition thinks that the individuals that cannot be listed one by one in the finite set, infinite set or empty set *S* have property *p* and must have property *q*. For instance, the propositions expressed by the sentences below are connotational sufficient condition propositions:

3) All plants have their lives.

4) All solvers of Goldbach conjectures are mathematicians.

Example 3) thinks that all individuals in the set (objects) have the property of plant and must have the property of life. Example 4) thinks that the individuals in the set (solvers of Goldbach conjectures) with the property that they can solve Goldbach conjectures must have the property of mathematician. That is to say, example 3) thinks that, if an object is a plant, it will necessarily be living. Example 4) thinks that, if x is a solver of Goldbach conjectures, x will necessarily be a mathematician.

The logical expression of connotational sufficient condition proposition is as below:

$$p(x) \rightharpoonup q(x)$$

It is read as "if x is p, then x is q".

8.2.2 Connotational Possible Proposition

Connotational possible proposition thinks that the individuals that cannot be listed one by one in the finite set, infinite set or empty set *S* have property *p* and may

not be without property q. For instance, the propositions expressed by the sentences below are connotational possible propositions:

5) The solvers of Goldbach conjectures may be Chinese.

6) Some crows are white.

Example 5) thinks that the individuals in the set (solvers of Goldbach conjectures) have the property that they can solve Goldbach conjectures and may not be without property of Chinese. Example 6) thinks that the individuals in the set (birds) have the property of crow and may not be without property of white feather. .

The logical expression of connotational possible proposition is as below:

$$p(x)!\ q(x)$$

It is read as "the proposition that x is p approximates the proposition that x is q" and "x is p may result in x is q".

Connotational proposition thinks that each individual in a finite set, infinite set or empty set in which individuals cannot be listed one by one has property p and must have property q or has property p and may not be without property q. Thus, it is impossible to confirm the truth and falsity of connotational proposition by extensional listing one by one and the truth and falsity of connotational proposition can only be confirmed through scientific analysis of connotation. This is the basic difference between connotational propositions and extensional propositions.

In the process of our discussion above, it is unavoidable to criticize traditional formal logic and orthodox mathematical logic. People who are genuinely passionate about traditional formal logic and orthodox mathematical logic may not mistake operating scalpels for lethal weapons.

附　录　B

Contemporary Formal Logic Symbol System Can Logically Represent All Knowledge

written by Gong Qirong
(North region of Guizhou University , Guiyang huaxi 550025, P. R. China)
E-mail:gongmuwen@163. com

（本文系在《符号逻辑杂志》(美国,1992 年第 1 期第 57 卷)上发表的论文基础上深入研究所得到的结果）

The formal system of othodox mathematical logic and assorted non-classical mathematical logics have their disadvantages and serious semantic aberration; the leading thought of traditional formal logic is profound and correct, but its calculus technique is old and simple and the capacity of inference and expression are limited. So, both of them cannot be the logical tool of knowledge expression of artificial intelligence. Whereas, the formal system of contemporary formal logic carried forward the profound and correct leading thought of traditional formal logic, got over the disadvantages of assorted mathematical logics and traditional formal logic, and it has strong and rich expression capacity. So, contemporary formal logic is the best logic tool of knowledge expression of artificial intelligence.

1. Elicitative information is exactly the two independences existing in the sufficient condition relation, and material implication has not elicitative information

People have long been treating symbol system F of orthodox first-order predicate calculus as the means of knowledge representation in artificial intelligence. The faults of this instrument in knowledge representation have been felt by people more and more distinctly.

One of the vital components of production system, which is a basic form of today's expert systems, is its production rules. The production rules usually adopt the form of "if…then…" to state the relevant knowledge summed up by human experts. Between the antecedent and consequent of the "if…then…" in such rules, there is a

type of information known as "elicitative information". Such elicitative information is sure to satisfy the sufficient condition relation (this is, of course, acknowledged by human experts in the process of intensional scientific studies). The relation between the rule expressed by "if…then…" and its antecedent and consequent is not any truth function relations, but an intension sufficient condition relation of non-pure truth value. Therefore it is essentially a type of intension controlling information.

At present, the production rules are usually expressed with symbol system $\boldsymbol{F}$ of orthodox first-order predicate calculus as the means of their formalication. According to this, a production rule should be correspondant with an implication form $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ in $\boldsymbol{F}$. Nevertheless, as we have mentioned above, the truth value of the $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ in $\boldsymbol{F}$ is the truth function of the truth values of its antecedent and consequent. It is entirely different from the elicitative information which satisfies the sufficient condition relations. Therefore, orthodox first-order predicate calculus $\boldsymbol{F}$ is not competent in describing truthfully the elicitative information of non-pure truth value which satisfies the sufficient condition relations. No wonder many difficulties should have emerged in attempts to use it as means for expressing production rules.

As we know, there is in symbol system $\boldsymbol{F}$ of orthodox first-order predicate calculus the theorem as

$$\vdash (\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}) \qquad (\alpha)$$

However, when $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ is true, the sufficient condition relation may not necessarily be satisfied between **A** and **B**. That is to say, there is not necessarily intension controlling information between **A** and **B**. For example, let **A** mean "the earth is destroyed" and **B** mean "the earth is round." Then "the earth is not destroyed or the earth is round ($\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$)" is true. However there is no intension controlling information between "the earth is destroyed" (**A**) and "the earth is round" (**B**), that is, "if the earth is destroyed, then the earth is round" is false. Another example, let **A** mean "the earth is destroyed" and **B** mean "the earth exists". Then if "the earth is not destroyed, or the earth exists ($\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$)" is true, there is no intension controlling information between "the earth is destroyed(**A**)" and "the earth exists(**B**)." That is to say, "if the earth is destroyed, then the earth exists" is false. What is strange, however, is that here between "the earth is destroyed(**A**)" and "the earth does not exist($\neg\mathbf{B}$)" there is intension controlling information. We can then see that "if $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ then $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$", which is correspondant with the theorem α, is not a rule. In some production systems, $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$ is unobtainable from $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$. That is the reason why some designers of expert systems were forced to expel "if $\neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$, then

A→**B**" from the rules. There is no intension controlling information (i. e. elicitative information) between "not **A**, or, **B**" and "if **A**, then **B**". It is exactly because of this that designers of expert systems have to be very careful in selecting formal theorems from ***F*** as the manifestation forms of the rules. Up to now, however, designers have not yet found any strict criterion about how to select formal theorems in ***F***.

In the implication relation of pure truth value in symbol system ***F*** of orthodox first-order predicate calculus which is used as the instrument of formal konwledge representation there is no elicitative information, but the production rules in expert systems have to take into consideration the elicitative information between the antecedent and consequent of "if…then…". Because of this, the elicitative information which is treated as intension controlling information is sometimes called "extra-logical" controlling information. Here the "logic" in "extra-logical" is orthodox mathematical logic. Orthodox mathematical logic is discrete foundamental mathematics. Therefore, the so-called "extra-logical" means to go beyond the range of discrete foundamental mathematics. Such "extra-logical" problems about elicitative information are in essence real logical problems. This real logic is contemporary formal logic symbol system, because the sufficient condition relation in symbol system of contemporary formal logic symbol system is the sufficient condition relation described distinctly. The relation between the antecedent and consequent of the "if…then…" of a production rule is a sufficient condition relation.

The "elicitative information" (or "intension controlling information") which was not clearly explained in the past has its explanataion provided in contemporary formal logic symbol system today. Elicitative information (or intension controlling information) is exactly the two independences existing in the sufficient condition relation, i. e. sufficient condition relation. The determination of the truth of a production rule which is expressed with "if…then…" and which is independent of the antecedent and consequent cannot be the case in which the antecedent is true whereas the consequent is false. The truth of the antecedent is independent of the determination of the truth of the consequent.

2. Two questions on symbol system of orthodox first-order predicate calculus of mathematical logic

Now it is time for the following two questions to be raised:

(1) Which theorems in symbol system ***F*** of orthodox first-oredicate predicate

calculus can be rules in expert systems?

(2) Are there any other practiceable valid rules besides those found in ***F***?

It has already been proved that, formally, when the "sufficient condition" and "necessity" in notional calculus symbol system ***Cn*** in contemporary formal logic symbol system correspond respectively with the "implication" and "for every" in symbol system ***F*** of orthodox first-order predicate calculus, the relation between ***Cn*** and ***F*** is an overlapping one. Each includes only the true part of the other. They share some common theorems (though they are interpreted entirely differently in the two systems). At the same time each has its own theorems that are not to be found in the other.

The correspondance relation between ***Cn*** and ***F*** should be established in order to make a pure syntactical comparison of ***Cn*** and ***F***.

Cn	***F***
$\rightharpoonup$	$\rightarrow$
$U(x)\rightharpoonup$	$\forall x$
$U(x)!$	$\exists x$

We shouldn't forget the difference of semantics in principle when we make a pure syntactical comparison of ***Cn*** and ***F***.

Cn		***F***	
Formula	meaning	Formula	meaning
$\mathbf{A}(x)\rightharpoonup\mathbf{B}(x)$	if **A**, then **B**; **x** satisfying **A** is sufficient condition of x satisfying **B**.	$\mathbf{A}(x)\rightarrow\mathbf{B}(x)$	**x** satisfies **A**, or, **x** satisfies **B**.
$U(x)\rightharpoonup\mathbf{A}$	Necessity **A**; in the universe discourse of U, **x** is sufficient condition of x satisfying **A**.	$\forall x\mathbf{A}$	For every **x** in the universe discourse, x satisfies **A**.
$U(x)!\ \mathbf{A}$	Possibility **A**; in the universe discourse of U, **x** is not sufficient condition of x not satisfying **A**.	$\exists x\mathbf{A}$	At least one **x** makes **x** satisfies **A** in the university of discourse.

The semantics between ***F*** and ***Cn*** is completely different. The semantics of ***F*** has serious distortion. Some people thougt ***F*** is useful because they don't know they have changed the semantics of ***F*** unconsiciously.

There are some corresponding form theorems, which are tenable in ***F*** and ***Cn***.

No.	*Cn*	*F*
1	$\vdash (U(x) \rightharpoonup A) \rightharpoonup A$	$\vdash \forall x\, A \rightarrow A$
2	$\vdash A \rightharpoonup U(x)!\ A$	$\vdash A \rightarrow \exists x A$
3	$\vdash (U(x) \rightharpoonup A \rightharpoonup B) \rightharpoonup (U(x) \rightharpoonup A) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup B$	$\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \forall x A \rightarrow \forall x B$
4	$\vdash (U(x) \rightharpoonup A \rightharpoonup B) \rightharpoonup U(x)!\ A \rightharpoonup U(x)!\ B$	$\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \exists x A \rightarrow \exists x B$
5	$\vdash (U(x) \rightharpoonup U(y) \rightharpoonup A \rightleftharpoons U(y) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup A$	$\vdash \forall x \forall y\, A \leftrightarrow \forall y \forall x A$
6	$\vdash U(x)!\ U(y)!\ A \rightleftharpoons U(y)!\ U(x)!\ A$	$\vdash \exists x \exists y\, A \leftrightarrow \exists y \exists x A$

It answered the first question mentioned above. According to the pure syntactical correspondence relation between ***Cn*** and F, if a theorem in *F* is also a theorem in ***Cn*** after being translated into the ***Cn*** form, then this theorem in ***F*** can be a rule in the expert system.

The right-hand implication paradoxes of symbol system of first-order predicate calculus are theorems in ***F***; and the left-hand formula that are called paradox formula or containing paradox formula have been cleared out from ***Cn***.

No.	*Cn*	*F*
7	$\dashv U(x) \rightharpoonup A \wedge \neg A \rightharpoonup B$	$\vdash \forall x(A \wedge \neg A \rightarrow B)$
8	$\dashv (U(x) \rightharpoonup A) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup B \rightharpoonup A$	$\vdash \forall x A \rightarrow \forall x(B \rightarrow A)$
9	$\dashv U(x) \rightharpoonup A \rightharpoonup B \wedge \neg B$	$\vdash \forall x(A \rightarrow B \vee \neg B)$
10	$\dashv U(x) \rightharpoonup (A \rightharpoonup B) \vee (B \rightharpoonup A)$	$\vdash \forall x[(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)]$
11	$\dashv U(x) \rightharpoonup A \rightharpoonup B \wedge \neg B \rightharpoonup C$	$\vdash \forall x(A \rightarrow B \wedge \neg B \rightarrow C)$
12	$\dashv U(x) \rightharpoonup A \rightharpoonup B \rightharpoonup C \vee \neg C$	$\vdash \forall x(A \rightarrow B \rightarrow C \vee \neg C)$

The above examples in ***F*** can not be rules in expert systems .

Next we give the examples of the second question mentioned above.

No.	*Cn*	*F*
13	$\vdash (A \rightharpoonup B) \rightharpoonup (U(x) \rightharpoonup A) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup B$	$\dashv (A \rightarrow B) \rightarrow \forall x A \rightarrow \forall x B$
14	$\vdash (A\ B \rightharpoonup C) \rightharpoonup U(x) \rightharpoonup A)(U(x) \rightharpoonup B) \rightharpoonup (U(x) \rightharpoonup C$	$\dashv (AB \rightarrow C) \rightarrow \forall x A \forall x B \rightarrow \forall x C$
15	$\vdash (A \rightharpoonup B) \rightharpoonup U(x)!\ A?\ U(x)!\ B$	$\dashv (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x A \rightarrow \exists x B$
16	$\vdash (A \rightharpoonup BC) \rightharpoonup (U(x)!\ A \rightharpoonup (U(x)!\ B)(U(x)!\ C)$	$\dashv (A \rightarrow BC) \rightarrow \exists x A \rightarrow \exists x B \exists x C$

The left theorems in ***Cn*** can be rules in expert systems, but it is strange that in ***F*** the syntactically corresponding forms of these theorems in ***Cn*** are not theorems anyway. Besides the theorems in ***F***, there are infinite practiceable(i. e. having intension controlling information) and valid rules.

It can be seen then that contemporary formal logic symbol system has a richer and more accurate expression ability than orthodox mathematical logic symbol system.

3. Symbol system of non-classical mathematical logic of all shades and traditional formal logic have abuses.

Mathematical logician C. L. Lewis didn't satisfy G. Frege and B. Russell's material implication, and he thought material implication caused uncountable implication paradoxes. For example:

(1) $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;

(2) $\neg \mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$;

(3) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;

(4) $(\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$。

etc C. L. Lewis raised strict implication and constructed the strict implication system in model logic with orthodox mathematical logic symbol system methods and with strict implication as its starting point. The strict implication avoided such material implication paradoxes as the above examples, but it has brought about strict strict implication paradoxes in itself. The famous strict implication paradoxes are:

(1) $\Box \mathbf{A} \prec (\mathbf{B} \prec \mathbf{A})$;

(2) $\neg \Diamond \mathbf{A} \prec (\mathbf{A} \prec \mathbf{B})$;

(3) $(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}) \prec \mathbf{B}$;

(4) $\mathbf{B} \prec (\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A})$。

Model logic symbol system of all shades groundlessly treats "necessity" and "probability" as monadic modalities, and by throwing itself deeply into the arms of truth functions, it has become a particular truth function itself. Therefore, its results are just as odd as is the case with firstorder predicate logic. Model logic symbol system acknowledges material implication, acknowledges and introduces into itself the so-called "logical quantifiers" (which are the two mortal wounds of first-order predicate calculus $\boldsymbol{F}$), and forms various kinds of model predicate calculus, i. e. $\boldsymbol{QTB}$, $\boldsymbol{QS}_4\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{QT}$, $\boldsymbol{QS}_5$, etc. That's why it cannot escape the traps of "quantifiers". Just like orthodox mathematics, model logic runs counter to the reality of ordinary logical thinking of human beings. It must appear lots of troubles if they could be the instrument of expressing knowledge.

Thirty years ago, mathematical logician G. H. Von Wright and W. Acdermann criticized material implication and strict implication, raised relevance. The relevance logic symbol system $\boldsymbol{R}$ and entailment implication logic symbol system $\boldsymbol{E}$ constructed by logicians A. R.. Anderson and N. D. Jr. Belnap from relevance implication and truth connectives and from relevance logic symbol system in combination with model

logic respectively, are a fairly new and independent branch in mathematical logic symbol system which is in essence basic mathematics. Though they "might influence the research of mathematical foundation", they nevertheless face at least the following difficulties: ① they are based on truth function relations and acknowledge material implication; ② they mistake "necessity" and "probability" as monadic modalities and acknowledge the so-called model logic; ③ they are trapped by quantifiers and mistake linguistic quantifiers as the so-called "logical quantifiers", thus resulting in the establishment of the relevance predicate calculus symbol system *RQ* with quantifiers and the entailment implication predicate calculus symbol system *EQ*. Therefore they are in essence "a substitute for classical logic symbol system." They, too, run counter to the reality of ordinary logical thinking of human beings and cannot be correct reasoning theories. Subsequently they cannot be the logical instrument of expressing knowledge.

4. Only contemporary formal logic symbol system can logically represents all knowledge

Contemporary formal logic symbol system adhered to the correct and profound guiding principles of traditional formal logic; it fully inherited the long-standing achievements of traditional formal logic, drew lessons from the mathematical methods of orthodox mathematical logic which are effective means toward clarity and strictness; thus it has eliminated the historical fog over traditional formal logic, done away with the various age-old malpractices which can still be found in some popular books on traditional formal logic, explored some new logical thought and logical theorems fit for contemporary scientific developments. It has brought about the modernization of traditional formal logic. So far, contemporary formal logic symbol system is the only logic that has explicitly described the sufficient condition relations as they actually are. The sufficient condition relation, the connection relation in contemporary formal logic symbol system, is in fact the sufficient condition relation described explicitly. Sufficient condition relation is not a variation of any implication relation. It is quite different from material implication, strict implication, correlation implication and entailment implication. As a matter of fact, it forms the theoretical core of a reasoning pattern by which people can acquire new information with the help of ordinary logical thinking without falling into circular argument.

Contemporary formal logic symbol system does not employ quantifiers. The universal quantifiers "for every" ($\forall$) in previous predicate calculus symbol system is

only a linguistic quantifier sometimes occurring in language, and not the so-called "logical quantifier". Involving domain of individuals that cannot be given out one by one, although linguistic quantifiers are sometimes appealed to in linguistic sentences which are the carriers of language, in the logical structures of the propositions carried by linguistic sentences or of the objective events indicated by linguistic sentences there are not at all any "logical quantifiers" which requires people enumerate "every" individual and to determine what each of them are and what characteristics each possesses one by one. As Logician Shen Youding pointed out, contemporary formal logic symbol system does not employ any quantifiers. "It is free from any trouble that is unavoidable in formal systems which involve quantifiers", "what is more, it turns out to be even closer to the reality of ordinary logical thinking than if quantifiers are introduced into the system".

Contemporary formal logic symbol system does not recognize the so-called "model logic symbol system" is a real logic symbol system. According to contemporary formal logic symbol system, "if **A**, then **B**" is synonymous with "**A** necessarily **B**", "**A** sufficient condition **B**" is exactly "**A** necessarily **B**". Their expression forms are $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$. The necessity relation is a binary non-pure truth values connection relation. It has the first independence, and sometimes both of the two independences. According to this, we can define "**A** probably **B** (symbolized as $\mathbf{A}!\ \mathbf{B}$)", "**A** occasionally **B** (symbolized as $\mathbf{A}\mathrm{O}\mathbf{B}$)", "**A** wind-horse-cow **B** (i. e. "**A** totally occasionally **B**", symbolized as $\mathbf{A}\mathrm{F}\mathbf{B}$)" as follows:

(1) $\mathbf{A}!\ \mathbf{B} = \mathrm{df} \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B} = \mathrm{df} \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}) \wedge \neg(\mathbf{A} \rightharpoonup \neg \mathbf{B})$

(3) $\mathbf{A}\ \mathrm{F}\ \mathbf{B} = \mathrm{df}\ \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{A}\ \mathrm{O}\ \mathbf{B}$

!, O, and F are also binary non-pure truth value connection relations. Description of the connection relation in the objective world like this is in accordance with objective facts, and therefore in accordance with the reality of ordinary logical thinking of human beings. It is in agreement with the "necessity", "probability", "occasionality" in traditional formal logic.

Contemporary formal logic symbol system established the propositional calculus system ***Cm***, the notional calculus system ***Cn*** and the notional calculus system with equivalence terms ***Cnd***; Contemporary formal logic symbol system has put an end to the problem of paradoxes which has hither-to trapped mathematics in the so-called "third crisis"; Contemporary formal logic symbol system got rid of all paradox formula, material implication paradoxes and paradoxes such as $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ that model system

can't avoid; the problem has been solved in a definite and reasonable way. Thus a series of difficulties which have remained unsolved for a long time in the history of the science of logic have been overcome; it has succeeded in definiting a series of terms in dialectical logic in a quantificationally clear manner, thus realizing the formalization of dialectical propositions.

In a word, contemporary formal logic symbol system is a correct reasoning theory we have seen. It is an excellent logical instrument for people to acquire new information from the previously known. Compared with traditional mathematical logic symbol system, non-classical mathematical logic symbol system of all shades and traditional formal logic symbol system, contemporary formal logic symbol system has stronger, richer and more accurate expressing ability. Theoretically, it can logically represent all knowledge.

参考文献

［1］ 林邦瑾．制约逻辑(M)．贵阳:贵州人民出版社,1985.

［2］ 林邦瑾,龚启荣,等．制约逻辑导论(M)．贵阳:贵州人民出版社,1990.

［3］ 龚启荣．当代形式逻辑引论(M)．北京:电子工业出版社,2009.

［4］ 龚启荣．形式逻辑导引(M)．贵阳:贵州人民出版社,1995.

［5］ 龚启荣．逻辑斯谛——又称“数理逻辑”的二值数学(M)．贵阳:贵州教育出版社,1998.

［6］ 龚启荣．当代形式逻辑基础(M)．贵阳:贵州教育出版社,2006.

［7］ 龚启荣．形式逻辑客体说导论(M)．香港:天马出版有限公司,2008.

［8］ 约翰·塞尔(John Searle)．心、脑与科学(M)．上海:上海译文出版社,2006.

［9］ 林邦瑾．The Motivation of Constructing Entailment Logic(J)．第八届国际逻辑、科学哲学和科学方法讨论会论文集,莫斯科科学出版社,1987.

［10］ 龚启荣．Entailment Logic And Knowledge Representation(J)．符号逻辑杂志,美国,1992,57(1).

［11］ 龚启荣．Orthodox Mathematical Logic is Not a Reasoning Theory(J)．符号逻辑会刊,美国,2007,13(3).

［12］ Jiang Xuefeng. Dynamically Updating UIDB to Implement Personalized Service(J)．Kybernetes,2004,33(2).

［13］ Jiang Xuefeng. Combination of ER And UML For Advanced IS Conceptual Design(J), Advances in Systems Science and Application, 2007,7(1).

后　记

本著作是龚启荣教授主持的教育部立项项目“当代形式逻辑及其在人工智能中的应用理论研究”(项目批准号:07JA720006)的最终成果。项目的中期成果《当代形式逻辑引论》(电子工业出版社 2009 年出版)系项目的基础部分。

本项目的研究,追溯起来,早在 20 世纪 80 年代就已经开始了。本书第 19 章　关于 ***Cn*** 系统的讨论(三)——***Cn*** 的无限风光:更精彩的形式定理”中的几十个定理,龚启荣教授在 1991 年就已经证明了。由龚启荣独立完成的当代形式逻辑在人工智能中的应用理论研究项目(在国内外共发表 7 篇论文),1989 年就通过了贵州省科学技术委员会组织的国内同行专家鉴定,并进行了国际联机查新检索,鉴定结论认为,一些成果居国际先进水平。获贵州省科技进步奖。

在本项目的中期成果《当代形式逻辑引论》即将出版之际,经过课题组认真准备,2008 年 12 月 17 日,由项目主持人龚启荣教授主持,在贵阳市风景秀丽的“高原明珠”花溪河畔召开了本著作撰稿会议。贵州逻辑界、人工智能界杨黔福、曾庆华、褚智萍、高东昇、蒋学锋教授, 贵州人民武装学院两位讲师吴春红(硕士)、张延伍(硕士)和贵州大学逻辑学专业 05 级硕士研究生叶森等课题组成员出席了撰稿会议。龚启荣在会上重申了申报本项目时讨论过的下述几个问题:

(1) 撰写本书的哲学指导思想是坚定而彻底的辩证唯物论。一定要“外师造化,中得心源”(唐 · 张璪《绘境》),“从无字句处读书”(周恩来《自勉联》);坚决杜绝那种“一犬吠形,百犬吠声”(汉 · 王符《潜夫论 · 贤难》)、层层抄袭的不良作风! 要求完成后著作的整个体系从头至尾与唯心论的东西完全排斥。辩证唯物论的指导思想在著作中体现出来是坚定的、彻底的。

(2) 从逻辑哲学学术上说,我们是坚定的逻辑一元论者。我们坚信,逻辑必须对所有论域一概地正确,只存在一种唯一正确的逻辑。提出并对当代形式逻辑进行研究的目的正是为了探索、寻找这种唯一的逻辑。从贵州省逻辑学学术社团等组织和作为社会的成员、学校的教师来说,我们又是多元论者,赞成和拥护党的“百花齐放、百家争鸣”的方针。

(3) 撰写本书的逻辑主导思想是:继承并发展传统形式逻辑自发的逻辑客体说倾向,弘扬自觉而系统的逻辑客体说理论;继承并发展传统形式逻辑关于推理能够从已有知识获取新知识、论证不许循环等等深刻正确的主导思想及其久盛不衰的理论成果。

（4）展开形式系统，以及对形式系统的研究、讨论，必须始终想到形式系统的语义，看准形式系统所指谓的客观世界的客观对象，客观地、实事求是地进行分析，得出的分析结果一定要符合客观实际，一定要属实。

龚启荣教授语重心长地说，希望我们齐心协力，刻苦钻研，致力于形式逻辑当代发展及其在人工智能中的应用理论研究，为我们中华民族作一点力所能及的贡献。

龚启荣教授最后在会上详细阐述了本著作的撰写提纲。

会议一致通过，请北京市五一劳动奖章获得者、北京市先进科技工作者、逻辑学家林邦瑾教授为本书作序。

为了使著作前后风格统一，主要采取一人执笔、集体讨论的形式进行撰写。除了由于居住地的原因，"第23章　当代形式逻辑在人工智能中又一应用理论研究"由蒋学锋教授执笔撰写，"21.7 必然门原理研究"、"21.8 内涵智能机（1）"、"21.9 内涵智能机（2）"、"21.10 内涵智能机（3）"等4节由高东昇教授执笔撰写外，其他部分由龚启荣教授执笔撰写。我们集体讨论过多次，课题组成员提出了许多珍贵意见。鉴于课题组成员和谐相处了几十年，风格高、姿态高，因此每次讨论都呈现出热烈的、友好的气氛。著作是在边撰写边讨论边修改的若干循环往返过程中完成的。可以说，这本著作是一本充满着和谐氛围、凝聚着高风格高姿态的著作。希望本著作出版后得到读者的喜欢！更希望得到国家，得到社会高风格高姿态的应有重视！

本著作在学术上有区别于逻辑思维说和逻辑符号说论著的一系列创新点。其中最为显著的当举：

其一，本著作有自觉的逻辑客体说思想。课题组经过几十年的研究，得出了与逻辑思维说（认为逻辑研究的是人的思维）、逻辑符号说（认为逻辑研究的是符号）并列为世界三大学派之一的逻辑客体说理论。逻辑科学，西方从亚里士多德开始，中国从墨子、韩非子开始，至今，事实上始终研究的是客观世界的逻辑结构和逻辑规律。本书中所讨论的概念（及其符号）、命题（及其式）、逻辑定理（及其表达式——含推理式、导出式、重言式等有效式）就是人对客观世界的对象、事件、逻辑规律的反映（和刻画）。就象化学概念、化学定理是人对客观世界的化学对象（如元素、分子），化学规律（如化学反应规律）的反映一样。化学在事实上研究的是客观世界的化学结构和化学规律。同样，逻辑学在事实上研究的是客观世界的逻辑结构和逻辑规律。逻辑学从它诞生之日起就没有研究过也没有能力研究人的思维的形式结构和思维的规律。迄今为止，人类对自己的思维几乎一无所知！说亚里士多德逻辑是研究思维的，这是后人强加给先贤亚里士多德的不实之词。亚里士多德连思维是在什么地方进行的都不知道，怎么可能研究思维的形式结构和思维的规律？！

其二,本著作将非纯真值的联结关系和纯真值的联结关系严格区分开,进而将非纯真值的有效命题和纯真值的有效命题(重言命题)严格区分开,并进一步将能从已有知识获取新知识的推理和不能从已有知识获取新知识但仍然有效的导出严格区分开,从而进一步证明当代形式逻辑是人类认识客观世界、改造客观世界的有效工具。

其三,两个形式系统 ***Cm*** 系统和 ***Cn*** 系统是逻辑的而不是数学的形式化公理系统。在讨论这两个形式系统的基础上,进一步深入地研究并证明了两个系统的一系列特色。在阐述作为逻辑词(2 元联结词)的“必然”、“可能”、“偶然”、“风马牛”逻辑性质的基础上,又进一步提出并证明了 42 个更精彩的、崭新的形式定理,计近百个推理,展现了两个系统的无限风光、无限前景。最后还得出钢铁般的结论:企图用数理逻辑“改造”或“取代”传统形式逻辑是一种常识性错误。

其四,本课题最突出的应用——对国家,对民族最有意义的应用,就是在人工智能上的应用。本项目在人工智能中的应用理论完全不同于以美国为代表的国际人工智能理论,其前景是不可估量的。关于在人工智能中的应用研究,著作提出并回答了一系列属于人工智能的逻辑理论的重大问题;指出了人工智能的根本使命;完成了古典逻辑和形形色色非古典逻辑,以及传统形式逻辑不能作为人工智能的逻辑理论基础的论证;充分证明了,当代形式逻辑向人类提供了从已知获取新知的推理工具,因而是人工智能最合适的逻辑工具。当代形式逻辑清楚地刻划了必然门的逻辑性质,为研制必然门从而进一步设计、制造内涵智能机提供了重要逻辑理论基础。严格地证明并严肃地指出,从 1956 年在英国召开的“达特茅斯(Dartmouth)人工智能夏季研究会”上提出“人工智能”以来,在半个世纪内国际上先后出现的“认知模拟”、“人机合一”都不是真正的“人工智能”正确的指导方针。呼吁,记取由于武器(杀人的工具)的一代之差(第二代冷武器对第三代热武器),几千名英法联军直捣京师,火烧圆明园的历史教训,排除干扰,当机立断,对内涵智能机迅速投入力量付诸工程实施。我们竭诚祈愿首先由中国人研制出第一台内涵智能机。为实现此目标,我们愿与有志于此的中国人齐心合力,共同奋斗。

其五,在研究和撰稿过程中,我们坚持了逻辑学的科学性。鉴于正统数理逻辑研究的是纯真值的真值函数和个体-真值函数,它是数学,是离散的基础数学;所谓蕴涵重言式就是同语反复。逻辑科学研究以充分条件关系为核心的非纯真值联结关系构成的能从已知获取新知的推理。纯真值的真值函数和个体-真值函数关系只是逻辑研究的次要的辅助的对象。正统数理逻辑与真正意义上的逻辑科学在主导思想上南辕北辙,形同冰碳。因此我们不赞成用数理逻辑“改造”传统形式逻辑的作法,更不接受用数理逻辑“取代”传统形式逻辑的做法。在研究过程中,始终注意立足于辩证唯物论,坚持作为真正逻辑科学的传统形式逻辑深刻正确的主导思想,充分继承其久盛不衰的理论成果,摒弃还留存于

当今一些流行的传统形式逻辑读物中种种陈陈相袭的历史缺陷,排除蕴涵怪论,尽力使之成为名副其实的逻辑真理的科学,以避免谬种流传,贻误青年,贻误读者——真正努力做到"以其昭昭使人昭昭"(《孟子·尽心下》)。著作还将非纯真值的尽举选择命题和纯真值的析取命题严格区分开,并将其三分为尽举相容的、尽举反相容的和尽举不相容的三种,进而刻划其逻辑性质,讨论三种不同的而客观上确实存在的尽举选择推理。

上述特点明显地区别于国内外其它逻辑论著。

在撰写过程中,同时注意了科学性与思想性的自然结合,以增强著作的可读性。

全书由龚启荣教授统稿。

自2006年以来,在贵州省科学技术协会、贵州省社会科学联合会的领导和关怀下,贵州省逻辑界的专家学者团结一致,推举龚启荣教授主持召开了三次(每年一次)全国性逻辑系统专题研讨会,2009年又主持召开了作为贵州省社会科学联合会2009学术年会分会场的"实践科学发展观 发展客体逻辑学"高层次专题研讨会,广泛深入地交流了各方面的学术成果。龚启荣先后在四次会议开幕式上作了题为《当代形式逻辑在人工智能中的应用理论研究》、《当代形式逻辑对逻辑科学的发展》、《当代形式逻辑与数理逻辑比较研究》、《从对悖论的剖析看客体逻辑学对逻辑科学当代发展的贡献》等会议主题发言。2008年、2009年,龚启荣教授先后应邀到河南大学、湘潭大学主持2008届、2009届逻辑学专业研究生毕业论文答辩,同两所大学的逻辑专家进行学术交流并作了学术报告。这一系列学术交流活动对本著作的构思和写作起到了积极的推动作用。

本课题的立项研究和出版得到了教育部的大力扶持;得到贵州大学及其所属机构人文社会科学处和教务处的大力支持;得到贵州大学老科学技术工作者协会的大力支持;得到贵州大学经济学院、贵州省教育厅人文社科基地马克思主义经济学发展与应用研究中心的大力支持;得到贵州人民武装学院的大力支持;得到审阅我们资料的无名专家的大力支持;得到贵州省逻辑界同仁的大力支持;得到贵州大学副校长金道超教授、副校长宋宝安教授,以及徐之明教授、向淑文教授、殷英教授的大力支持;林邦瑾教授在看完齐、清、定的书稿后,热情洋溢地为本书作了《序》;本书的出版得到电子工业出版社的大力支持,董亚峰编辑付出了辛勤劳动;美术设计师吴强先生为封面设计付出了辛勤劳动;得到我们的研究生、本科生的大力支持;等等。谨在此一并致以由衷谢意。

由于课题组成员水平有限,书中难免有不妥之处。恭请海内外贤达不吝赐教。

作　者
2010年6月30日

反侵权盗版声明

举报电话：(010)88254396；(010)88258888
传　　真：(010)88254397
E-mail：dbqq@ phei. com. cn
通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036